

Compendium Elektrotechnik

—

—

There is only one nature — the division into science and engineering is a human imposition, not a natural one. Indeed, the division is a human failure; it reflects our limited capacity to comprehend the whole.

Sir William Cecil Dampier Whetham

If it weren't for electricity we'd all be watching television by candlelight.

Katharine Hepburn

Compendium Elektrotechniek

Sjoerd Op 't Land
Peter Prins
Henk-Johan van Dijk
Rob Reilink
Michiel van der Coelen
Robert Prior



E.T.S.V. Scintilla



Universiteit Twente
Opleiding Elektrotechniek

Uitgeverij Segment B.V., Beek

Compendium Elektrotechniek
1e druk: augustus 2006

© 2006 Uitgeverij Segment B.V.
Postbus 75
6190 AB Beek Lb
www.elektuur.nl

ISBN 13: 978-90-5381-200-6

ISBN 10: 90-5381-200-8

NUR 959

Behoudens de in of krachtens de Auteurswet 1912 gestelde uitzonderingen mag niets uit deze uitgave worden verveelvoudigd, opgeslagen in een geautomatiseerd gegevensbestand, of openbaar gemaakt, in enige vorm of op enige wijze, hetzij elektronisch, mechanisch, door middel van druk, fotokopie, microfilm of op welke wijze dan ook, zonder voorafgaande toestemming van de uitgever. Alle rechten voorbehouden.

Voor zover het maken van reprografische verveelvoudigingen uit deze uitgave is toegestaan op grond van artikel 16h Auteurswet 1912 dient men de daarvoor wettelijk verschuldigde vergoedingen te voldoen aan de Stichting Reprorecht (postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.reprorecht.nl). Voor het overnemen van gedeelte(n) uit deze uitgave in bloemlezingen, readers en andere compilatiewerken (artikel 16 Auteurswet 1912) kan men zich wenden tot de Stichting PRO (Stichting Publicatie- en Reproductierechten Organisatie, postbus 3060, 2130 KB Hoofddorp, www.cedar.nl/pro).

No part of this book may be reproduced, stored in a database or retrieval system, or published in any form or any way, electronically, mechanically, by print, photoprint, microfilm or any other means without prior written permission from the publisher. All rights reserved.

Ondanks alle aan de samenstelling van dit boek bestede zorg kunnen noch de auteurs, noch de redactie, noch de uitgever enige aansprakelijkheid aanvaarden voor eventuele schade die zou kunnen voortvloeien uit enige fout die in deze uitgave zou kunnen voorkomen.

Druk: Wilco, Amersfoort
Omslagontwerp: T. Gulikers, Segment B.V.

Inhoudsopgave

Comité van aanbeveling	viii
Voorwoord	x
Inleiding	xi
Dankbetuiging	xiii
I Theorie	1
1 Algemeen	2
Symbolen	3
Constanten	4
Morse-alfabet en spellingsalfabetten	5
EHBO	6
Schriftelijke en mondelinge communicatie	10
2 Wiskunde	30
Problemen oplossen	32
Operatoren	32
Entiteiten	36
Operaties	40
Grafieken	60
Calculus	61
Rijen en reeksen	84
Meetkunde	86
Kansrekening en statistiek	94
3 Informatica	122
Digitale techniek	123
Computerorganisatie en architectuur	157

Computernetwerken	177
Programmeren	219
4 Fysica	242
Klassieke mechanica	244
Elektrostatica	253
Elektrodynamica	265
Halfgeleiders	280
Fotodiodes	294
Elektrische energietechniek	302
5 Meten	310
Grootheden, eenheden en standaarden	311
Meetonzekerheid	326
Meten van diverse grootheden	338
6 Signalen	371
Signalen en systemen	372
Transductietechniek	402
Dynamische Systemen	411
Regeltechniek	421
7 Elektronica	446
Netwerkanalyse	447
Elektronische basisschakelingen	474
Elektronische functies	482
II Praktijk	489
8 Componenten	490
Passieve componenten	491
Transistoren	508
IC's	530
Displays	537
Thermokoppels	544
Stappenmotoren	545
Printplaten etsen	551

9	Audio en Video	554
	Audiospectrum	555
	Videostandaarden	556
	Scart	558
	HDMI	561
	Audioconnectoren en -signalen	562
	Auto audio	568
	Filters	569
	Gebalanceerde en ongebalanceerde audio	571
	MIDI	572
	DMX (USITT DMX512-1990)	573
	Telefoon	576
10	Computer	578
	RS232	579
	LPT	583
	Joystickpoort	586
	VGA	587
	DVI en DFP	588
	Keyboard	589
	USB	589
	Netwerk	589
	GPIB	590
11	Voedingen	592
	78xx informatie	593
	LM317 en LM337	595
	L200	596
	MAX756	597
	AT en ATX	598
	Lichtnet	599
	 Bibliografie	 600
	 Index	 603

Comité van aanbeveling

dr. ir. Wouter Olthuis (Opleidingsdirecteur Elektrotechniek te Enschede)



Al zo'n 20 jaar heb ik een Tabellenboekje voor onderwijs in de natuur- en scheikunde, voor het beroepsonderwijs, *Binas, die Formeln in einem Band* en mijn handgeschreven samenvattingen van de Elektrotechniek propedeusevakken onder handbereik. Dit compendium verenigt deze boeken en gaat deel uit maken van deze canon der wetenschap. Van harte aanbevolen: een jongensdroom!

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'W. Olthuis', written over a horizontal line.

prof. dr. ir. J. van Katwijk (Faculteitsdecaan EWI te Delft)



In dit compendium staat een veelheid van feitelijkheden over het vakgebied Elektrotechniek vermeld in slechts iets meer dan 600 bladzijden. Voor een vakgebied met een zodanige reikwijdte en zo een invloed op ons aller dagelijks leven is dat natuurlijk helemaal niets. Ik wil de redactie feliciteren met dit geweldige werk en het vakgebied waarin wij in Nederland zulke enthousiaste elektrotechnici hebben.

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'J. van Katwijk', written over a horizontal line.

prof. dr. ir. J.H. Blom (Faculteitsdecaan Elektrotechniek te Eindhoven)



Dit compendium bewijst dat ook Google zijn beperkingen kent. Dit boek is compleet en biedt overzicht en structuur, dat tref je niet op Google aan!

A handwritten signature in black ink, appearing to be 'J.H. Blom', written over a horizontal line.

prof. dr. ir. Nico Baken (Voorzitter NERG)



Elke kubieke meter waar ook ter wereld is barstensvol van informatie; de basisinformatie vindt u in het Compendium Elektrotechniek.

Nico Baken

prof. dr. ir. Jaap Haartsen (Expert Wireless Systems bij Ericsson)



Een naslagwerk dat eigenlijk bij iedere elektrostudent in de kast hoort te staan. Ook waardevol voor de alumni om hun fundamentele kennis weer eens wat op te vijzelen.

Jaap Haartsen

Voorwoord

Voor je ligt de eerste uitgave van het Compendium Elektrotechniek. Een handig naslagwerk voor elke student elektrotechniek, waarin alles te vinden is wat in de dagelijkse praktijk voor studie, hobby of werk nodig is.

Het eerste wat me opviel aan dit boek is de enorme breedte ervan. Het compendium is daarmee een goede afspiegeling van het vakgebied van de elektrotechniek. Alles komt aan bod: van wiskunde en fysica tot computers, krachtstroom en elektronica. Niet alleen qua stof, maar ook qua insteek is het compendium een breed werk. Van het formeel-theoretisch kader tot de weerbarstige praktijk, aan alles wordt aandacht geschonken. Het is in zekere zin een theorieboek voor in de praktijk, daarnaast is het een handige bron van allerlei praktische kennis waar niets fundamenteels aan is maar die gewoon nuttig is om te hebben. Alles wat je ooit beheerst hebt, waarvan je weet dat het ergens te vinden moet zijn, of waarvan je hoopte dat je het nooit meer tegen zou komen, kan je nu bij de hand houden. Inzicht komt doorgaans voort uit een goed begrip van zowel praktische aspecten als theoretische limieten, terwijl spitsvondige oplossingen voor taaie problemen vaak verschijnen uit een multidisciplinaire kijk op de zaak. De breedte van het compendium is zijn grote kracht.

Het is goed om te zien dat er studenten zijn die tijd vinden om dit soort mooie initiatieven te ontplooiën; dat er veel tijd en moeite in is gaan zitten zal duidelijk zijn. Ik geloof dat het de samenstellers gelukt is uit een verscheidenheid aan bronnen een samenhangend overzicht te destilleren dat tevens als naslagwerk kan dienen; het resultaat mag er zijn.

Dit compendium neemt je veel werk uit handen. Hoewel wat er in dit compendium staat ook is te vinden in een goed gevulde boekenkast, kost het aanleggen en onderhouden van een brede verzameling leerboeken en andere werken jaren, is het duur en het meezeulen ervan is slecht voor je rug.

Het verschijnen van deze uitgave gaat misschien gepaard met het gevoel dat het compendium nu 'af' is, maar ik wil benadrukken dat het niet meer dan een momentopname is van het vakgebied anno 2006. Het zou dan ook mooi zijn als dit compendium het begin betekent van een serie, die het levende vakgebied blijft volgen, waarin oude en gedateerde informatie telkens plaats maakt voor nieuwe en relevantere zaken.

Tot slot wil ik nog kwijt dat het compendium slechts bestaat uit bedrukt papier, en pas werkelijk waarde krijgt door het nuttige gebruik dat jullie er van gaan maken. Laat hem dus niet verstoffen, maar gebruik hem!

Veel plezier ermee!

dr. ir. Arnoud van der Wel (werkzaam bij Philips Research Eindhoven)

Inleiding

Op 19 oktober 2004 kwam het idee om ter gelegenheid van het 8^e lustrum van de Elektrotechnische studievereniging Scintilla van de Universiteit Twente een boekwerkje samen te stellen met daarin alles wat de elektrotechniekstudent altijd bij de hand zou moeten hebben. Al snel werd duidelijk dat er hard gewerkt zou moeten worden om dit werk voor september 2005 af te krijgen. Ook bleek dat er meer nodig was dan dictaten achter elkaar plakken en lukraak zinnige informatie van internet bijeen te voegen.

Toen de keuze werd gemaakt voor een zakboekformaat, gingen we er van uit dat het compendium tussen de driehonderd en vierhonderd pagina's zou moeten beslaan. Toen begon ook duidelijk te worden dat er enorm veel informatie is, die in het Compendium Elektrotechniek thuishoort.

Natuurlijk zal het altijd zo zijn dat bepaalde gebieden in de elektrotechniek voor de één belangrijker zijn dan voor de ander. Toch hebben we, als auteurs met verschillende interessegebieden binnen de elektrotechniek, getracht een zo gevarieerd en algemeen mogelijk boekwerk samen te stellen. De dikte verraadt wel dat we ons wel enigszins hebben verkeken op de hoeveelheid informatie die onder de noemer 'elektrotechniek' valt. Met het toenemen van de dikte is ook de publicatiedatum steeds verder opgeschoven. Oorspronkelijk was september 2005 het streven. Daarna werd het een idee er een kerstcadau van te maken. We schrijven lente 2006, het compendium nadert nu echt zijn voltooiing. Het lustrumjaar is nog niet voorbij, dus we zijn nog op tijd.

Het compendium is opgesplitst in twee delen: een theoretisch en een praktisch deel. Het theoretische deel is een samenvatting van een deel van de eerste drie jaar van de studie elektrotechniek aan de Universiteit Twente. In dit deel komen wiskunde, informatica, fysica, meettechniek, signaal- en systeemtheorie en elektronica aan de orde. Het theoretische deel is bedoeld als naslagwerk, dus niet als leerboek.

Het praktische deel is een verzameling informatie die regelmatig van pas kan komen voor iedereen die in de praktijk met elektrotechniek te maken heeft, van pinouts van stekkers en IC's tot kleurcodes van weerstanden en schema's van spanningsregelaars. Dit deel is onderverdeeld in de hoofdstukken componenten, audio/video, computer en voedingen.

We hopen met dit compendium te voorzien in de behoefte van elektrotechnici om veelgebruikte informatie makkelijk bij de hand te kunnen hebben. We zijn ervan overtuigd dat dit compendium regelmatig van pas zal komen, omdat we tijdens onze eigen praktische en theoretische projecten al meermaals dach-

ten 'De informatie die ik nu nodig heb komt in het compendium te staan, het wordt tijd dat hij eens af is'.

We hebben niet de illusie dat het compendium nu af is. Enerzijds ontwikkelt het vakgebied zich door de jaren heen, anderzijds zijn er altijd onderwerpen die 'er eigenlijk ook in zouden horen'. Een volgende groep auteurs mag het stokje van ons overnemen voor de volgende uitgave; om hen een idee van verbeterpunten te geven horen we graag feedback van u, de lezer. Uw reacties kunt u kwijt op www.compendium-elektrotechniek.nl. U kunt hier ook informatie vinden over de ontwikkeling van het compendium, iets dat op een dynamisch medium als het internet makkelijker gaat dan in een boek.

Namens de commissie,
Rob Reilink

De commissie bestaat uit:

Sjoerd Op 't Land	<i>eindredacteur</i>
Peter Prins	<i>redacteur theoretisch</i>
Henk-Johan van Dijk	<i>redacteur praktisch</i>
Rob Reilink	<i>redacteur praktisch</i>
Michiel van der Coelen	<i>auteur praktisch</i>
Robert Prior	<i>auteur praktisch</i>

Dankbetuiging

Aan dit compendium is in totaal ruim een mensjaar gewerkt. Hiervan is ruim tweevijfde door niet-commissieleden verricht. Vanaf deze plaats wil ik ook de vele auteurs buiten de commissie bedanken: prof. dr. ir. Paul Regtien, dr. ir. Anne Johan Annema, dr. ir. Cora Salm, dr. Alexey Kovalgin, dr. Gijs Krijnen, ir. Andries van Stralen, Tjeerd Pinkert, Harmen Droogendijk, Michel Franken, Ludo Visser, Anne Maas, Tom Jongsma, Raymond Kaspers, Juan Carlos Vilamil Oostra, Windel Bouwman, Hubert Flisijn, Roderick Colenbrander, Olaf van Zandwijk, Peter Steenbergen, Arjan Bovee, Ellen van Rossum, Gart de Bruin en Kees Verhaar.

De volgende mensen hebben geholpen het compendium te *reviewen* en begeleiden de auteurs: prof. dr. Alfred Driessen, prof. dr. Jurriaan Schmitz, prof. dr. Michaël Steehouder, dr. ir. André Kokkeler, dr. ir. Martin Hoeijmakers, dr. ir. Gerard Smit, dr. ir. Peter Breedveld, dr. Jan-Kees van Ommeren, ir. Bert Molenkamp, ir. Henk Bonnes, ir. Andries van Stralen, Mireille Buiteman

— Het compendium kon niet tot stand komen zonder de inzet van: Scintilla's Operators Team, in het bijzonder Eelco Dalhuisen, de Vonk, David Daamen en Ferdinand te Walvaart van Segment. —

Door de inzet van ook de Scintilla-leden buiten de commissie is het compendium echt een product 'van Scintilla, voor Scintilla' geworden. Gezien de immense hoeveelheid tijd en inzet die iedereen aan het compendium gegeven heeft, is dat werkelijk een resultaat om trots op te zijn en dankbaar voor te zijn.

Sjoerd Op 't Land

—

—

Deel I
Theorie

Hoofdstuk 1 Algemeen

Inhoudsopgave

Symbolen	3
Grieks	3
10-machten	3
Constanten	4
Algemeen/fysica	4
Elektrostatica/elektrodynamica	4
Morse-alfabet en spellingsalfabetten	5
EHBO	6
Ongevallen met elektriciteit	6
Hulpverlening	7
Schriftelijke en mondelinge communicatie	10
Inleiding	10
Schriftelijke communicatie	11
Onderdelen van een publicatie	13
Plaatjes, tabellen en grafieken	15
Opzet van een brief	18
Mondelinge communicatie	18
Opzet onderzoeksinterview	20
Spelling en grammatica	21

Symbolen

Grieks

Wanneer het Romeinse alfabet tekortschiet voor het aanduiden van grootheden, parameters en variabelen wordt vaak een beroep gedaan op het **Griekse alfabet**.

naam	groot	klein	naam	groot	klein
alfa	A	α	nu	N	ν
beta	B	β	xi	Ξ	ξ
gamma	Γ	γ	omikron	O	o
delta	Δ	δ	pi	Π	π, ω
epsilon	E	ϵ, ε	rho	P	ρ, ϱ
dzeta	Z	ζ	sigma	Σ	σ, ς
eta	H	η	tau	T	τ
theta	Θ	θ, ϑ	upsilon	Υ, Y	υ
iota	I	ι	phi	Φ	φ, ϕ
kappa	K	κ	chi	X	χ
lambda	Λ	λ	psi	Ψ	ψ
mu	M	μ	omega	Ω	ω

10-machten

Voor de positieve **machten van 10** worden Latijnse prefixes gebruikt, voor negatieve machten Griekse prefixes.

factor	naam	symbool	factor	naam	symbool
10^1	deca	da	10^{-1}	deci	d
10^2	hecto	h	10^{-2}	centi	c
10^3	kilo	k	10^{-3}	milli	m
10^6	mega	M	10^{-6}	micro	μ
10^9	giga	G	10^{-9}	nano	n
10^{12}	tera	T	10^{-12}	pico	p
10^{15}	peta	P	10^{-15}	femto	f
10^{18}	exa	E	10^{-18}	atto	a
10^{21}	zetta	Z	10^{-21}	zepto	z
10^{24}	yotta	Y	10^{-24}	yocto	y

Constanten

Voor omrekeningsfactoren tussen SI en niet-SI eenheden, zie pagina 316.

Algemeen/fysica

symbool	naam	waarde
G	gravitatieconstante	$6,6726 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2\text{kg}^{-2}$
g	valversnelling	$9,81 \text{ ms}^{-2}$
p_0	standaarddruk	$1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa (=1 atm.)}$
V_m	molair volume	
	(ideaal gas $T=273,15 \text{ K}$, $p = p_0$)	$2,24141 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3\text{mol}^{-1}$
	(gasvormige stof $T=298 \text{ K}$, $p = p_0$)	$2,45 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3\text{mol}^{-1}$
N_a	constante van Avogadro	$6,02214 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
0°C	smeltpunt van ijs ($p=p_0$)	$273,15 \text{ K}$
R	gasconstante	$8,3145 \text{ Jmol}^{-1}\text{K}^{-1}$
k	constante van Boltzman	$1,38066 \cdot 10^{-23} \text{ JK}^{-1}$
σ	constante van Stefan-Boltzman	$5,67051 \cdot 10^{-8} \text{ Wm}^{-2}\text{K}^{-4}$
k_W	constante van Wien	$2,8978 \cdot 10^{-3} \text{ mK}$
h	constante van Planck	$6,62607 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$
c	lichtsnelheid in vacuüm	$2,99792458 \cdot 10^8 \text{ ms}^{-1}$
u	atomaire massa-eenheid	$1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
	energie overeenkomend met 1 u	$931,49 \text{ MeV}$
m_p	rustmassa proton	$1,67262 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
m_n	rustmassa neutron	$1,67493 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
m_e	rustmassa elektron	$9,10939 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Elektrostatica/elektrodynamica

ϵ_0	elektrische constante	
	permittiviteit van het vacuüm	$8,85419 \cdot 10^{-12} \text{ Fm}^{-1}$
$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = f$		$8,98755 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2\text{C}^{-2}$
μ_0	magnetische permeabiliteit vacuüm	$1,25664 \cdot 10^{-6} \text{ Hm}^{-1}$
		$= 4\pi \cdot 10^{-7}$, per definitie
F	constante van Faraday	$9,64853 \cdot 10^4 \text{ Cmol}^{-1}$
e	elementaire lading	$1,6021765 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Z_0	karacteristieke impedantie vacuüm	$376,730 \Omega$
Φ_0	magnetisch fluxquantum	$2,067834 \cdot 10^{-15} \text{ Wb}$
R_K	Von Klitzing constante	$2,58128 \cdot 10^4 \Omega$

Morse-alfabet en spellingsalfabetten

Met het **Morse-alfabet**¹ kan men over een binair kanaal (CW² radio, lichtseinen, rooksignalen) tekst versturen. Elk symbool is opgebouwd uit *dits* (•) en *dahs* (–). Een *dah* duurt driemaal zo lang als een *dit*. Tussen de *dits* en *dahs* zit een stilte zo lang als een *dit*. Tussen de letters zit een stilte zo lang als een *dah*, tussen de woorden een stilte zo lang als zeven *dits*.

Bij gesproken radiocommunicatie kan een spellingsalfabet worden gebruikt om duidelijk letters en cijfers door te geven.

¹naar Samuel Finley Breese Morse (1791-1872)

²*continuous wave*

Morse	NAVO	Nederlands	Morse	NAVO	Nederlands
A ·–	Alpha	Anton	N –·	November	Nico
B –···	Bravo	Bernhard	O –––	Oscar	Otto
C –·–·	Charlie	Cornelis	P ·––·	Papa	Pieter
D –··	Delta	Dirk	Q ––·–	Quebec	Quirinus
E ·	Echo	Eduard	R ·–·	Romeo	Rudolf
F ···–	Foxtrot	Ferdinand	S ···	Sierra	Simon
G ––·	Golf	Gerard	T –	Tango	Theodoor
H ····	Hotel	Hendrik	U ·–·	Uniform	Utrecht
I ··	India	Isaäk	V ···–	Victor	Victor
J ·–––	Juliet	Johannes	W ·––	Whisky	Willem
K –·–	Kilo	Karel	X –··–	X-ray	Xantippe
L ·–··	Lima	Lodewijk	Y –··–	Yankee	Ypsilon
M ––	Mike	Marinus	Z ––··	Zulu	Zaandam

1 ·––––	unaone
2 ··–––	bissotwo
3 ···––	terrathree
4 ····–	kartefour
5 ·····	pantafive
6 –····	soxisix
7 ––···	setteseven
8 ––···	oktoeight
9 ––···	novenine
0 ––···	nadazero

·	·–··–·
,	–····–
?	···–··
:	–·····
\	–·····
–	–····–
/	–·····
(–·····
)	–·····
"	······
'	······
@	······
=	–····–

Tabel 1.1: Het Morse-, NATO- en Nederlandse spellingsalfabet

EHBO

Ongevallen met elektriciteit

Elektrische stroom kan gevaarlijk zijn; aanraking kan ernstig letsel tot gevolg hebben of zelfs dodelijk zijn. Door een storing in de elektrische installatie of delen ervan kan brand ontstaan met brandwonden tot gevolg.

Als iemand met zijn lichaam in aanraking komt met ongeïsoleerde elektrische geleiders die onder spanning staan, zal hij ook zelf onder spanning komen te staan. Letsel ontstaat wanneer stroom door het lichaam vloeit. De stroom wordt bepaald door de spanning in kwestie en de **contactweerstand** van het menselijk lichaam (zie voor ordegroottes tabel 1.2 en 1.3).

contactoppervlak	weerstand
hand of voet, geïsoleerd met rubber	20 MΩ
voet, geïsoleerd met een leren zool (droge ondergrond)	250 kΩ
voet, geïsoleerd met een leren zool (natte ondergrond)	20 kΩ
hand of voet, niet geïsoleerd	5 kΩ

Tabel 1.2: Contactweerstand van het menselijk lichaam in diverse situaties

fysieke gevolgen	DC [mA]	netfreq. [mA]	10 kHz [mA]
lichte tinteling	0,8	0,3	6
waarnemingsdrempel	4,3	0,9	10
pijnlijk	52	7	46
loslaten onmogelijk	63	13	63
ademhalingsproblemen	75	19	79
hartstilstand na 3 s	500	100	

Tabel 1.3: Fysieke gevolgen van stroom door het lichaam

Elektriciteitsletsel kan het gevolg zijn van contact met spanningvoerende draden van het **lichtnet** (defecte huishoudelijke apparatuur) of van trein- of metroverbindingen. Kinderen krijgen nogal eens een elektrische schok, omdat ze met een metalen voorwerp in een stopcontact prikken, in snoeren knippen of bijten of water op elektrische apparaten gooien. Elektriciteitsletsel kan ook veroorzaakt worden door **blikseminslag**. Een aanzienlijk deel van de getroffen personen overleeft overigens een blikseminslag.

De ernst van het letsel hangt af van de spanning (overslag), de stroomsterkte en de weg die de stroom door het lichaam kiest. De in het lichaam

als warmte vrijkomende elektrische energie kan tot dodelijke orgaanschade leiden. Stroom die door de hersenen gaat, veroorzaakt bewusteloosheid en soms stilstand van de bloedsomloop of van de ademhaling. Verder kan de stroom **brandwonden** veroorzaken. Deze brandwonden lijken nogal eens mee te vallen, maar vaak is de schade aan onderliggende spieren en ander weefsel groot. Aan de buitenkant hoeft dan niet meer zichtbaar te zijn dan een klein wondje op de plekken waar de stroom het lichaam binnenkomt en verlaat.

Een elektrische schok van een **hoogspanningsleiding** heeft meestal een dodelijke afloop. Het slachtoffer kan een eind weggeworpen zijn waardoor de relatie met elektriciteit niet direct duidelijk is. Bovendien kan de val extra letsel veroorzaken.

Hulpverlening

Begin de hulpverlening pas wanneer de situatie veilig is. Brand aan een elektrisch apparaat *nooit* blussen met water of een andere geleidende stof maar met zand of speciaal bluspoeder.

Bij de hulpverlening staat het op een veilige manier onderbreken van de stroomkring voorop. Doorbreek de stroomkring door bijvoorbeeld de hoofdschakelaar uit te zetten of de stekker uit het stopcontact te trekken. Als het onmogelijk is de spanningsbron uit te schakelen, moet het contact tussen het slachtoffer en de stroombron verbroken worden. Omwikkel de handen met niet-geleidend materiaal (droog textiel, rubber, papier of leer) of trek dikke niet-geleidende handschoenen aan. Ga op een isolerende ondergrond (plank, deken, jas, rubbermat) staan, zodat de stroom in het slachtoffer niet via jou gaat lopen. Een losse draad kan van het slachtoffer weggenomen worden met een houten of kunststof stok; als de stroomgeleider vastzit, moet het slachtoffer aan een kledingstuk weggetrokken worden.

Als het slachtoffer niet meer onder stroom staat kan de behandeling worden gestart. Als het slachtoffer bij bewustzijn is moeten eventuele brandwonden minstens 5 minuten worden gekoeld met bij voorkeur lauw stromend water.

Als het slachtoffer buiten bewustzijn is en je geen ademhaling constateert, controleer dan met je wijs- en middelvinger de halsslagader; voel je pulsaties, dan moet je beginnen met beademing. Als je geen pulsaties voelt of twijfelt, begin dan met **reanimatie**: borstcompressies in combinatie met beademing.

Het geven van **borstcompressies** gaat als volgt:

- Ga geknield naast het liggende slachtoffer zitten.
- Zoek met wijs- en middelvinger langs de ribbenboog aan jouw kant het punt waar de onderste rib aan het borstbeen zit.
- Plaats de hiel van je andere hand op het borstbeen, tegen je wijsvinger aan; nu heb je de juist massageplaats.
- Pak de vingers van de hand op het borstbeen en haak ze in elkaar; zorg dat je geen druk uitoefent op de ribben van het slachtoffer, zijn buik of het onderste punt van zijn borstbeen.
- Breng je bovenlichaam boven hetslachtoffer met je armen gestrekt.
- Druk het borstbeen 5 cm naar beneden en laat het helemaal terugkomen; herhaal dit met een tempo van 100 compressies per minuut (het kan helpen hierbij hardop te tellen). Het indrukken en laten terugkomen van het borstbeen duurt even lang.

Wissel 15 compressies af met twee effectieve beademingen totdat het slachtoffer weer gaat ademen. Het **beademen** gaat als volgt:

- Kantel het hoofd lichtjes naar achteren (kinlift).
- Sluit de neus van het slachtoffer met duim en wijsvinger, zorg dat de mond een beetje geopend is
- Adem van opzij frisse lucht in en plaats je mond luchtdicht op de mond van het slachtoffer.
- Blaas rustig in zijn mond en laat de borstkas in twee seconden omhoogkomen.
- Haal je mond van het slachtoffer af terwijl de kinlift gehandhaafd blijft en controleer of de borstkas ook weer naar beneden komt.

Het in de praktijk oefenen van beademing en reanimatie is heel belangrijk om het slachtoffer een kans van overleven te geven. Bij de plaatselijke eerste-hulpverenigingen kunnen verzorging van brandwonden geleerd en reanimatievaardigheden geleerd worden. Zie ook de website <http://www.ehbo.nl/>.

Waarschuw (of laat waarschuwen) de hulpdiensten via het nummer 112. Bij minder erge problemen kan je ook je huisarts raadplegen of naar de spoedeisende hulp van het ziekenhuis gaan.

Met dank aan Oranje Kruis Nederland, <http://www.ehbo.nl/>



Figuur 1.1: Borstcompressies



Figuur 1.2: Beademing

Reanimatie door één hulpverlener (uit: Oranje Kruis Boekje, 24e druk, 2003, © ThiemeMeulenhoff)

Schriftelijke en mondelinge communicatie

Inleiding

Communicatie vindt plaats tussen mensen en organisaties, in een bepaalde context en met bepaalde doelen. Daarnaast is er bij communicatie altijd sprake van een zender en een ontvanger. Wie goed communiceert, gaat niet alleen uit van zijn eigen doelen, maar houdt ook rekening met de doelen en kenmerken van de ontvangers. De zender kan verschillende doelen hebben:

Informatief De zender wil informatie overbrengen aan de ontvanger. De boodschap moet dan nieuwswaarde hebben en is gestructureerd, duidelijk en aantrekkelijk (boeiend).

Instructief De zender wil de ontvanger vaardigheden aanleren. De boodschap geeft inzicht en moet handelingsgericht, efficiënt, leerbaar (begrijpelijk) en motiverend zijn.

Persuatief of motiverend Het doel is persuatief als de zender wil overtuigen. Als de zender niet alleen wil overtuigen, maar de ontvanger ook nog tot actie over wil halen, is het doel motiverend. In beide gevallen is de boodschap gebaseerd op deugdelijke informatie, gebracht in een aantrekkelijke verpakking en is de zender een aansprekende persoonlijkheid (betrouwbaar).

Affectief De zender wil een bepaalde emotie opwekken bij de ontvanger.

In de praktijk zal er vaak sprake zijn van een combinatie van doelen. In het ideale geval zal het doel van de ontvanger overeenkomen met die van de zender, maar dat hoeft lang niet altijd het geval zijn.

Een boodschap kan bedreigend overkomen. Dit gebeurt als:

- de boodschap het *gevoel van eigenwaarde* van de ontvanger aantast, bijvoorbeeld als hij zich bekritiseerd voelt;
- de ontvanger het gevoel kan krijgen dat zijn *recht op zelfbeschikking* wordt bedreigd.

Dit kan soms onvermijdelijk zijn. Ontvangers kunnen dan:

- de boodschap *ontkennen*, bijvoorbeeld door niet naar de argumenten te luisteren;
- *weerstand bieden*, bijvoorbeeld door het verzinnen van tegenargumenten of te relativieren;
- *in de tegenaaval gaan*, bijvoorbeeld door dwars te zitten, of niet mee te werken.

De bedreiging kan verzacht worden door een **beleefdheidsstrategie** te gebruiken.

- Door *indirect te communiceren*. Kritiek of commentaar wordt niet expliciet gegeven.
- Door *compensatie te geven*. Bij kritiek beginnen met een complimentje (vermijd een maar tussen die twee).
- Door *'recht voor z'n raap' te communiceren*. In bepaalde omstandigheden kan het een goede strategie zijn.
- Door het *weglaten van bedreigende elementen*. De prijs van de confrontatie is dan te hoog.

Schriftelijke communicatie

Als de zender wil dat zijn boodschap goed aankomt zal de juiste structuur gebruikt moeten worden. Een goede planning van de globale structuur helpt je systematisch aan de tekst te werken en helpt de lezer de boodschap te begrijpen. Hierin zul je een aantal fases moeten afwerken:

- **Voorbereiding** Formuleer een kort en bondig thema, met bijbehorende hoofdvraag of stelling die de kern van uw boodschap vormt.

Maak een schema van onderdelen waaruit de tekst zal bestaan. Werk de structuur uit in een voorlopige inhoudsopgave. Controleer of de structuur je helder voor ogen staat door een samenvatting van de te schrijven tekst te maken.

Voor de structuur zal er vaak een conventionele indeling bestaan. Je kunt ook gebruik maken van algemeen toepasbare structuurprincipes, zoals:

- een probleemstructuur (wat is het probleem, waarom is het een probleem, wat zijn de oorzaken, hoe kan het opgelost worden?);
- een maatregelstructuur (wat houdt de maatregel in, waarom is de maatregel noodzakelijk, hoe wordt de maatregel uitgevoerd, wat zijn de effecten?);
- een adviesstructuur (wat is het advies, wat zijn de implicaties ervan, wat zijn de randvoorwaarden, waar is het advies op gebaseerd?);
- een beoordelingsstructuur (waar gaat het over, wat zijn de beoordelingscriteria, wat zijn de positieve en negatieve aspecten, hoe luidt het totaaloordeel?);
- een handelingsstructuur (wat is het doel, wat zijn de voorwaarden, wat zijn de deelstappen, hoe is de uitkomst te controleren).

Binnen een tekst kunnen meerdere structuren aan de orde komen. Let bij het maken van de structuur ook op:

- chronologie (verleden, heden, toekomst);
- ruimte (beschrijf plannen en schema's van links naar rechts, van boven naar onder, van voren naar achter (of andersom) van groot naar klein, van kern naar periferie);
- categorieën (duidelijk indelingscriterium);
- didactiek (van bekend naar nieuw, van makkelijk naar moeilijk, van algemeen naar specifiek);
- **Tijdens het schrijven** Werk de onderdelen van de tekst één voor één uit, maar wees flexibel. De bedachte structuur is niet heilig. Begin ieder onderdeel (hoofdstuk, paragraaf) met een inleiding.
- **Controle en revisie** Is de eerste versie eenmaal af? Dan is een controle van de globale structuur gewenst.

Let op de volgende aandachtspunten bij het verwoorden van een tekst:

Alinea-indeling Elk nieuw (deel)onderwerp, argument of te beantwoorden subvraag moet een nieuwe alinea krijgen. Als vuistregel geldt dat elke alinea rond de 10 regels tekst bevat. Voor beeldscherm informatie geldt 5 regels tekst.

Gebruik witregels enkel om groepen alinea's van elkaar te scheiden, tenzij het tekst voor het beeldscherm betreft. Daar is het gebruikelijk alinea's van elkaar te scheiden door witregels.

Formuleer de hoofdgedachte van een alinea zo scherp mogelijk en op de juiste plaats. Plaats deze dus:

- meteen aan het begin van de alinea;
- als tweede zin, als de eerste zin een aanloop karakter heeft;
- in het midden als er sprake is van een scherpe wending;
- helemaal aan het einde bij wijze van conclusie.

Begrijpelijke woordkeus

- Vermijd dure woorden. Gewone woorden zijn vaak ook bruikbaar. Onderschat de lezer echter niet; te simpel en hij haakt af.
- Gebruik geen vaktermen die bij veel lezers onbekend zijn. Leg ze uit als het niet anders kan.
- Vermijd 'incrowdtaal' als je schrijft voor lezers buiten de groep.
- Vermijd vage woorden waarvan iedereen de betekenis kent, maar zo algemeen zijn dat niemand begrijpt wat je er mee bedoelt.
- Gebruik geen dubbelzinnige verwijswaarden (die naar meerdere onderwerpen verwijzen), loze verwijswaarden (die verwijzen naar iets wat nog niet in de tekst is genoemd) en vermijdt een opeenstapeling van verwijswaarden.

Begrijpelijke zinsbouw

- Maak de zinnen niet te lang. Veel problemen kunnen voorkomen worden door het gebruik van korte zinnen. Te kort en de schrijver kan niet serieus genomen worden door zijn doelgroep.
- Gebruik **lijdende zinnen** als je de lezer niet direct aan wil spreken, ik vorm wilt vermijden, geen verantwoordelijkheid wil toekennen of afstand wil nemen van de stelling. De lijdende vorm is niet geschikt als u een doelgroep wil bereiken of precisie/helderheid vereist is. Teveel lijdende zinnen op een rij maken een tekst wel erg indirect. Een lijdende zin kan herkend worden aan het werkwoord zijn of worden plus een voltooid deelwoord.

Boeiend schrijven Zorg dat de lezer gaat lezen door een interessante titel, een motiverende opening en vermijd een woordenbrij (gebruik alinea's, witregels en kopjes). Zorg dat de lezer blijft lezen door afwisselen van lengte van zinnen, soorten zinnen (lijdend, actief) en zo nu en dan afwijken van de standaard zinsopbouw. Vermijd continue herhaling van dezelfde woorden, gebruik voldoende verwijswaarden, synoniemen, vergelijkingen en beeldspraak en anekdotes. Zorg dat de tekst geen kermisattractie wordt en wees voorzichtig met humor.

Gestructureerd schrijven Goede opdeling in hoofdstukken, paragrafen, subparagrafen, secties en alinea's. De lezer moet zich snel kunnen oriënteren, hoofd en bijzaken goed onderscheiden zonder dat de samenhang verloren gaat. De structuur bevordert zoekgemak en onthoudbaarheid.

Instructief schrijven Vermeld het doel van de instructie, meld alle stappen maar vermijd open deuren. Wees gedetailleerd, maar overdrijf niet. Waarschuw wat er mis kan gaan. Let op overzicht en volgorde, groepeer handelingen die bij elkaar horen, scheidt varianten. Gebruik zo mogelijk tabellen.

Opsommingen Puntsgewijs in geval van drie of meer elementen. Letters als opsommingstekens suggereerd dat opsomming compleet is, cijfers suggereren bovendien nog een volgorde. Punten, streepjes etc. zijn neutraal.

Overtuigend schrijven Hier gelden de drie A's. *Aandacht* trekken, je helpt de lezer met het *afwegen* van argumenten, je moet lezers bewegen tot *acceptatie* van je standpunt

Onderdelen van een publicatie

Omslag en titelpagina De omslag vermeldt naam auteur(s), titel, organisatie of opleiding dan wel uitgever. De titelpagina vermeldt naam en voornaam auteur(s), titel en ondertitel, naam uitgever, organisatie of opleiding, plaats van uitgave, jaartal (eventueel maand), eventueel ISBN, naam opdrachtgever/projectleider, naam docenten/begeleiders.

Abstract, samenvatting of management summary Een *abstract* is ca. 150 woorden lang en maakt duidelijk in welk kader de publicatie past, wat voor soort publicatie het betreft, waar het over gaat en wat de belangrijkste conclusies zijn.

Een samenvatting is ca. 1 pagina lang en is informatief (geeft hoofdzaken weer), indicatief (geef bijzaken weer zonder er over uit te wijden), volgt de structuur van de publicatie (nieuwe alinea's of witregels voor nieuwe hoofdstukken) en geeft eventueel aan in welke hoofdstukken bepaalde informatie te vinden is. Zorg ervoor dat het zelfstandig is te lezen.

Een managementsummary is 1 à 2 pagina's lang en geeft het probleem (en aanleiding), advies, argumentatie en consequenties weer. Scheidt elk onderwerp door een witregel en/of kopjes. Zorg ervoor dat het zelfstandig te lezen is.

Voorwoord Het voorwoord is in de ik/wij vorm geschreven, maximaal 1 pagina lang, niet lollig en behandelt aanleiding of motivatie om je met dit onderwerp bezig te houden, hoe je tot de beschreven activiteiten bent gekomen, de doelgroep van de publicatie, eventueel taakverdeling tussen de auteurs, eventueel persoonlijke informatie auteur(s), eventueel verband met eerdere verschenen publicaties en dankbetuigingen. Op het einde altijd plaats, datum en naam van de auteur(s).

Inhoudsopgave De inhoudsopgave geeft per hoofdstuk en paragraaf aan op welke pagina deze te vinden is. Spring in om onderscheid te maken tussen hoofdstuk, paragraaf en subparagraaf.

Inleiding trekt de aandacht van de lezer, motiveert de lezer om juist deze tekst te gaan lezen en bereid de lezer voor op wat komen gaat. Open met een actuele gebeurtenis, een anekdote of een vraag (uitdaging tot meedenken). Geef vervolgens het doel van de tekst aan en eindig met een vooruitblik. Pagina-nummering begint hier pas, maar de voorgaande pagina's tellen wel mee in de telling.

Tekst De feitelijke inhoud, gestructureerd in hoofdstukken en paragrafen.

Afsluiting Hierin een terugblik, de conclusies en aanbevelingen, toekomstperspectieven en eindig met een uitsmijter, bij voorkeur gerelateerd aan de opening van de inleiding.

Literatuurlijst Deze is veelal alfabetisch geordend.

- Alfabetiseer letter voor letter achternaam. Hierbij geldt dat niets voor iets komt (jansen voor jansens)
- Bij meerdere auteurs met dezelfde achternaam ordenen op voorletters. Ook hier geldt: niets voor iets.
- Voorvoegsels worden in Nederlandse publicaties genegeerd, in buitenlandse publicaties niet.
- Bij meerdere publicaties ordent u op jaartal.
- Publikaties zonder auteursnaam worden op titel geordend, lidwoorden buiten beschouwing gelaten
- De publicaties kunnen ook genummerd worden opgesomd, dan worden ze genoemd op volgorde waarin ze het eerst aangehaald worden.

Scheid literatuur, audiovisueel materiaal en websites van elkaar.

Format voor boek:

Naam, Voorletters tussenvoegsel (jaar).

Titel (druk). Plaats: uitgever

Format voor tijdschrift:

Naam, Voorletters tussenvoegsel (jaar).

Titel, Tijdschrift, tijdschrift nummer, paginnummers.

Format voor internet:

Auteur, Voorletters tussenvoegsel (jaar).

Titel. Webadres. Raadpleegdatum.

Bijlagen (Ook wel appendix/appendices.) Alles wat de lijn van het verhaal al te zeer verstoort. Grote tabellen, onderzoeksgegevens, bewijsstukken, illustraties, technische tekeningen. Orden ze in de volgorde waarop ze in de tekst aangehaald worden. Maak van elke bijlage duidelijk wat het nut er van is. Verwijs ook naar de paragraaf waarin de bijlage aan de orde komt.

Register (Ook wel index.) Met hierin sleutelwoorden waarmee de lezer iets terug kan vinden. Acroniemen moeten onder de afkorting te vinden zijn, de uitgeschreven vorm kan met een 'zie afko' naar de afkorting verwijzen. Voor technische documentatie bestaat de vuistregel: 'één indexpagina per 20 pagina's documentatie'.

Plaatjes, tabellen en grafieken

Waarom maakt men gebruik van plaatjes, tabellen en grafieken?

- Ze kunnen de tekst *attractief* maken. Illustraties trekken de aandacht.
- Ze kunnen *affectief* werken. Illustraties brengen lezer in een gewenste stemming.
- Ze kunnen *cognitief* werken. Illustraties concretiseren informatie, waardoor inhoud sneller en beter begrepen wordt. Houdt hierbij rekening met het volgende:
 - gebruik schematische tekeningen in plaats van foto's;
 - wanneer je onderdelen wilt benoemen, gebruik bij voorkeur de verklaring er naast met pijlen er naar toe. Gebruik geen nummers die er door de lezer bij gezocht moeten worden;
 - gebruik meerdere afbeeldingen als één afbeelding te ingewikkeld wordt;
 - gebruik bij meerdere afbeeldingen van één object bij voorkeur dezelfde schaal en hetzelfde perspectief.

Grootste valkuil is te weinig begeleidende tekst bij het plaatje, zodat het de lezer niet duidelijk is wat het voorstelt, of wat de bedoeling is.

Ook tabellen en grafieken kunnen attractief gebruikt worden, maar daarnaast zijn ze vooral cognitief bedoeld. De volgende grafieken kunnen gebruikt worden:

- Staafgrafieken voor een klein aantal absolute benaderde waarden.
- Staafgrafieken met de waarden op de staaf of een numerieke tabel voor een klein aantal exacte waarden.
- Lijngrafiek voor het weergeven van trends.
- Numerieke tabel voor een groot aantal exacte waarden.
- Taart- of balkgrafieken voor het weergeven van proporties.

Geef altijd een toelichting waarom u de grafiek gebruikt en vermeld eventuele conclusies die uit de grafiek zijn te trekken.

Een grafiek is geschikt voor het weergeven van een overzicht, de tabel geeft detailinformatie. Een tabel kan ook gebruikt worden om tekstuele informatie overzichtelijk weer te geven.

Bij het maken van tabellen moet op het volgende gelet worden:

- Een tabel is meestal voorzien van een opschrift dat weergeeft wat de tabel bevat. In rapporten en wetenschappelijke publicaties moeten tabellen genummerd worden.
- Als u gebruik maakt van tussenkopjes in de tabel, gebruik dan witregels

voor het kopje.

- Bij lange tabellen, gebruik een witregel om de 5 regels.
- Laat de koppen links in de tabel uitlijnen.
- Cijfers kunnen het beste in het midden staan. Hele getallen horen rechts uitgelijnd staan. Bij getallen met komma's horen de komma's recht onder elkaar te staan.
- Gebruik geen onnodige rasters.
- Als er meer dan drie kolommen zijn, gebruik dan een grotere regelafstand zodat de lezer makkelijk van links naar rechts kan gaan.

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Opzet van een brief

Gebruik een witregel tussen elk nieuw element.

Afzender Naam, adres, postcode, telefoon, email, internetadres.

Geadresseerde Bedrijf, persoon of functie, adres.

Betreft Onderwerp.

Cc Indien de brief aan meerdere personen verzonden wordt, vermeld dan hier hun naam.

Plaats en datum Voluit geschreven, dus: Enschede, 31 augustus 2005.

Aanhef Gebruik 'Geachte heer', 'Geachte mijnheer' of 'Geachte mevrouw', gebruik 'Geachte heer/mevrouw' indien het geslacht onbekend is. Gebruik bij voorkeur geen rangen of functies. Begin de aanhef met een hoofdletter, eindig met een komma.

Inleiding Geef de aanleiding voor de brief, geef aan wat de lezer met het onderwerp te maken heeft en kondig bij langere brieven aan wat de lezer in de rest van de brief kan verwachten. (Verwijs bij een sollicitatiebrief naar de advertentie, geef aan dat je graag bij de organisatie wil werken).

Kern Werk hier het onderwerp van de brief uit. Een brief moet over één onderwerp gaan. Zijn er meerdere onderwerpen, gebruik dan ook meerdere brieven. Met name bij grotere organisaties kunnen verschillende onderwerpen door verschillende werknemers behandeld worden. (Beschrijf bij een sollicitatie je motieven om te solliciteren, stel hierbij het belang van de organisatie centraal. Beschrijf vervolgens waarom je geschikt bent voor die functie.)

Afsluiting Geef aan wat van de lezer verwacht wordt, wie de lezer kan bereiken voor informatie etc. (Bij een sollicitatie: spreek de hoop op of de bereidheid tot een gesprek uit).

Slotformule (meest gebruikelijk zijn 'Hoogachtend' of 'Met vriendelijke groet'. Eindig met een komma.

Ondertekening en afzender Laat ruimte over voor een handtekening. Zet onder uw handtekening uw naam, eventueel met beroep, titel of functie.

Bijlagen Omschrijf de bijlagen in een genummerde lijst.

Mondelinge communicatie

Technieken die bij mondelinge communicatie belangrijk zijn:

- Stel open vragen. De gesprekspartner wordt dan uitgenodigd zijn gedachten etc. vrij te uiten (vragen beginnen met hoe, waarmee, waardoor, wat vindt u van, waarom etc.).
- Vermijd gesloten vragen, tenzij je de aandacht specifiek ergens op wil vestigen, waarna je verder gaat met een open vraag.
- Wees voorzichtig met suggestieve vragen.
- Parafraseer regelmatig. Hiermee wordt bedoeld het in eigen woorden kort samenvatten van datgene wat de gesprekspartner gezegd heeft. Parafraseer op vragende toon.
- Met reflecteren wordt de aandacht verlegd van feiten en meningen naar emoties met de intentie de ander er over te laten praten. Dit kan open, maar gesloten heeft vaker meer effect. Gebruik een vragende toon en bagatelliseer andermans emotie niet.
- Concretiseren is een techniek om de ander te stimuleren minder in algemene bewoordingen te spreken. Wees alert op woorden als altijd, nooit etc. Dit zijn algemene termen die concretisering behoeven. Vraag wat een ander precies bedoelt, vraag om voorbeelden of concrete gebeurtenissen.
- Vat de hoofdlijnen samen aan het einde van een gesprek(sfase).
- Laat uit je houding interesse blijken. Kijk je gesprekspartner regelmatig aan, maar niet te indringend. Buig licht naar je gesprekspartner toe, ga niet onderuitgezakt zitten. Vouw armen niet over elkaar, dat maakt een afwerende indruk. Maak aantekeningen (geen tekeningen).
- Echo. Herhaal zo nu en dan een kernwoord. Gebruik korte signalen van aandacht.
- Stel geen twee vragen in één keer. Je krijgt alleen antwoord op de laatste vraag.

Valkuilen:

- Mensen menen soms al snel te weten wat een ander bedoelt. Hierbij kan veel informatie verloren gaan; luister goed!
- Veel mensen horen liever zichzelf praten dan een ander. Stiltes zijn lastig in een gesprek. Toch heeft de gesprekspartner soms even tijd nodig om na te denken.
- Verkeerd timen van parafraseren en concretiseren.
- De grootste valkuil is onoprechtheid, je past alle activeringsmethoden toe zonder feitelijk geïnteresseerd te zijn. Daarmee val je bijna altijd door de mand en bereik je het tegenovergestelde.

Opzet onderzoeksinterview

Vorbereiding:

- Wees zelf goed geïnformeerd over het onderwerp.
- Formuleer op papier het kader van het onderzoek waarin het interview gaat plaatsvinden en formuleer het doel van het onderzoek zonder dat het suggestief is.
- Maak een lijst van gerichte vragen die je gaat stellen en thema's waar je het over wilt gaan hebben.
- Maak een duidelijke afspraak over plaats, tijd en tijdsduur.

Openen van het interview:

- Vertel wat jouw functie is in het geheel van het onderzoek en wat het onderzoek inhoudt.
- Noem de tijd die het interview vermoedelijk in beslag gaat nemen.
- Vertel waarom juist deze respondent is uitgenodigd.
- Vertel hoe de gegevens gebruikt gaan worden.
- Geef een vooruitblik over de structuur van het interview.

Vragen stellen en beantwoorden:

- Begin gemakkelijk, om het ijs te breken.
- Snijdt het eerste thema aan met een open vraag.
- Ga door op onderwerpen die de respondent in zijn antwoord aansnijdt.
- Probeer steeds gedetailleerdere antwoorden te krijgen.

Afsluiten van het interview:

- Kondig het einde van het interview aan.
- Geef een totaaloverzicht van uw samenvattingen en verbind daar een conclusie aan.
- Vraag of de respondent eventueel het uitgewerkte interview nog in wil zien.
- Vertel wanneer de respondent, als hij daar prijs op stelt, het onderzoeksrapport tegemoet kan zien.
- Bedankt de respondent.
- Reserveer wat tijd voor een kort nagesprek.

Spelling en grammatica

Werkwoordsvormen (De d's en t's.)

- De werkwoordsvorm eindigt op dt als je een t hoort bij werkwoorden waarvan de stam niet op een d eindigt (hij zoent, hij bloedt).
- Werkwoorden in de verleden tijd (kofschip of fokschap regel), waar de stam eindigt op de k, f, s, ch, p krijgen een t, de rest een d (bijvoorbeeld lachte, kuste, maar zalfde). Let of, woorden waarvan de stam eindigt op een b, v of z krijgen gewoon de -d in verleden tijd, ook al klinkt de vervoeging als een p, f of s (verbaasde, geloofde, schrobde).
- Het voltooid deelwoord waarvan de stam eindigt op k, f, s, ch, p (kofschip regel) eindigt met een -t (dus verkocht, gekust). De rest eindigt op een -d (gezalfd). Voor de b, v en z geldt hetzelfde als hierboven.
- Het voltooid deelwoord als bijvoegelijk naamwoord. Een -t, of -tt, een -d of -dd? Als er een -e aan toegevoegd kan worden, hoeven -t noch -d verdubbeld te worden (bedekte hoofden, beantwoord briefje), soms is het noodzakelijk om te verdubbelen om de juiste uitspraak te behouden (bezatte studenten). Ook kan het nodig zijn om twee klinkers tot één te reduceren (een begroot bedrag, de begrote bedragen)

Accent Volg bij woorden uit een vreemde taal de regels uit de desbetreffende taal. Voor Franse woorden die in het Nederlands zijn ingeburgerd, geldt voor de a, i, o, u geen accent, voor de e moet u een woordenboek raadplegen. Accent aigu voor woorden die je wilt benadrukken (bijvoorbeeld zéér leuk).

Apostrof Te gebruiken als weglatingsteken als één of twee letters wegvallen (bijvoorbeeld 's morgens) of als de tweede naamval van een woord in het Nederlands wordt gevormd door een -s (bijvoorbeeld Ada's kind). Als het woord op een -s klank eindigt wordt de apostrof gebruikt (bijvoorbeeld Perez' politiek, Max' honden).

Gebruik de apostrof als scheidingsteken als een woord in de tweede naamval of als meervoud een -s moet krijgen en het risico ontstaat dat het verkeerd wordt uitgesproken (bijvoorbeeld auto's of Anna's jurk). Als er geen misverstand kan ontstaan, geen apostrof (bijvoorbeeld Maries dochter of cafés). Gebruik een apostrof om letterwoorden te scheiden van achtervoegsels (bijvoorbeeld sms'je).

Gebruik een apostrof voor de verkleinwoorden van woorden die eindigen op medeklinker-y (bijvoorbeeld baby'tje), maar niet op woorden die eindigen op klinker-y (bijvoorbeeld surveytje)

Koppelteken Gebruiken bij de volgende voorvoegsels: adjunct-, aspirant-, ex-, loco-, pro-, pseudo-, quasi-, semi-, substituut-, vice-. Maar niet bij anti, co, des, duo en sub.

Hoofdletters Hier gelden de volgende regels:

- Begint de zin met een afgekapte woord, dan begint het tweede woorden met een hoofdletter (bijvoorbeeld: 's Ochtends . . .).
- Begint de zin met een getal, geen hoofdletter (bijvoorbeeld: 43 vrijwilligers hielpen . . .)
- Namen van mensen, voor-, achter- en bijnamen (Jan Peter Balkenende, Karel de Stoute).
- Voorvoegsels krijgen geen hoofdletter als er geen voorletters of voornamen voorstaan. Staan die er niet voor dan krijgen ze wel een hoofdletter (dhr. Van Hooft, maar dhr. A. van Hooft).
- Bij officiële titulatuur (Zijne Heiligheid Benedictus XVI).
- Bij woorden die van eigennamen zijn afgeleid, waar de eigenaam nog van belang is (Nobelprijs). Is de eigenaam niet meer van belang, dan gebruik je geen hoofdletter (bijvoorbeeld marxist).
- Bij aardrijkskundige namen (Nederland). Als de naam uit meerdere woorden bestaan, dan krijgt elk woord een hoofdletter (Noord-Amerika). Aardrijkskundige namen die als categorie gebruikt worden krijgen geen hoofdletter (balkanstad).
- Talen en dialecten (Fries, Twents), bewoners van een streek (Twentenaars).
- Namen van: straten (Matenweg), bedrijven, organisaties of merken (Universiteit Twente, een Boeing), gebouwen (Oranjestaete), hemellichamen (de Grote Beer), instellingen (de Tweede Kamer), historische gebeurtenissen of tijdperken (Stenen Tijdperk, Tweede Wereldoorlog), religieuze feestdagen (Goede Vrijdag), soms bij niet religieuze feestdagen (Koninginnedag, Valentijnsdag (eigennamen), maar ook oudejaarsavond).
- Niet bij namen afgeleid van tijdperken of gebeurtenissen (middeleeuwen), samenstellingen die beginnen met een religieuze feestdag (pinkstervakantie).
- Afkortingen soms (N.B., P.S.).
- Woorden die betrekking hebben op de naam van God (Onze Lieve Heer, Allah). Bij een verwijzing naar God, wel als het om persoonlijke voornaamwoorden gaat, niet als het bezittelijke voornaamwoorden gaat (Wij vereren de Moedergodin, want Zij voedt ons, haar kinderen). In meer-

voud kan weer een kleine letter worden gebruikt ('In het polytheïsme worden meerdere goden vereerd').

- Niet bij namen van dagen, jaargetijden en windstreken (maandag, zomer, het noorden).
- Titels van boeken, films, liedjes en dergelijke ('De film De naam van de roos is geweldig!')

Meervoudsvorming

- Meervoud met 's als het woord eindigt op een heldere a,i,o,u, y (taxi's), als het woord eindigt op een enkele -e die klinkt als -ee (facsimile's), als het woord is een merknaam is en u wilt het woordbeeld bewaren (Peugot's). Veel gemaakte fouten zijn -e (bedes, horloges), -é (cafés), -ee (dictees), -er (diners), -ie (vakanties), -eau (bureaus), -ey (jockeys), -ay (essays), -ieu (milieus), -ui (etuis).

- Meervoud met -en. Verdubbeling -t, -s, als het anders verkeerd uitgesproken wordt (matten) -is en -us (krokussen). Maar niet bij -ik en -es (dreumesen).

Trema bij woorden eindigen op -ee (ideeën) -ie en de klemtoon valt op de laatste lettergreep (melodieën). Valt de klemtoon niet op de laatste lettergreep dan moet er een -e geschrappt worden (bacteriën).

- Meervoud uit het latijn. Eindigt het zelfstandig naamwoord op -us, dan is het meervoud -i (medici), uitzondering hierop zijn woorden van de vierde declinatie (prospectussen).
- Zelfstandig naamwoord eindigt op een -a, dan komt er een -e achter als meervoud (doctorandae). Eindigt het op -um, dan mag zowel het latijnse -a gebruikt worden als het Nederlandse -s (musea of museums). Let op uitzonderingen die maar één uitgangsvorm hebben (curricula, factotums).
- Let op uitzonderingen waarbij beide uitgangen iets anders betekenen (criteriums (wielerrondes), criteria (beoordelingsvoorwaarden)).

Slot-n bij meervoud Of woorden als alle(n), laatste(n) e.d. op een -n moeten eindigen of niet hangt samen met de vraag of ze al dan niet zelfstandig gebruikt worden.

- Een slot-n wordt gebruikt bij een zelfstandig gebruikt telwoord dat verwijst naar telwoorden (Er was verzet van zowel de directie als de medewerkers, de laatste dreigden . . .)
- Zelfstandig gebruikt telwoord dat niet verwijst naar telwoorden kent geen slot-n (zestien bedrijven hadden zich aangemeld, de meeste eisten

- ...).
- Een slot-n wordt gebruikt bij een zelfstandig gebruikt telwoord dat deels verwijst naar personen en deels naar andere levende wezens of zaken. (... auto en bestuurder raakten beiden ...).
 - Een slot-n is noodzakelijk bij een bijvoeglijk naamwoord dat wordt gebruikt als zelfstandig naamwoord (De aanwezigen hadden ...).
 - Bijvoeglijk naamwoord dat niet wordt gebruikt als zelfstandig naamwoord heeft geen slot-n (Sommige vertegenwoordigers ...)

Samenstelling

- Aaneenschrijven. Samenstellingen worden in de regel geschreven als één woord, zonder koppelteken (koffiekan), ook als ze heel lang zijn (middellangetermijnplanning). Sommige woorden kunnen uitegetrokken worden (hij belde op), terwijl het werkwoord één geheel is (opbellen). Samenstellingen gebaseerd op uitdrukkingen worden ook aaneen geschreven (tenlastelegging). Samenstellingen met bijwoorden zoals er, hier, etc. (erboven, daarboven).

Getallen tot duizend en samenstellingen waarvan het tweede deel duizend of honderdduizend is (achthonderddrieëntwintig, driehonderdduizend). Na duizend volgt een spatie (zesduizend achthonderd). Let op het trema als twee en drie door -en gevolgd worden. Als u getallen bij voorkeur in cijfers uitdrukt, maak dan uitzondering voor getallen onder de twintig, tientallen tot honderd en honderdtallen tot duizend.

- Koppelteken. Gebruiken als klinkercombinaties verkeerd uitgesproken kunnen worden, zoals bij combinaties van a+a, a+e, a+i, a+u, e+e, e+i, e+u, i+e, i+i, o+e, o+i, o+o, o+u, u+i en u+u. Bij de volgende koppels zijn koppeltekens onnodig. a+o, e+a, e+o, i+a, i+o, i+u, o+a, u+a, u+e en u+o.

Plaats een koppelteken tussen samenstellingen die gelijkwaardig zijn (Belgisch-Nederlands akkoord). Gebruik koppeltekens in samenstellingen van cijfers en letters en andere tekens (c-snaar, 13-jarige, \$-teken). Gebruik ze als twee of meer gelijkwaardige elementen die zelf geen samenstelling vormen, in een samenstelling verbonden worden met een ander woord (woon-werkverkeer). Plaats een koppelteken in samenstellingen die een nevenschikking, woordgroep of zin bevatten (kat-en-muisspeltje). Gebruik een koppelteken bij samengestelde aardrijkskundige namen (Noord-Amerika). Plaats een koppelteken tussen tweeledige samenstellingen die nauw met elkaar verbonden zijn (oud-roker) Je mag onoverzichtelijke samenstellingen verhelderen met een koppel-

- teken (valk-uilen, derde-generatie-Zuid-Afrikaan).
- Tussen e(n). Het eerste deel van de samenstelling heeft een meervoud op -en en niet op -s. (Boekenkast).

Uitzonderingen zijn:

- verwijzingen naar unieke personen of zaken (maneschijn, Konin-ginnedag);
- als het eerste deel een bijvoegelijk naamwoord is en een versterkende of waardebepalende betekenis heeft (beregoed);
- als de samenstelling een plant is en het eerste deel een dier is (kattekruid);
- als de samenstelling een versteende uitdrukking is en het eerste gedeelte de naam van een lichaamsdeel (ruggespraak);
- als de samenstelling wordt opgevat als een enkelvoudig woord (bolleboos).

Een tussen-n wordt gebruikt als het eerste deel eindigt op een medeklinker en het meervoud kan zowel met -en als -s (directeurenoverleg)

Geen tussen-n wanneer het eerste gedeelte eindigt op -e en heeft meervoud zowel met -s als -n (secretaressecongres).

Geen tussen-n wanneer:

- het eerste deel geen meervoud heeft (rijstepap);
 - het eerste deel alleen een meervoud met -s heeft (aspergeteelt);
 - het eerste deel een bijvoegelijk naamwoord is (blindedarm);
 - het eerste deel een werkwoord is (huilebalk).
- Tussen-s. Als het tweede deel van de samenstelling met een s geschreven wordt, komt er een tussen-s als die ook gehoord wordt in samenstellingen waar het tweede woord niet met een -s begint. (volksspelen, want volksmenner). Bij samentrekkingen blijft de extra -s gehandhaafd (jongens- en mannenstemmen) Schrijf alleszins, geenszins, anderszins en enigszins met een sz combinatie

Trema Klinkercombinaties die een trema behoeven zijn: a+a, a+e, a+i, e+e, e+i, i+e, o+e o+i, o+o, u+i, u+u. Zonder trema dreigt een verkeerde uitspraak. Lettercombinaties die daar geen last van hebben en dus geen trema behoeven zijn e+a, e+o, i+o,u+a,u+e, i die als j wordt uitgesproken en woorden die met ge- beginnen zonder dat daar direct een -i of -e op volgt (geoefend).

Verkleinwoorden -a, -e, -o of -u die lang uitgesproken worden worden verdubbeld in het verkleinen (laatje, fotootje) tenzij het woord afgebroken wordt (foto-tje). Een -i die wordt uitgesproken als ie krijgt -ietje als uitgang (taxietje). Voor woorden die eindigen met y, zie apostrof.

Aanhalingstekens worden in verschillende situaties gebruikt:

- Wanneer iemand letterlijk wordt geciteerd. Gebruik bij citaten dubbele aanhalingstekens. Bij een citaat binnen een citaat worden enkele aanhalingstekens gebruikt. Begin een citaat met een hoofdletter, tenzij je midden in een zin begint. Een citaat eindigt in principe met het oorspronkelijke leesteken (Bas zei: “Laten we gaan zwemmen.”), tenzij je een omgekeerde zinsvolgorde gebruikt (“Laten we gaan zwemmen”, zei Bas.) Uitroepstekens en vraagtekens blijven hierbij wel staan.
- Omdat er sprake is van een definitie. Bij definities die uit een bron worden geciteerd gebruik je ook dubbele aanhalingstekens. Bij definities die je zelf formuleert, worden geen aanhalingstekens gebruikt
- Omdat een woord of woordgroep ironisch bedoeld is. Gebruik enkele aanhalingstekens als:
 - het woord ironisch bedoeld is;
 - het gekozen woord niet precies weergeeft wat je bedoelt, maar je hebt geen beter woord ter beschikking;
 - je andermans woorden overneemt, maar je er van wilt distantiëren.

Beletseltekens (Ook wel: ellips.) Een reeks van drie puntjes zonder spaties wordt gebruikt om:

- een gedeelte uit een citaat weg te laten. Hierbij plaats je vierkante haken om de puntjes ([. . .]);
- een spanningwekkende pauze opwekken (Van Basten schiet . . . en scoort!);
- te suggereren dat een zin tot nadenken of mijmeren stemt (En deze minister zou voor de zwakkeren in onze samenleving op moeten komen . . .).

Dubbele punt wordt gebruikt om aan te geven dat er een nadere uitleg of uitwerking volgt. De dubbele punt gaat vooraf aan:

- een letterlijk citaat;
- een verklaring (De letters *s*, *w*, *o*, *t* zijn voor Nederlandse lezers niet direct herkenbaar: het zijn de eerste letters van de engelse woorden ‘*strengths*’, ‘*weakness*’, ‘*opportunities*’ en ‘*threats*’.);
- een opsomming (We hebben nodig: boter, kaas en eieren.).

Gedachtestreepje Het gedachtenstreepje – niet te verwarren met het koppelteken - dient voor opmerkingen tussendoor. Het streepje staat altijd tussen twee spaties en is langer dan het koppelteken. Het kan ook gebruikt worden om een plotselinge wending in de tekst te markeren (Hij speelde terug op de

keeper – en scoorde in eigen doel.) Als na het tweede gedachtestreepje een leesteken komt, vervalt dat streepje.

Komma Deze helpen de lezer de zinsbouw te volgen. Gebruik ze bij een:

- hoofdzin die wordt onderbroken door een andere hoofdzin (Hij heeft de schuldenaar, hij weigerde te betalen, gisteren nogmaals gebeld);
- niet al te lange opsomming; let op: soms zijn opsommingen ongelijksoortig. Dan is het verstandig ze in twee groepen te verdelen en te scheiden met een voegwoord. Hiervoor wordt ook een komma gebruikt (Ik vind hem lui, arrogant, pedant, en aardig.);
- toevoeging bij een zelfstanding naamwoord (Willem de Zwijger, Vader des Vaderlands, werd gespeeld door Jeroen Krabbé.);
- aanspreking (Ik vind het een goed idee, meneer de voorzitter, om de vergadering op te heffen);
- bijzin, wanneer twee werkwoordsvormen naast elkaar komen die niet bij elkaar horen (Toen zij weggingen, ging ik mee.);
- lange zin (Het faculteitsbestuur besloot na lang aarzelen en veel overleg met het College van Bestuur, dat de hoogleraar voor ontslag zou worden voorgedragen.).

Komma's kunnen ook gebruikt worden om dubbelzinnigheden te vermijden (Zij vroeg hem, vaak langs te komen. Zij vroeg hem vaak, langs te komen.) Er is verschil in kommagebruik tussen beperkende en uitbreidende bijvoeglijke bijzinnen. De regels zijn:

- als een bijzin een beperking aanbrengt, dan wordt er geen komma geplaatst voor de bijzin (tip: je kunt het woord alleen aan de zin toevoegen (De medewerkers die hun spullen zijn kwijtgeraakt, krijgen een extra persoonlijk budget. Alleen de medewerkers die hun [...]));
- als er geen sprake is van een beperking, maar een uitbreiding, dan moet worden er wel een komma gebruikt worden. (De medewerkers, die hun spullen zijn kwijtgeraakt, krijgen [...].);
- een bijvoeglijke zin bijzin na een eigennaam is altijd een uitbreiding (Van Gerrit Zalm, destijds fractievoorzitter was, had hij het meeste geleerd.);
- na een telwoord als 'iedere' of 'elke' kan de bijzin alleen maar beperkend zijn (Iedere koe die meer dan 500 liter melk produceert, valt onder de superheffing.).

Leestekens bij opsommingen De basisregel voor het weergeven van een puntsgewijze opsomming is: doe zo precies mogelijk wat je gedaan zou hebben als je de opsomming niet puntsgewijs zou presenteren. De volgende regels zijn hierop van toepassing:

- De aanloopzin eindigt op een punt. De leden van de opsomming zijn allemaal volledige zinnen, die beginnen met een hoofdletter en eindigen met een punt.
- De aanloopzin eindigt op een dubbele punt. De leden van de opsomming complementeren allemaal de aanloopzin en eindigen allemaal op een puntkomma. Het laatste lid eindigt met een punt.
- De aanloopzin eindigt zonder leesteken. De leden van de opsomming complementeren allemaal de aanloopzin en eindigen op een komma. Het laatste lid eindigt met een punt. Als de leden enkel uit één woord (of weinig meer dan dat) bestaat, wordt steeds vaker geen enkel leesteken meer gebruikt.

Punt Gebruik een punt bij:

- afkortingen (ca., nl., drs.);
- afkortingen die bestaan uit meerdere woorden (s.v.p., a.u.b.). Uitzonderingen zijn:
 - bedrijven en instellingen, tenzij die zelf een punt gebruiken (ANWB, UT);
 - afkortingen van producten (bh, wc, tv);
 - schooltypen (vwo, hbo);
 - maten en gewichten (kg, A).
- het einde van een zin. Uitzonderingen zijn kopjes, hoofdstuk-, paragraaf- en subparagraaftitels of als de zin eindigt met een aanhalingsteken en er een punt, vraagteken of uitroepeteken voor staat (Hij zei: "Laten we gaan.");

Puntkomma Deze wordt gebruikt als twee zinnen nauw bij elkaar horen (Men verwachtte tien sollicitanten; achteraf bleken het er nog geen zes geweest zijn). Gebruik géén puntkomma als er een voegwoord gebruikt wordt (Men verwachtte tien sollicitanten, maar achteraf bleken er nog geen zes geweest zijn.) Gebruik puntkomma's bij opsommingen die ingeleid worden door een dubbele punt.

Uitroeptekens Uitroeptekens geven aan dat iets belangrijk, opvallend of verwondelijk is. Veel uitroeptekens maken een tekst al snel schreeuwerig. Gebruik uitroeptekens om:

- boosheid, ironie of verbazing uit te drukken (Gisteren gekocht en nu al kapot!);
- de lezer extra attent op de inhoud van de zin te maken (Let op: vuur is heet!);
- verbazing en ironie over element in de zin wil laten blijken. Zet het uitroeptekens er dan tussen haakjes achter. (Alle (!) medewerkers gingen mee);
- als een uitroepende zin direct wordt weergegeven. (Hij riep: “Oprotten jullie!”);
- meerdere uitroeptekens op een rij geven een schreeuwerige indruk (Dit kunt u niet missen!!!).

Vraagtekens Gebruik vraagtekens om:

- een vragende zin direct wordt weergegeven (Hij vroeg: “Wordt u al geholpen?”);
- twijfel over een element in de zin wil uiten. Zet het vraagteken er dan tussen haakjes achter (Bedankt voor dit mooie (?) cadeau);
- een vragende zin kan de vorm van een mededeling hebben (En dat is een probleem?);
- geen vraagtekens bij uitgeroepen vragen (Hoe kan dat nou!).

Hoofdstuk 2 Wiskunde

Inhoudsopgave

Problemen oplossen	32
Operatoren	32
Notatie	33
Eigenschappen	33
Symbolenlijst	33
Entiteiten	36
Verzamelingen	36
Intervallen	36
Complexe getallen	36
Vectoren	38
Matrices	39
Operaties	40
Volgorde	40
Basis-operaties	40
Operaties op complexe getallen	44
Operaties op verzamelingen	46
Operaties op vectoren	47
Operaties op matrices	49
Functies	56
Vergelijkingen	59
Grafieken	60
Scalars	60
Vectoren	60
Calculus	61
Differentiëren	61
Primitiveren	69
Integreren	72
Differentialvergelijkingen	79
Rijen en reeksen	84
Rij	84
Reeks	84
Meetkunde	86
Goniometrie	86

Kegelsneden	89
Ruimtelijke figuren	93
Kansrekening en statistiek	94
Basisbegrippen	94
Kansverdelingen	95
Verwachting en variantie	97
Discrete kansverdelingen	99
Continue kansverdelingen	100
Schatten	104
Betrouwbaarheidsintervallen	105
Correlatie en regressie	106
Tabellen	108

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Problemen oplossen

1. Aanvangen, beschouwen

Wat is het probleem? Wat is gegeven, wat is gevraagd?

Teken een schema, probeer overzicht te krijgen over het probleem, ken symbolen toe aan tussenoplossingen met veel constanten die niet bijdragen aan het inzicht.

2. Oplossen

Een ander bekend probleem herkennen Zoek een gelijksoortig, eenvoudiger probleem waarvan je de oplossing wel weet.

Patroon herkennen Los het probleem voor een aantal opvolgende gevallen op en kijk of er een patroon in de oplossingen zit.

Iets toevoegen Soms is het nodig om iets extra's (een hulplijn bijvoorbeeld) toe te voegen om de verbinding te maken tussen het bekende en het gevraagde.

Opsplitsen in gevallen Splits het probleem op in een aantal gevallen (bijvoorbeeld bij rekenen met absolute waardes) en los elk geval apart op.

Achteruit werken (blikwisseling) Neem eens aan dat je de oplossing weet en bedenk wat je nodig zou hebben om dat te weten en probeer dat vervolgens op te lossen.

Bewijs uit het ongerijmde Als bewezen moet worden dat $P \rightarrow Q$, neem aan dat P waar is en Q onwaar en toon aan dat dit nooit kan voorkomen. Ook genoemd: *reductio ad absurdum*.

Volledige inductie In stellingen met een positieve integer n aangeduid met S_n geldt dat als zowel

a) S_1 is waar

b) S_{k+1} is waar gegeven dat S_k waar is

dat S_n waar is voor alle positieve integers n .

3. Controleren

Heb je fouten gemaakt? Was er een eenvoudiger manier om dit antwoord te krijgen? Zijn de gevonden waarden realistisch? Is het fysisch mogelijk dat een dergelijk verband bestaat (denk aan vermogenscontinuïteit). Kloppen de eenheden?

Operatoren

Notatie

Operatoren zijn speciale functies met één of meerdere operanden als argument. Afhankelijk van het aantal operanden wordt een operator unair, binair, ternair etc. genoemd.

Er zijn drie manieren voor het noteren van de operator met zijn operanden:

Prefix-notatie $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$ of $Qx_1x_2 \dots x_n$, bijvoorbeeld $\sqrt{x_1}$

Postfix-notatie $(x_1, x_2, \dots, x_n)Q$ of $x_1x_2 \dots x_nQ$, bijvoorbeeld X^T

Infix-notatie x_1Qx_2 (bij twee operanden), bijvoorbeeld $\vec{x}_1 \times \vec{x}_2$

Eigenschappen

Voor binaire operators $*$ op operanden uit S (hieronder in de infix-notatie) kunnen drie eigenschappen gelden:

Associativiteit Als $(x * y) * z = x * (y * z)$ voor alle $x, y, z \in S$.

Ook voor een reeks van meerdere operators kunnen zo de haakjes worden weggelaten zonder ambiguïteit te introduceren.

Commutativiteit Als $x * y = y * x$ voor alle $x, y \in S$.

Distributiviteit Als voor twee binaire operators $*$ en $+$ zowel links-distributiviteit $(x * (y + z) = (x * y) + (x * z))$ als rechts-distributiviteit $((x + y) * z = (x * z) + (y * z))$ geldt.

Symbolenlijst

+	Optellen, logische OF
-	Aftrekken, negatief getal
·	Vermenigvuldigen, logische EN
.	Inproduct
×	Uitproduct (vermenigvuldiging)
/, ÷	Delen
^	Machtsverheffen

Algemeen

 $\sqrt{\quad}, \sqrt[n]{\quad}$ Worteltrekken $!$ Faculteit Σ Sommatie (zie p. 84) \prod Product

Wiskunde

 \int Integraal (zie p. 72) \oint Kringintegraal $\pm(\mp)$ Plus of min (min of plus): twee oplossingen, tolerantie \dots Vervolg: $x_1 + \dots + x_3 = x_1 + x_2 + x_3$ $\%$ Procent (1/100) ‰ Promille (1/1000)

Informatica

 $'$ Afgeleide, (boog)minuut, voet $''$ Tweede afgeleide, (boog)seconde, inch $:$... staat tot ..., ... zodanig dat ..., ... geldt dat ... $|$... zodanig dat ..., ... geldt dat ... $::$ Gemiddeld met ($7 :: 11 = 9$), ... evenredig met ... ∞ Oneindig

Fysica

 $()$ Waarde, lijst, coördinaten (vector) of open interval (zie p. 36) $[\quad]$ Waarde, vector, gesloten interval (zie p. 36) $\{\quad\}$ Waarde, verzameling $=$... is gelijk aan ... \equiv ... is per definitie ... $\widehat{=}$... komt overeen met ... \neq ... is ongelijk aan ...

Meten

 \approx ... is bij benadering ... \sim ... is gelijkvormig met ..., ... is verdeeld volgens ... \propto ... is evenredig met ... $>$... is groter dan ... $<$... is kleiner dan ...

Signalen

 \geq, \geqslant ... is groter dan of gelijk aan ... \leq, \leqslant ... is kleiner dan of gelijk aan ... \gg ... is vele malen groter dan ... \ll ... is vele malen kleiner dan ... ∇ Nabla-operator Δ Kleine verandering, driehoek ∂ Infinitesimale verandering

Elektronica

 $\sphericalangle, \sphericalangle$ Hoek \sphericalangle Ruimtehoek

\perp	... staat loodrecht op ...
\parallel, \parallel	parallelschakeling, ... loopt parallel met ...
\exists	Er bestaan ..., voor zekere ...
\nexists	Er bestaan geen ...
\forall	Voor alle ..., geldt dat ...
$\neg, \bar{A}, \#$	Niet (logische negatie), ... behalve ... (uitsluiting)
\bar{x}	Steekproefgemiddelde van x
\Rightarrow	Als ..., dan ... (logische implicatie)
\Leftrightarrow	... dan en slechts dan, als ... (logische biïmplicatie)
\therefore	Hieruit volgt dat ...
\because	Omdat ...
\square, \blacksquare	QED
\wedge	En
\vee	Of
\in	... is een element van ...
\notin	... is geen element van ...
\subset	... is een echte deelverzameling van ... (zie p. 36)
\subseteq	... is een willekeurige deelverzameling van ... (zie p. 36)
\cup	... verenigd met ...
\cap	... doorsneden met ...
\emptyset	Lege verzameling
$^\circ$	Graden (hoek), temperatuur
θ, φ	Hoekvariabele
λ	Eigenwaarde, golflengte
π	Pi
ω	Frequentie, hoeksnelheid
Ω	Frequentie in discrete tijd, weerstand
\mathbb{N}	De natuurlijke getallen
\mathbb{Z}	De integere getallen
\mathbb{Q}	De rationale getallen
\mathbb{R}	De reële getallen
$ x , \text{abs}(x)$	Absolute waarde van x { x voor $x \geq 0$, $-x$ voor $x < 0$ }
$\text{signum}(x)$	het teken van x , $\frac{x}{ x }$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Entiteiten

Verzamelingen

Volgens Cantor¹ is een verzameling een veelheid beschouwd als één; de totaliteit van in bepaalde zin bij elkaar behorende elementen. Twee verzamelingen zijn identiek, wanneer ze dezelfde elementen bevatten. Verzamelingen kunnen **eindig**, **aftelbaar oneindig** (evenveel elementen als de natuurlijke getallen) of **overaftelbaar oneindig** (meer elementen dan de verzameling van natuurlijke getallen) zijn. Veelgebruikte verzamelingen:

Symbol	Naam	Elementen
\mathbb{N}	Natuurlijke getallen	$0, 1, 2, \dots$
\mathbb{Z}	Gehele getallen	$\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$
\mathbb{Z}^+	Strikt positieve getallen	$1, 2, \dots$
\mathbb{Z}_0^+	Positieve getallen	$0, 1, 2, \dots$
\mathbb{Z}^-	Strikt negatieve getallen	$\dots, -2, -1$
\mathbb{Z}_0^-	Negatieve getallen (incl. 0)	$\dots, -2, -1, 0$
\mathbb{Q}	Rationale getallen	$\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$
\emptyset	Lege verzameling	
U	Universum: alle mogelijke elementen	

Intervallen

Intervallen zijn delen van een getallenlijn. Ze kunnen worden genoteerd met rechte haken voor een gesloten intervalgrens en ronde haken voor een open intervalgrens. Voorbeelden

$$\begin{aligned}
 x \in (-8, 8) &\Leftrightarrow -8 < x < 8 && \text{(open interval)} \\
 x \in [0, 3] &\Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3 && \text{(gesloten interval)} \\
 x \in (-2, 3] &\Leftrightarrow -2 < x \leq 3 && \text{(half-open interval)} \\
 x \in [0, \rightarrow) &\Leftrightarrow x > 0 && \text{(half-open interval)} \\
 x \in [0, \infty) &\Leftrightarrow x > 0 && \text{(half-open interval)}
 \end{aligned}$$

Soms worden voor open-intervalgrenzen “{” en “}” gebruikt, om verwarring met coördinaten te voorkomen.

¹Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (1845-1918)

Complexe getallen

Definitie

Het blijkt nuttig om een oplossing te hebben voor wortels voor een negatief getal. Hiervoor is afgesproken dat $j \equiv \sqrt{-1}$. Wiskundigen gebruiken voor dit getal ook wel het symbool i , maar omdat dit symbool bij elektrotechnici al in gebruik is voor elektrische stroom wordt het symbool j verder in dit compendium gebruikt.

Een **imaginair getal** is een veelvoud van j . Een complex getal $z \in \mathbb{C}$ is de som van een reëel getal $a \in \mathbb{R}$ en een imaginair getal bj , $b \in \mathbb{R}$. Notatie:

$$z = a + bj \quad (2.1)$$

$$\Re\{z\} = a \quad \Im\{z\} = b \quad (2.2)$$

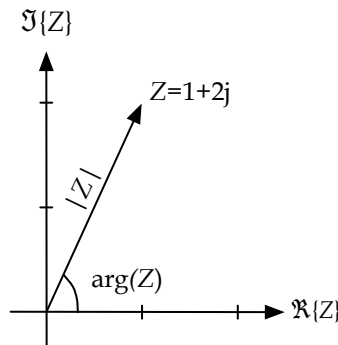
Representatie

Een complex getal kan ook worden voorgesteld als een vector in het **complex vlak** (Argand¹-diagram) met een reële en complexe as (figuur 2.1).

Polaire vorm

De **modulus** van dit complexe getal (notatie $|z|$) is de lengte van de vector

¹naar Jean Robert Argand (1768-1822)



Figuur 2.1: Voorbeeld van een Arganddiagram

(vergelijking 2.3). Het **argument** van dit complex getal (notatie $\arg(z)$) is de hoek ten opzichte van de reële as (vergelijking 2.4). In plaats van de $a + bj$ notatie worden complexe getallen soms in polaire vorm genoteerd, zoals het voorbeeld in vergelijking 2.5. Via Euler is ook de notatie in vergelijking 2.6 mogelijk (r is de modulus, φ het argument).

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (2.3)$$

$$\arg(z) = \tan\left(\frac{a}{b}\right) \quad (2.4)$$

$$2 + 2j = \sqrt{8} \angle 45^\circ \quad (2.5)$$

$$z = r e^{j\varphi} \quad (2.6)$$

Vectoren

Definitie en notatie

Een **vector** is een grootheid die uit twee of meer elementen bestaat (een grootheid die uit één element bestaat wordt scalar genoemd). Formeel is een vector een element uit een vector-ruimte, zoals de n -dimensionale Euclidische ruimte \mathbb{R}^n . Een vector kan in verschillende notaties worden gespecificeerd met zijn coördinaten:

$$\begin{aligned} &(v_1, v_2, v_3) \\ &[v_1, v_2, v_3] \quad (\text{rijvector}) \\ &\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (\text{kolomvector}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

Er zijn verschillende notaties om aan te geven dat een bepaalde grootheid een vector is:

$$\mathbf{v}, \underline{v}, \bar{v}, \vec{v}$$

In getypte tekst wordt meestal gebruik gemaakt van vette letters, bij het schrijven met de hand is de laatste notatie gebruikelijker. Hier wordt de notatie \vec{v} gebruikt. Eenheidsvectoren (vectoren met lengte één) worden genoteerd als: $\hat{\mathbf{v}}$ of kortweg \hat{v} .

Matrices

Stelsels van lineaire vergelijkingen

Het aantal oplossingen van elk willekeurig stelsel van lineaire vergelijkingen bedraagt 0, 1 of oneindig. Een dergelijk stelsel wordt als volgt in **matrixnotatie** omgeschreven:

$$\text{Stelsel} \rightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -4x_1 + 8x_2 - 3x_3 = 2 \\ 2x_2 - 8x_3 = -8 \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\text{coëfficiëntenmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

$$\text{toegevoegde matrix} \rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \end{array} \right] \quad (2.10)$$

Met de toegevoegde matrix kan het stelsel systematisch worden opgelost door deze met behulp van rij-operaties eerst in **trapvorm (standaard rijvorm)** en vervolgens in **gereduceerde trapvorm (kanonieke rijvorm)** om te schrijven. Zie voor het reduceren van een matrix pagina 49.

Vormen van matrices

Een matrix is in standaard rijvorm als aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

1. Alle rijen die niet enkel nullen bevatten staan boven elke nulrij.
2. Ieder eerste getal ongelijk aan nul in een rij staat verder naar rechts dan die in de rij erboven.
3. Alle plaatsen in de kolom onder een eerste getal in een rij ongelijk aan nul, bevatten nullen.

Een matrix is in kanonieke rijvorm als *bovendien* aan de volgende voorwaarden wordt voldaan:

4. Ieder eerste getal ongelijk aan nul in een rij is een 1.
5. Ieder eerste getal ongelijk aan nul in een rij is het enige getal in de kolom waarin hij staat dat ongelijk is aan 0.

Iedere toegevoegde matrix is rij-equivalent met precies één matrix in kanonieke rijvorm. Een positie in een matrix waarop in de rij-equivalente matrix in kanonieke rijvorm een 1 staat als enig getal ongelijk aan nul in de kolom waarin hij staat, wordt **pivotpositie** genoemd. De bijbehorende kolom heet **pivotkolom** en een getal op een pivotpositie heet een **pivot**.

Wanneer de toegevoegde matrices van twee lineaire systemen rij-equivalent zijn, hebben de bijbehorende stelsels dezelfde oplossingsverzameling. Een toegevoegde matrix heet **consistent** als de laatste kolom geen pivotkolom is. Een stelsel dat bij een niet-consistente matrix hoort, heeft geen oplossingen. Een consistente matrix heeft precies 1 oplossing als elke kolom, behalve de laatste, een pivotkolom is. In het andere geval zijn er oneindig veel oplossingen, waarbij het aantal vrije variabelen gelijk is aan het aantal niet-pivotkolommen, waarbij de laatste niet is meegeteld.

Operaties

Volgorde

De volgorde van bewerkingen is door veel mensen geleerd met de de foutieve ezelsbrug:

Meneer van Dale wacht op antwoord.

Daarop is maar een reactie mogelijk:

Hé, weg met die vreemde achterhaalde onzin!

1. **Haakjes**
2. **Worteltrekken**
3. **Machtsverheffen**
4. **Delen en Vermenigvuldigen**
(in volgorde zoals het er staat)
5. **Aftrekken en Optellen**
(in volgorde zoals het er staat)

Behalve dat meneer van Dale niet voorziet in sommen met haakjes, geeft die ezelsbrug in bepaalde gevallen een foutief antwoord:

- $\sqrt{9} \cdot 4 = 12$ (“Meneer van Dale” zou hier 6 geven.)
- $12 \div 3 \cdot 2 = 8$ (“Meneer van Dale” zou hier 2 geven.)
- $13 - 7 + 2 = 8$ (“Meneer van Dale” zou hier 4 geven.)

Basis-operaties

Aritmische operaties

$$a(b + c) = ab + ac \quad (2.11)$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} \quad (2.12)$$

$$\frac{a + c}{b} = \frac{a}{b} + \frac{c}{b} \quad (2.13)$$

$$\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{\left(\frac{c}{d}\right)} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc} \quad (2.14)$$

Exponenten en wortels

$$x^m x^n = x^{m+n} \quad (2.15)$$

$$\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n} \quad (2.16)$$

$$(x^m)^n = x^{mn} \quad (2.17)$$

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n} \quad (2.18)$$

$$(xy)^n = x^n y^n \quad (2.19)$$

$$\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (2.20)$$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad (2.21)$$

$$x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m \quad (2.22)$$

$$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} \quad (2.23)$$

$$\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (2.24)$$

Factoriseren van speciale polynomen

$$x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) \quad (2.25)$$

$$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2) \quad (2.26)$$

$$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) \quad (2.27)$$

Binomisch theorema

$$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \quad (2.28)$$

$$(x - y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 \quad (2.29)$$

$$(x + y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \quad (2.30)$$

$$(x - y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3 \quad (2.31)$$

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{n-k} y^k \quad (2.32)$$

$$\text{met } \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad (2.33)$$

ABC-formule

als $ax^2 + bx + c = 0$, dan geldt: $x = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$ met $D = b^2 - 4ac$. D Wordt de **discriminant** genoemd. Als $D > 0$ dan heeft de vergelijking twee oplossingen en zijn deze reëel, als $D = 0$ dan heeft de vergelijking precies één oplossing en is deze reëel en als $D < 0$ heeft de vergelijking twee oplossingen en zijn deze complex.

Ontbinden in factoren

Het ontbinden van een getal in factoren is uniek en wordt als volgt gedaan:

1. zoek het kleinste priemgetal waardoor het getal deelbaar is;
2. indien gevonden: deel het getal daardoor, indien niet gevonden: klaar.

Voorbeelden:

$$20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \quad (2.34)$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \quad (2.35)$$

Grootste gemene deler

De **grootste gemene deler** van twee getallen a en b is op verschillende manieren te berekenen.

Men kan a en b in factoren ontbinden en vervolgens de gemeenschappelijke factoren met elkaar vermenigvuldigen. Voorbeeld:

$$\begin{aligned} a = 20 &= 2 \cdot 2 \cdot 5 \\ b = 30 &= 2 \cdot 3 \cdot 5 \\ 2 \cdot \cdot 5 &= \underbrace{10}_{\text{GGD}} \end{aligned} \quad (2.36)$$

Als er geen gemeenschappelijke factoren zijn is de grootste gemene deler 1.

Een andere methode is om een staartdeling te maken van het grootste van de twee getallen door het kleinste, en vervolgens met het kleinste en de rest hetzelfde te doen totdat de rest nul is. Voorbeelden:

$$\begin{array}{r} \begin{array}{r} 20/30 \setminus 1 \\ \underline{20} \\ 10/20 \setminus 2 \\ \underline{20} \\ \text{GGD } \frac{20}{0} \end{array} \quad \begin{array}{r} 60/84 \setminus 1 \\ \underline{60} \\ 24/60 \setminus 2 \\ \underline{48} \\ 12/24 \setminus 2 \\ \underline{24} \\ \text{GGD } \frac{24}{0} \end{array} \end{array}$$

De deler van de laatste staartdeling is dan de grootste gemene deler.

Kleinste gemene veelvoud

Het kleinste gemene veelvoud van twee getallen a en b is als volgt met de grootste gemene deler te berekenen:

$$\text{KGV}(a, b) = \frac{a \cdot b}{\text{GGD}(a, b)} \quad (2.37)$$

Dit is bijvoorbeeld bruikbaar bij het berekenen van de gemeenschappelijke periode van twee periodieke functies met periodes a en b .

Operaties op complexe getallen

De **complex geconjugeerde** van een complex getal $z = a + bj$ (notatie \bar{z}) is gedefinieerd als $a - bj$ (gespiegelde over de reële as). Voor complex geconjugeerden geldt:

$$\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w} \quad \overline{zw} = \bar{z} \bar{w} \quad \overline{z^n} = \bar{z}^n \quad (2.38)$$

Het optellen en aftrekken van complexe getallen gaat als met vectoren: de reële en imaginaire delen van beide getallen worden onafhankelijk opgeteld of afgetrokken. Als we in ogenschouw nemen dat $j^2 = -1$, gaat vermenigvuldigen als volgt:

$$(a + bj)(c + dj) = ac + adj + cbj + bdj^2 = (ac - bd) + (ad + cb)j \quad (2.39)$$

Om te delen worden eerst zowel de teller als de noemer vermenigvuldigd met de complex geconjugeerde van de noemer, waardoor er geen term met j meer in de noemer staat.

$$\frac{a + bj}{c + dj} = \frac{a + bj}{c + dj} \cdot \frac{c - dj}{c - dj} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)j}{c^2 + d^2} = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}j \quad (2.40)$$

In polaire vorm kan ook vermenigvuldigd en gedeeld worden en wel door de moduli te vermenigvuldigen dan wel te delen en de argumenten op te tellen dan wel af te trekken.

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) - j \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \quad (2.41)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) - j \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \quad (2.42)$$

Machtsverheffen gaat volgens de stelling van **De Moivre**¹ voor positieve hele n als weergegeven in vergelijking 2.44. We moeten dus machtsverheffen met de modulus en het argument vermenigvuldigen. Worteltrekken in de n -de macht levert n verschillende wortels op volgens vergelijking 2.45.

$$z = r(\cos \varphi + j \sin \varphi) \quad (2.43)$$

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + j \sin n\varphi) \quad (2.44)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) + j \sin \left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \right) \\ \text{met } k = 0, 1, \dots, n - 1 \quad (2.45)$$

¹Abraham De Moivre (1667 - 1754)

Complexe exponenten e^z worden als volgt berekend:

$$e^{jb} = \cos b + j \sin b \tag{2.46}$$

$$e^{-jb} = \cos b - j \sin b \tag{2.47}$$

$$\text{(dus)} \quad \frac{1}{2} (e^{j\varphi} + e^{-j\varphi}) = \cos \varphi \tag{2.48}$$

$$e^a + jb = e^a (\cos b + j \sin b) \tag{2.49}$$

Gamma-functie

De **gamma-functie** (notatie $\Gamma(z)$) breidt de **faculteitsoperatie** uit naar complexe en gebroken getallen.

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \tag{2.50}$$

z	-2	$-1\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	2	$2\frac{1}{2}$	3	$3\frac{1}{2}$	4
$\Gamma(z)$	-	$\frac{4\sqrt{\pi}}{3}$	-	$-2\sqrt{\pi}$	-	$1! = 1$	$\frac{4\sqrt{\pi}}{4}$	$2! = 2$	$\frac{15\sqrt{\pi}}{8}$	$3! = 6$

Verder gelden de volgende rekenregels:

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \tag{2.51}$$

$$\Gamma(1 - z)\Gamma(z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{2.52}$$

$$\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) = 2^{1-2z} \sqrt{\pi}\Gamma(2z) \tag{2.53}$$

De volgende benadering is voor z met $\Re(z) > 8$ accuraat tot 8 decimalen (de term tussen rechte haken kan worden toegevoegd voor extra nauwkeurigheid):

$$\Gamma(z) \cong \sqrt{\frac{2\pi}{z}} \left(\frac{z}{e} \sqrt{z \sinh \frac{1}{z} \left[+ \frac{1}{810z^6} \right]} \right)^z \tag{2.54}$$

Operaties op verzamelingen

Symbool	Naam (uitspraak)	Definitie
\cup	Vereniging, <i>union</i> (... verenigd met ...)	$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ of } x \in B\}$
$-$	Uitsluiting (... behalve ...)	$A - B = \{x \in A : x \notin B\}$
\cap	Doorsnijding, <i>intersection</i> (... doorsneden met ...)	$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ en } x \in B\}$
$\bar{\quad}$ of \prime	Complement	$A' = \{x \in U : x \notin A\}$

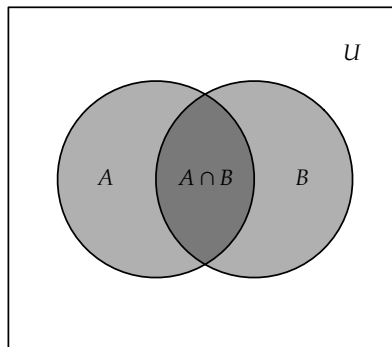
De wetten van De Morgan¹ zijn:

$$\begin{aligned} (A \cup B)' &= A' \cap B' & A - (B \cup C) &= (A - B) \cap (A - C) \\ (A \cap B)' &= A' \cup B' & A - (B \cap C) &= (A - B) \cup (A - C) \end{aligned}$$

Om verbanden tussen verzamelingen aan te geven bestaat er het begrip 'deelverzameling': een verzameling A heet een deelverzameling van B als alle elementen van A ook in B voorkomen (notatie $A \subseteq B$, vroeger $A \subset B$). Een verzameling A heet een *echte* deelverzameling van B als A een deelverzameling van B terwijl $A \neq B$ (notatie $A \subset B$, vroeger $A \subsetneq B$). Om verbanden tussen verzamelingen inzichtelijk te maken bestaan er de zogenaamde Venn-diagrammen². Een exemplarisch Venn-diagram is weergegeven in figuur 2.2.

¹naar Augustus de Morgan (1806-1871)

²naar John Venn (1834-1923)



Figuur 2.2: Voorbeeld van een Venndiagram

Operaties op vectoren

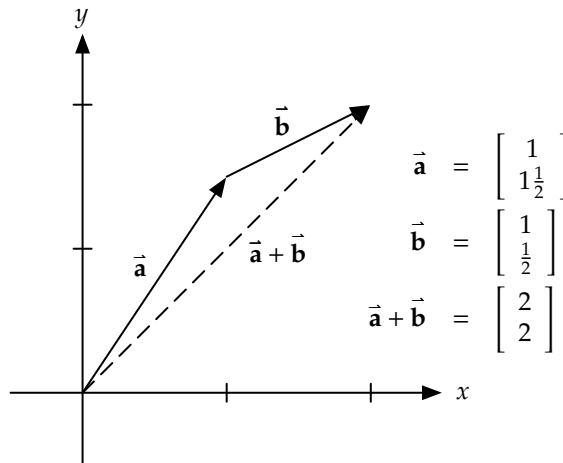
Optelling

- $\vec{A} + \vec{B} = \vec{B} + \vec{A}$ (commutatief)
- $(\vec{A} + \vec{B}) + \vec{C} = \vec{A} + (\vec{B} + \vec{C})$ (distributief)
- $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

In Carthesische vorm (componentsgewijs):

$$\vec{A} + \vec{B} = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_x + B_x \\ A_y + B_y \\ A_z + B_z \end{bmatrix} \quad (2.55)$$

De grafische interpretatie van een vectoroptelling is weergegeven in figuur 2.3.



Figuur 2.3: Grafische weergave van een optelling van vectoren

Scalarvermenigvuldiging

$$\alpha \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \alpha\vec{A} + \alpha\vec{B}$$

In Carthesische vorm: (componentsgewijs)

$$\alpha \cdot (\vec{A} + \vec{B}) = \begin{bmatrix} \alpha A_x \\ \alpha A_y \\ \alpha A_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha B_x \\ \alpha B_y \\ \alpha B_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha(A_x + B_x) \\ \alpha(A_y + B_y) \\ \alpha(A_z + B_z) \end{bmatrix} \quad (2.56)$$

Inwendig product

Voor het inproduct (ook **puntvermenigvuldiging**) geldt:

- $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \cos(\theta)$ met $\theta =$ de hoek tussen \vec{A} en \vec{B} .
- $\vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{A}$ (commutatief)
- $\vec{A} \cdot (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \vec{C}$ (distributief)
- $\vec{A} \cdot \vec{A} = |\vec{A}|^2$

In Carthesische vorm:

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = (A_x \cdot B_x) + (A_y \cdot B_y) + (A_z \cdot B_z) \text{ (componentsgewijs, dan optellen)}$$

Uitwendig product

Voor het uitproduct (ook **kruisproduct** of **vectorproduct**) geldt:

- $\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin(\theta) \cdot \hat{\mathbf{n}}$ met $\theta =$ de hoek van \vec{A} naar \vec{B} en $\vec{A} \perp \hat{\mathbf{n}} \perp \vec{B}$, volgens de rechterhandregel.
- $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = (\vec{A} \times \vec{B}) + (\vec{A} \times \vec{C})$ (distributief)
- $\vec{B} \times \vec{A} = -\vec{A} \times \vec{B}$ (niet commutatief)

In Carthesische vorm:

$$\vec{A} \times \vec{B} = \det \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{x}} & \hat{\mathbf{y}} & \hat{\mathbf{z}} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{bmatrix}$$

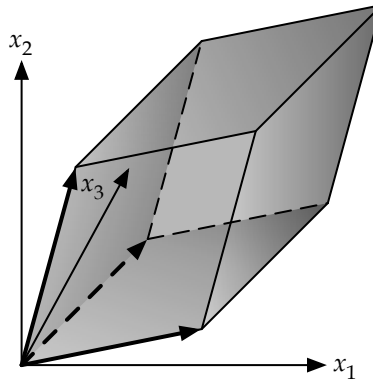
Het resultaat van een kruisproduct is een vector, waarvan de richting ($\hat{\mathbf{n}}$) gevonden wordt door middel van de **rechterhandregel**: Maak je rechterhand vlak, met vijf vingers in de zelfde richting. Draai nu de duim binnen dit vlak naar buiten, totdat deze een rechte hoek met de wijsvinger maakt. Buig nu gezamenlijk de gestrekte middel-, ringvinger en pink, totdat deze een hoek θ met de wijsvinger maakt. Wanneer nu de hand zo gemaneuvreerd wordt dat de wijsvinger in de richting van de vector vóór het \times -teken wijst (hier \vec{A}) en de middelvinger in de richting van de andere vector, wijst de duim in de richting van $\hat{\mathbf{n}}$. De bij sommigen bekende **kurkentrekkerregel** geeft hetzelfde resultaat.

Scalar triple-product

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = -\vec{C} \cdot (\vec{B} \times \vec{A}) = -\vec{A} \cdot (\vec{C} \times \vec{B}) = -\vec{B} \cdot (\vec{A} \times \vec{C}) =$$

$$\det \begin{bmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Het scalar triple-product geeft de inhoud van een **parallelepipedum**, gedefinieerd door drie vectoren, zoals geïllustreerd in figuur 2.4.



Figuur 2.4: Een parallelepipedum gedefinieerd door drie vectoren

Vector triple-product

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B}(\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C}(\vec{A} \cdot \vec{B}) \quad (2.58)$$

Door toepassing van deze eigenschap (de **BAC-CAB-regel**) kan elk meervoudig vectorproduct worden teruggebracht tot een som waarin elke term ten hoogste één uitwendig product bevat.

Operaties op matrices

Vegen

Het proces van reduceren van een matrix wordt **vegen** of **Gauss-eliminatie** genoemd. Matrices die door middel van rij-operaties uit elkaar volgen, worden **rij-equivalent** genoemd. We kennen de volgende drie **rij-operaties**:

1. Verwisseling van twee rijen
2. Vermenigvuldiging van een rij met een scalar
3. Vervanging van een rij door de som van die rij en een (veelvoud van) een andere rij

$$\begin{aligned}
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & -3 & 2 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \end{array} \right] \xrightarrow{(1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -8 & -8 \\ -4 & 8 & -3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(2)} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ -4 & 8 & -3 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \text{ (standaard) } \xrightarrow{(3)} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \xrightarrow{(3)} \\
 & \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right] \text{ (kanoniek) } \tag{2.59}
 \end{aligned}$$

Oplossen van een lineair stelsel met matrices

De oplossing van de voorbeeldmatrix 2.10 is als volgt te berekenen. Het antwoord kan eenvoudig gecontroleerd worden door het in te vullen in vergelijking 2.8:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -8 \end{bmatrix} \tag{2.60}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

De **regel van Cramer** geeft een oplossing voor vergelijking 2.63 volgens vergelijking 2.64, waarbij $\det(A_i(\vec{\mathbf{b}}))$ gedefinieerd is als de matrix A , waarbij $\vec{\mathbf{b}}$ voor de i -de kolom in de plaats is gezet.

$$A\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \quad (2.63)$$

$$x_i = \frac{\det(A_i(\vec{\mathbf{b}}))}{\det(A)} \quad (2.64)$$

Rekenregels voor matrices

Optellen en vermenigvuldigen

Voor matrices gelden de volgende rekenregels:

$$A + B = B + A \quad (2.65)$$

$$(A + B) + C = A + (B + C) \quad (2.66)$$

$$A + 0 = A \quad (2.67)$$

$$r \cdot (A + B) = r \cdot A + r \cdot B \quad (2.68)$$

$$(r + s) \cdot A = r \cdot A + s \cdot A \quad (2.69)$$

$$r \cdot (s \cdot A) = (r \cdot s) \cdot A \quad (2.70)$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} A\vec{\mathbf{b}}_1 & \dots & A\vec{\mathbf{b}}_n \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C \quad (2.72)$$

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \quad (2.73)$$

$$(B + C) \cdot A = B \cdot A + C \cdot A \quad (2.74)$$

$$r(A \cdot B) = (r \cdot A) \cdot B = A \cdot (r \cdot B) \quad (2.75)$$

$$A^k = A \cdot A \dots A \quad (2.76)$$

$$A \cdot B \neq B \cdot A \quad (2.77)$$

$$A \cdot B = A \cdot C \not\Rightarrow B = C \quad (2.78)$$

$$A \cdot B = 0 \not\Rightarrow A = 0 \vee B = 0 \quad (2.79)$$

Het product van een matrix en een vector wordt gedefinieerd volgens vergelijking 2.80. De beide vergelijkingen in 2.81 hebben dan ook dezelfde oplossingsverzameling, waaruit blijkt dat er slechts een oplossing is als $\vec{\mathbf{b}}$ een lineaire combinatie is van de kolommen van A . Als $\vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$ wordt vergelijking 2.81 **homogeen** genoemd. Een homogene vergelijking heeft altijd de triviale oplossing $\vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ en slechts ook niet-triviale oplossingen als er een of meer vrije variabelen in de vergelijking zijn. Als slechts de triviale oplossing bestaat, heten de kolommen van A **lineair onafhankelijk**.

In het andere geval **lineair afhankelijk**. Lineaire afhankelijkheid duidt erop dat een van de vectoren gevormd kan worden door een som van (veelvouden van) de andere vectoren. Een verzameling vectoren is in ieder geval lineair afhankelijk als de dimensie van elke vector lager is dan het aantal vectoren in de verzameling of als de nulvector $\vec{0}$ deel uitmaakt van de verzameling.

$$A\vec{x} \equiv \begin{bmatrix} \vec{a}_1 & \vec{a}_2 & \dots & \vec{a}_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n \quad (2.80)$$

$$A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow x_1\vec{a}_1 + \dots + x_n\vec{a}_n = \vec{b} \quad (2.81)$$

Matrix-specifieke operaties

De **determinant** ($\det(A)$ of $|A|$), die alleen voor een $n \times n$ -matrix bestaat, wordt als volgt recursief gevonden:

- 2×2 -matrix:

$$\det \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = a \cdot d - b \cdot c \quad (2.82)$$

- $n \times n$ -matrix:

1. Kies een rij of kolom in de matrix.
2. Bepaal het product van elk van de getallen in deze rij of kolom met zijn **cofactor**. Dit is de determinant van de matrix die overblijft wanneer de rij én de kolom waarin dit getal zich bevindt, wordt weggenomen.
3. Vermenigvuldig de producten uit getallen waarvan de som van het rijnummer en het kolomnummer oneven is met -1.
4. Sommeer de gevonden resultaten.

Voor grotere matrices neemt de hoeveelheid werk voor het recursief berekenen van de determinant explosief toe. In die gevallen kan de directe methode de voorkeur hebben:

1. Breng de matrix in standaard rijvorm.
2. Vermenigvuldig de getallen in de hoofddiagonaal (van linksboven naar rechtsonder).
3. Als de oorspronkelijke matrix geen standaard rijvorm had: verdisconteer het effect van rij-operaties van 1. op de determinant. Rij-equivalente matrices hebben *niet* per definitie een gelijke determinant!
Als $A \sim B$ volgens ... (zie pagina 50)

- ... verwisseling, dan geldt $\det(B) = -\det(A)$
- ... vermenigvuldiging (van een rij uit A met k), dan geldt $\det(B) = k \cdot \det(A)$
- ... vervanging, dan geldt $\det(A) = \det(B)$.

Verder geldt $\det(AB) = (\det(A)) \cdot (\det(B))$.

De **getransponeerde** van een matrix (A^T) wordt bepaald door te spiegelen in de diagonaal van linksboven naar rechtsonder. Iedere rij wordt een kolom en iedere kolom wordt een rij. Dus: rij 1 wordt kolom 1 enzovoorts. De volgende eigenschappen gelden:

- $(A^T)^T = A$
- $(A + B)^T = A^T + B^T$
- $r(A^T) = (rA)^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$

Voor het berekenen van de **klassieke bijgevoegde** ($\text{adj}(A)$) moet de **cofactor**-matrix gemaakt worden, waar vervolgens de getransponeerde van wordt genomen. De cofactormatrix maak je door elk element te vervangen door de determinant van de matrix die overblijft wanneer je de rij en de kolom van het gekozen element wegstreept. Hierbij moet de gevonden determinant voor getallen waarbij de som van het rijnummer en het kolomnummer oneven is met -1 vermenigvuldigd worden. Uiteindelijk werkt het dan als volgt:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -4 & 8 & -3 \\ 0 & 2 & -8 \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

Het eerste element van de cofactor matrix is dan gelijk aan:

$$\begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 2 & -8 \end{vmatrix} = -58 \quad (2.84)$$

Uiteindelijk wordt de cofactor matrix dan:

$$\text{Cofactormatrix}(A) = \begin{bmatrix} -58 & -35 & -16 \\ -14 & -9 & 0 \\ -14 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

en de classical adjoint (de getransponeerde cofactormatrix):

$$\text{adj}(A) = \begin{bmatrix} -58 & -14 & -14 \\ -35 & -9 & -1 \\ -16 & -0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.86)$$

Er zijn twee manieren om de **inverse** van een matrix te verkrijgen. Niet iedere matrix is inverteerbaar, zie pagina 54.

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \text{adj}(A) \quad (2.87)$$

$$A \cdot A^{-1} = I \quad (2.88)$$

(I is de **eenheidsmatrix**, de matrix die alleen maar bestaat uit enen op de diagonaal van linksboven naar rechtsonder en verder uit nullen). Dit kun je gebruiken door de matrices A en I achter elkaar te zetten in een toegevoegde matrix en vervolgens matrix A door middel van rij-operaties naar I te veranderen. Als dat lukt, is matrix I veranderd in de inverse van matrix A .

Voor de **eigenwaarden** λ_n van A geldt vergelijking 2.89. Men vindt de eigenwaarden van A door de vergelijking $\det(A - \lambda \cdot I) = 0$ op te lossen voor λ .

$$A \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} \quad (2.89)$$

Bij iedere eigenwaarde hoort ook een **eigenvector**. Een eigenvector vind je door de vergelijking $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ op te lossen. De gevonden waarden van \vec{x} zijn de eigenvectoren.

Een **steady-statevector** vind je door de vergelijking $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{x}$ op te lossen. De gevonden waarde van \vec{x} is de steady-statevector.

Inverteerbare-matrixtheorie

De volgende stellingen zijn equivalent. Dat wil zeggen dat als één van de stellingen waar is, elk van de stellingen waar is en omgekeerd. Hierin is A een $n \times n$ -matrix.

- A is een **inverteerbare matrix**.
- A is **rij-equivalent** met de $n \times n$ -**eenheidsmatrix** (Een matrix met overal nullen, behalve op de diagonaal van linksboven naar rechtsonder).
- A heeft n **pivotpisities**.
- De vergelijking $A\vec{x} = \vec{0}$ heeft alleen de triviale oplossing $\vec{x} = \vec{0}$.
- De kolommen van A vormen een **lineair onafhankelijke set**.
- De **lineaire transformatie** $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ is **bijjectief**.
- De vergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$ heeft tenminste 1 oplossing $\forall \vec{b} \in \mathbb{R}^n$
- De kolommen van A spannen \mathbb{R}^n op.
- De lineaire transformatie $\vec{x} \mapsto A\vec{x}$ beeldt \mathbb{R}^n af op \mathbb{R}^n .

- Er bestaat een $n \times n$ -matrix C zodat $CA = I$.
- Er bestaat een $n \times n$ -matrix D zodat $AD = I$.
- A^T is een inverteerbare matrix.
- $\det(A) \neq 0$.
- De kolommen van A vormen een voor \mathbb{R}^n .
- $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^n$.
- $\dim \text{Col}(A) = n$.
- $\text{rank}(A) = n$.
- $\text{Nul}(A) = \vec{0}$.
- $\dim \text{Nul}(A) = 0$.

Ruimte

Een **lineaire deelruimte** van \mathbb{R}^n is een verzameling H in \mathbb{R}^n met de volgende drie eigenschappen:

$$\vec{0} \in H \quad (2.90)$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \in H \quad \forall \vec{u}, \vec{v} \in H \quad (2.91)$$

$$c\vec{u} \in H \quad \forall \vec{u} \in H, c \in \mathbb{R} \quad (2.92)$$

Het **opspannel** van een matrix A ($\text{span}(A)$) is de lineaire deelruimte waarvoor geldt dat elke vector \vec{b} die in deze deelruimte ligt voor een of andere \vec{x} voldoet aan vergelijking $A\vec{x} = \vec{b}$. De **kolomruimte** van een matrix A ($\text{col}(A)$) is de verzameling van alle lineaire combinaties van de kolommen van A . De **nulruimte** van een matrix A ($\text{Nul}(A)$) is de verzameling van alle oplossingen van de homogene vergelijking $A\vec{x} = \vec{0}$. Een **basis** voor een deelruimte H van \mathbb{R}^n is een lineair onafhankelijke verzameling in H die H opspant. De pivotkolommen van een matrix vormen een basis voor de kolomruimte van deze matrix. Volgens het **basisstheorema** hebben alle bases voor een zekere deelruimte een gelijk aantal elementen.

De **dimensie** (\dim) van een lineaire deelruimte H is het aantal vectoren in elke basis van deze deelruimte. Daarbij is de dimensie van de deelruimte $\vec{0}$ per definitie 0. Als H door een eindig aantal vectoren kan worden opgespannen is H **eindig dimensionaal**. Zoniet, dan is H **oneindig dimensionaal**. De **rang** van een matrix A ($\text{rank}(A)$) is de dimensie van de kolomruimte van A : $\text{rank}(A) = \dim \text{col}(A)$. Het **rangtheorema** stelt dat als een matrix A n kolommen heeft, dan geldt: $\text{rank}(A) + \dim \text{Nul}(A) = n$. De **rijruimte** van een matrix is de ruimte die wordt opgespannen door haar rijvectoren. Rij-equivalente matrices hebben een gelijke rijruimte.

Funcities

Definitie en notatie

Een **functie**

$$f : A \rightarrow B \tag{2.93}$$

voegt aan elk element in A (het **domein**) een element uit B (het **codomein**) toe. Het bereik van f (genoteerd als $f(A)$) is de verzameling

$$\{b \in B \mid f(a) = b \text{ voor een zekere } a \in A\} \tag{2.94}$$

Een functie heet **surjectief** als er bij elk element uit het codomein minstens één element uit het domein hoort (het bereik omvat dan het gehele codomein). Een functie heet **injectief** als er bij elk element uit het codomein ten hoogste één element uit het domein hoort. Een functie wordt **bijjectief** genoemd als deze zowel injectief als surjectief is (het bereik omvat het gehele codomein en bij elk element uit het bereik hoort juist één element uit het domein). Het een en ander wordt toegelicht in de figuren 2.5, 2.6 en 2.7.

De afbeelding van een functie f van een punt $x \in A$ op B wordt genoteerd als:

$$f(x) \tag{2.95}$$

Het achter elkaar toepassen van functies f en g (spreek uit: f na g) wordt genoteerd als:

$$f \circ g(x) = f(g(x)) \tag{2.96}$$

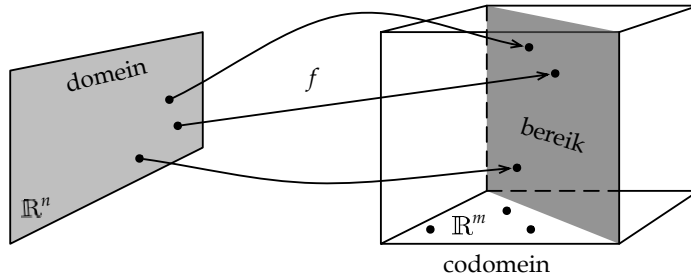
Dit heet dan de **compositie** van de functies g en f . Bij een functie waarvan het domein gelijk is aan het codomein wordt de volgende notatie gebruikt voor een n -voudige compositie van de functie:

$$f^{[n]} = \underbrace{f \circ f \circ \dots \circ f}_{n \text{ keer}} \tag{2.97}$$

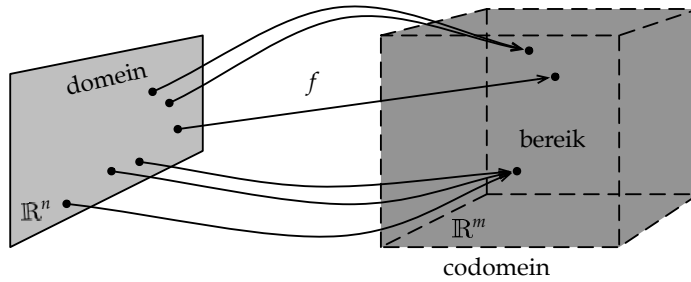
Parameters en variabelen

Het domein van een functie kan meerdimensionaal zijn. We hebben dan een functie van meerdere variabelen, notatie

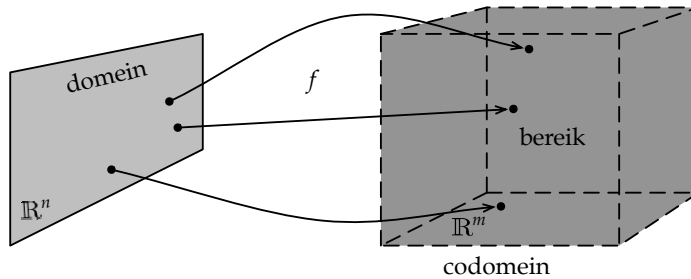
$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{2.98}$$



Figuur 2.5: Een injectieve functie



Figuur 2.6: Een surjectieve functie



Figuur 2.7: Een bijectieve functie

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Een functie kan naast van variabelen ook van parameters (spreek uit: parámeter¹) afhankelijk zijn. Dit zijn minder veranderlijke waarden. Bij het evalueren van een functie worden variabelen in een zeker interval continu doorlopen, terwijl voor parameters enkele afzonderlijke waarden worden gekozen.

Omdat in uitgebreide berekeningen het aantal letters in het alfabet vlug tekort schiet, wordt regelmatig gebruik gemaakt de symbolen in het Griekse alfabet (zie pagina: 3).

Scalars en vectoren

Een functie kan als uitkomst zowel een scalar (enkele waarde uit \mathbb{R} of \mathbb{C}) als een vector (meerdere waarden, \mathbb{R}^n of \mathbb{C}^n) hebben.

Een **vectorfunctie** in \mathbb{R}^3 wordt beschreven door:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}(x, y, z) &= \begin{bmatrix} P(x, y, z) \\ Q(x, y, z) \\ R(x, y, z) \end{bmatrix} \\ &= P(x, y, z)\hat{\mathbf{x}} + Q(x, y, z)\hat{\mathbf{y}} + R(x, y, z)\hat{\mathbf{z}} \\ &= P(x, y, z)\hat{\mathbf{i}} + Q(x, y, z)\hat{\mathbf{j}} + R(x, y, z)\hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (2.99)$$

¹Advies van Genootschap Onze Taal, Den Haag

Vergelijkingen

Gelijkheden

In een vergelijking met het =-teken worden twee uitdrukkingen gelijk gesteld. Door aan beide zijden van de vergelijking dezelfde manipulaties uit te voeren kan zo'n vergelijking worden opgelost naar de waarde voor een bepaalde variabele. Aandachtspunten:

1. houd altijd voor ogen naar welke variabele opgelost moet worden;
2. probeer de variabelen naar links en de constanten naar rechts te werken;
3. pas zonodig **scheiding van variabelen** toe;

$$\begin{aligned}
 u_o &= -A\beta(u_o - u_g) \\
 u_o &= -A\beta u_o + A\beta u_g \\
 u_o(1 + A\beta) &= A\beta u_g & (2.100) \\
 u_o &= \frac{A\beta}{1 + A\beta} u_g
 \end{aligned}$$

4. denk eraan dat *absolute waarden* en *wortels* meestal twee mogelijke oplossingen hebben.

$$\begin{aligned}
 |x| + 2 &= 3 & (x + 2)^2 &= 16 \\
 |x| &= 1 & x + 2 = 4 &\vee x + 2 = -4 & (2.101) \\
 x &= \pm 1 & x = 2 &\vee x = -6
 \end{aligned}$$

Ongelijkheden

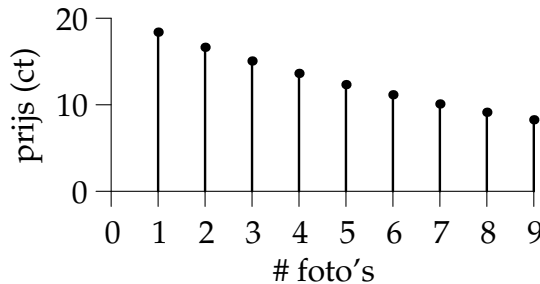
Ongelijkheden (aangegeven met $<$, $>$, \leq , \geq , \ll en \gg) kunnen voor het oplossen net als gelijkheden worden behandeld. Let er wel op dat bij delen door of vermenigvuldigen met een negatief getal de ongelijkheid omwisselt. Om fouten te voorkomen is het raadzaam om een ongelijkheidsschema te maken. Geef daarin de intervallen aan waar de ongelijkheid waar is en waar onwaar.

Grafieken

Grafieken worden gebruikt om analytische- of meetgegevens op een inzichtelijke manier weer te geven.

Scalars

Een scalarfunctie van één variabele kan eenvoudig in een assenstelsel worden weergegeven. De onafhankelijke variabele (x , de tijd, plaats, ...) staat op de horizontale as en de afhankelijke variabele ($f(x)$, y , amplitude, temperatuur, ...) staat op de verticale as. De functie wordt op een aantal waarden van de onafhankelijke variabele geëvalueerd en ingetekend. Afhankelijk van de aard van de functie moet er een rechte of vloeiende lijn door de punten worden getekend. Als de onafhankelijke variabele alleen discrete waarden aan kan nemen, worden de waarden als gesloten rondjes ingetekend, met een lijn vanaf de horizontale as ernaartoe. Waar een functie niet bestaat wordt geen lijn getekend, discontinuïteiten worden met een open rondje (waarde hoort niet bij het domein) of met een gesloten rondje (waarde hoort wel bij het domein) aangegeven.



Vectoren

Bij het construeren van vectoren in een geometrische interpretatie worden vaak pijlen gebruikt vanuit de oorsprong. Bij het optellen kunnen de vectoren ook kop-staart worden gelegd. Dit is weergegeven in figuur 2.3 op pagina 47. Bij het tekenen van grafieken van vectorvelden, worden op een zeker raster van punten pijltjes getekend. Deze geven dan in elk punt de richting en grootte van het veld aan. Bij driedimensionale velden waarbij het veld 'het papier in' of 'het papier uit' gericht is, worden symbolen gebruikt: een kruisje (\times) gaat het papier in, een punt in een kleine cirkel (\odot) komt het papier uit.

Calculus

Differentiëren

Definitie, notatie

Differentiëren is het proces van bepalen van de afgeleide van een functie. De definitie van de afgeleide van een functie $f(x)$ op een willekeurig punt x is:

$$f'(x) \triangleq \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \equiv \lim_{\chi \rightarrow x} \frac{f(\chi) - f(x)}{\chi - x} \quad (2.102)$$

Equivalentenotaties voor afgeleide zijn:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = Df(x) = D_x f(x) \quad (2.103)$$

Daarin worden D en d/dx differentiatieoperatoren genoemd. Voor tijdafgeleiden wordt ook wel de notatie \dot{f} gebruikt voor $f'(t)$.

Hogere afgeleiden (herhaald differentiëren) worden genoteerd als:

$$f''(x) = f^{(2)}(x) = \frac{d^2 f}{dx^2} \quad f'''(x) = f^{(3)}(x) = \frac{d^3 f}{dx^3} \quad (2.104)$$

Een functie $f(x)$ is differentieerbaar in a als $f'(a)$ bestaat. Een functie $f(x)$ is differentieerbaar in het open interval (a,b) als $f(x)$ differentieerbaar is in elk getal in dat interval. Als $f(x)$ differentieerbaar is in a , dan is $f(x)$ continu in a . Het omgekeerde is echter niet altijd waar.

De raaklijn aan $y = f(x)$ in het punt $(a, f(a))$ is de lijn door het punt $(a, f(a))$, met als helling de afgeleide van f bij a .

$$y = f(a) + (x - a)f'(a) \quad (2.105)$$

Omgekeerd kan de afgeleide van een functie in een zeker punt geometrisch geïnterpreteerd worden als de helling van de raaklijn in dat punt.

Als y een zekere grootheid is en x een andere grootheid, dan is $\frac{dx}{dy}$ de instantane verandering van y ten gevolge van verandering in x . Voor de eenheid geldt:

$$\left[\frac{dy}{dx} \right] = \left[\frac{y}{x} \right] \quad (2.106)$$

Afgeleidetabel

	functie	afgeleide
constant	c	0
multiplicatief	$c \cdot f(x)$	$c \cdot \frac{d}{dx} f(x)$
additief	$f(x) + g(x)$	$\frac{d}{dx} [f(x)] + \frac{d}{dx} [g(x)]$
productregel	$f(x) \cdot g(x)$	$f(x) \cdot \frac{d}{dx} [g(x)] + \frac{d}{dx} [f(x)] \cdot g(x)$
quotiëntregel	$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\frac{f(x) \cdot \frac{d}{dx} [g(x)] - \frac{d}{dx} [f(x)] \cdot g(x)}{[g(x)]^2}$
kettingregel	$f(g(x))$	$\frac{d}{dx} [f(g(x))] \cdot \frac{d}{dx} [g(x)]$
machtregel	x^n	nx^{n-1}

Tabel 2.2: Rekenregels voor afgeleiden

functie	afgeleide	functie	afgeleide
e^x	e^x	$\ln x $	$\frac{1}{x}$
a^x	$a^x \ln(a)$	$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \ln(a)}$

Tabel 2.3: Afgeleiden van exponentiële en logaritmische functies

functie	afgeleide	functie	afgeleide
$\sin(x)$	$\cos(x)$	$\sin^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$	$\cos^{-1}(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\tan(x)$	$\sec^2(x)$	$\tan^{-1}(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$
$\csc(x)$	$-\csc(x)\cot(x)$	$\csc^{-1}(x)$	$-\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\sec(x)$	$\sec(x)\tan(x)$	$\sec^{-1}(x)$	$\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$
$\cot(x)$	$-\csc^2(x)$	$\cot^{-1}(x)$	$-\frac{1}{1+x^2}$

Tabel 2.4: Afgeleiden van (inverse) goniometrische functies

functie	afgeleide	functie	afgeleide
$\sinh(x)$	$\cosh(x)$	$\sinh^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$
$\cosh(x)$	$\sinh(x)$	$\cosh^{-1}(x)$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\tanh(x)$	$\operatorname{sech}^2(x)$	$\tanh^{-1}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\operatorname{csch}(x)$	$-\operatorname{csch}(x)\operatorname{coth}(x)$	$\operatorname{csch}^{-1}(x)$	$-\frac{1}{ x \sqrt{1+x^2}}$
$\operatorname{sech}(x)$	$-\operatorname{sech}(x)\tanh(x)$	$\operatorname{sech}^{-1}(x)$	$-\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$
$\operatorname{coth}(x)$	$-\operatorname{csch}^2(x)$	$\operatorname{coth}^{-1}(x)$	$\frac{1}{1-x^2}$

Tabel 2.5: Afgeleiden van (inverse) hyperbolische functies

Partiële afgeleide

Bij functies van meerdere variabelen is het mogelijk om partiële afgeleiden te berekenen. Door alle variabelen behalve één constant te houden, krijgen we een functie van één variabele, die te differentiëren is. In plaats van d gebruiken we het symbool ∂ :

$$f(x, y, z) = 2yx^2 + y^3 + 2zx \quad (2.107)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 4yx + 2z \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2x^2 + 3y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2x \quad (2.108)$$

In plaats van het symbool $\partial f / \partial x$ wordt ook wel $(\partial f / \partial x)_{y,z}$ gebruikt om te benadrukken dat y en z constant worden gehouden. Het is ook mogelijk om een partiële afgeleide nogmaals af te leiden:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ tweemaal naar } x \text{ afleiden} \quad (2.109)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ eerst naar } x, \text{ dan naar } y \text{ afleiden} \quad (2.110)$$

Voor continue functies is de volgorde van differentiëren niet van belang, zodat er voor f zes verschillende tweede partiële afgeleiden bestaan:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \quad (2.111)$$

Of, in andere notatie (let op de volgorde):

$$f_{xx} \quad f_{yy} \quad f_{zz} \quad f_{yx} \quad f_{zx} \quad f_{zy} \quad (2.112)$$

Tenslotte kunnen we zo de **totale differentiaal** opschrijven:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \quad (2.113)$$

Bovenstaande bewerkingen zijn natuurlijk mogelijk voor functies van een willekeurig aantal variabelen en ook drie- en meervoudig differentiëren is mogelijk.

Maxima en minima

Gegeven een functie $f(x)$ met domein D . De functie heeft een globaal (of absoluut) maximum in punt c , als $f(c) \geq f(x)$ voor alle x in D . Er is een globaal minimum in punt c , als $f(c) \leq f(x)$ voor alle x in D .

De functie heeft een lokaal (of relatief) maximum in punt c als $f(c) \geq f(x)$ voor x nabij c (x in een zeker open interval bevattende c). We spreken van een lokaal minimum in c als $f(c) \leq f(x)$ voor x nabij c .

Volgens Fermat¹ is de afgeleide van een continue functie $f(x)$ in een lokaal maximum of minimum nul, als de afgeleide bestaat. Door de afgeleide op nul te stellen kunnen dus de kritieke punten worden gevonden, die stuk voor stuk een lokaal of globaal minimum of maximum kunnen zijn. Als het domein een gesloten interval is moeten zowel de punten in het domein als op de twee uiteinden in aanmerking worden genomen om globale maxima en minima te vinden.

Voor functies van meerdere variabelen geldt iets dergelijks: als in een punt alle eerste partiële afgeleiden elk óf nul óf zonder waarde zijn, is dit een kritiek punt. Om te bepalen of dit een maximum, een minimum of een zadelpunt is, moet de Hessiaan² in dit punt worden berekend.

Voor een functie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ziet de Hessiaan er zo uit:

$$H(f) = \begin{bmatrix} f_{x_1x_1} & f_{x_1x_2} & \cdots & f_{x_1x_n} \\ f_{x_2x_1} & f_{x_2x_2} & \cdots & f_{x_2x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{x_nx_1} & f_{x_nx_2} & \cdots & f_{x_nx_n} \end{bmatrix} \quad (2.114)$$

De determinant van deze matrix, discriminant of D genoemd kan uitsluitsel geven over de aard van het kritieke punt c :

$D > 0$ en $f_{x_1x_1}(c) > 0$	Lokaal minimum
$D > 0$ en $f_{x_1x_1}(c) < 0$	Lokaal maximum
$D < 0$	Zadelpunt
$D = 0$	Geen uitsluitsel

Om de globale maxima en minima te vinden moeten zowel de minima en maxima op het domein als op de rand worden berekend en vergeleken (minima en maxima kunnen zich immers zowel op het domein als op de rand bevinden).

¹Pierre Fermat (1601-1665)

²naar Ludwig Otto Hesse (1811-1874)

Maxima en minima met randvoorwaarden

Stel dat de kritieke punten van een functie $f(x, y, z)$ moeten worden gevonden, gegeven een randvoorwaarde van de vorm $g(x, y, z) = k$. Dit kan volgens de methode van Lagrange¹; vind alle x, y, z en λ waarvoor geldt:

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \text{ en} \quad (2.115)$$

$$g(x, y, z) = k \quad (2.116)$$

Dit levert vier vergelijkingen op met vier onbekenden (hoewel λ niet per sé opgelost hoeft te worden):

$$f_x = \lambda g_x \quad f_y = \lambda g_y \quad f_z = \lambda g_z \quad g(x, y, z) = k \quad (2.117)$$

Lagrange kan ook worden gebruikt voor meerdere randvoorwaarden (voorbeeld met twee randvoorwaarden $g(x, y, z) = k$ en $h(x, y, z) = c$):

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) + \mu \nabla h(x, y, z) \text{ en} \quad (2.118)$$

$$\begin{aligned} g(x, y, z) &= k \\ h(x, y, z) &= c \end{aligned} \quad (2.119)$$

Bovenstaande methode werkt ook voor functies van een willekeurig ander aantal variabelen. —

Afgeleiden van vectorfuncties

Voor afgeleiden van vectorfuncties gelden de volgende vergelijkingen.

$$\frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt} = \vec{\mathbf{r}}'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\vec{\mathbf{r}}(t+h) - \vec{\mathbf{r}}}{h} \quad (2.120)$$

$$\vec{\mathbf{r}}(t) = \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix} \rightarrow \vec{\mathbf{r}}'(t) = \begin{bmatrix} f'(t) \\ g'(t) \\ h'(t) \end{bmatrix} \quad (2.121)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{\mathbf{u}}(t) + \vec{\mathbf{v}}(t)] = \vec{\mathbf{u}}'(t) + \vec{\mathbf{v}}'(t) \quad (2.122)$$

$$\frac{d}{dt}[c\vec{\mathbf{u}}(t)] = c\vec{\mathbf{u}}'(t) \quad (2.123)$$

$$\frac{d}{dt}[f(t)\vec{\mathbf{u}}(t)] = f'(t)\vec{\mathbf{u}}(t) + f(t)\vec{\mathbf{u}}'(t) \quad (2.124)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{\mathbf{u}}(t) \cdot \vec{\mathbf{v}}(t)] = \vec{\mathbf{u}}'(t) \cdot \vec{\mathbf{v}}(t) + \vec{\mathbf{u}}(t) \cdot \vec{\mathbf{v}}'(t) \quad (2.125)$$

¹Joseph-Louis Lagrange (1736-1813)

$$\frac{d}{dt}[\vec{\mathbf{u}}(t) \times \vec{\mathbf{v}}(t)] = \vec{\mathbf{u}}'(t) \times \vec{\mathbf{v}}(t) + \vec{\mathbf{u}}(t) \times \vec{\mathbf{v}}'(t) \quad (2.126)$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{\mathbf{u}}(f(t))] = f'(t)\vec{\mathbf{u}}'(f(t)) \quad (2.127)$$

Nabla-operator

Gradiënt

Wanneer f een **scalar**-functie van 2 variabelen is, dan is de gradiënt gegeven door vergelijking 2.128. Deze gradient is dus een vector veld in \mathbb{R}^2 . De twee-dimensionale gradiënt van een punt op een berglandschap, waarvan f de hoogte op elk punt (x, y) geeft, is een vector waarvan de richting de richting van de grootste stijging aangeeft (bergop) en de lengte de grootte van die helling. Wanneer f een scalarfunctie van 3 variabelen is, is de gradiënt een vectorveld in \mathbb{R}^3 , gegeven door vergelijking 2.129. Drie-dimensionale gradiënten hebben bijvoorbeeld betekenis bij een volume waarin temperatuur- of dichtheidsverschillen optreden.

$$\nabla(f(x, y)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix} \quad (2.128)$$

$$\nabla(f(x, y, z)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \end{bmatrix} \quad (2.129)$$

Een vectorveld $\vec{\mathbf{F}}$ is een conservatief vectorveld als er een functie f bestaat waarvoor geldt:

$$\vec{\mathbf{F}} = \nabla(f) \quad (2.130)$$

Divergentie

Van een vectorveld $\mathbf{F}(x, y, z) = [F_x, F_y, F_z]$ is de divergentie:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2.131)$$

Wanneer een vectorveld vloeistofstroming voorstelt, kan de divergentie worden gezien als de mate waarin de stof uit een punt weg stroomt.

Rotatie

Van een vectorveld is de rotatie of *curl*:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (2.132)$$

Productregels voor vectorafgeleiden

Gradiënt

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad (2.133)$$

$$\begin{aligned} \nabla(\vec{\mathbf{A}} \cdot \vec{\mathbf{B}}) &= \vec{\mathbf{A}} \times (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) + (\vec{\mathbf{A}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{B}} + \\ &\quad \vec{\mathbf{B}} \times (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) + (\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{A}} \end{aligned} \quad (2.134)$$

Divergentie

$$\nabla \cdot (f\vec{\mathbf{A}}) = f(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}) + \vec{\mathbf{A}} \cdot (\nabla f) \quad (2.135)$$

$$\nabla \cdot (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) = \vec{\mathbf{B}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) - \vec{\mathbf{A}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) \quad (2.136)$$

Rotatie

$$\nabla \times (f\vec{\mathbf{A}}) = f(\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) - \vec{\mathbf{A}} \times (\nabla f) \quad (2.137)$$

$$\begin{aligned} \nabla \times (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) &= (\vec{\mathbf{B}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{A}} + \vec{\mathbf{A}}(\nabla \cdot \vec{\mathbf{B}}) - \\ &\quad (\vec{\mathbf{A}} \cdot \nabla)\vec{\mathbf{B}} - \vec{\mathbf{B}}(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}) \end{aligned} \quad (2.138)$$

Quotiëntregels voor vectorafgeleiden

$$\nabla \left(\frac{f}{g} \right) = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2} \quad (2.139)$$

$$\nabla \cdot \left(\frac{\vec{\mathbf{A}}}{g} \right) = \frac{g(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}) - \vec{\mathbf{A}} \cdot (\nabla g)}{g^2} \quad (2.140)$$

$$\nabla \times \left(\frac{\vec{\mathbf{A}}}{g} \right) = \frac{g(\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) + \vec{\mathbf{A}} \times (\nabla g)}{g^2} \quad (2.141)$$

Tweede vector-afgeleiden

$$\begin{array}{lll}
 \text{Divergentie van een gradient} & \nabla \cdot (\nabla T) & = \nabla^2 T \\
 \text{Rotatie van een gradient} & \nabla \times (\nabla T) & = 0 \\
 \text{Gradient van divergentie} & \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) & \\
 \text{Divergentie van rotatie} & \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) & = 0 \\
 \text{Rotatie van rotatie} & \nabla \times (\nabla \times \vec{v}) & = \nabla(\nabla \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}
 \end{array}$$

(∇^2 wordt de **Laplaceoperator** genoemd)

De Laplacevergelijking

Een **Poissonvergelijking** bestaat uit de **Laplaciaan** (∇^2 of Δ) losgelaten op een scalar of vector:

$$\nabla^2 \mathbf{v}(x, y, \dots) = \mathbf{F}(x, y, \dots). \quad (2.142)$$

De **Laplacevergelijking** wordt nu gevormd door de Laplaciaan van een scalar of vector gelijk aan nul te stellen. Een voorbeeld van een Laplacevergelijking is:

$$\nabla^2 \mathbf{v}(x, y, \dots) = 0 \quad (2.143)$$

De Laplaciaan kan ook in niet-Euclidische ruimtes worden gedefinieerd. In de Minkowski-ruimte wordt de Laplaciaan de **d'Alembertiaan**.

Oplossingen van de Laplacevergelijking zijn **harmonische functies**. Oplossingen in bolcoördinaten kunnen als volgt worden geconstrueerd (in dit voorbeeld doet φ er niet toe):

$$\nabla^2 V(r, \theta) = 0 \quad (2.144)$$

$$V(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \right) P_l(\cos \theta) \quad (2.145)$$

Fundamentele stelling voor gradiënten

De fundamentele stelling van de calculus luidt in vectoriële versie zoals weergegeven in vergelijking 2.147. Als $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$ volgt stelling 2.148.

$$\int_a^b (\nabla T) \cdot d\vec{\mathbf{l}} = T(\vec{\mathbf{b}}) - T(\vec{\mathbf{a}}) \quad (2.147)$$

$$\oint (\nabla T) \cdot d\vec{\mathbf{l}} = 0 \quad (2.148)$$

$$\begin{aligned}
 P_0(x) &= 1 \\
 P_1(x) &= x \\
 P_2(x) &= (3x^2 - 1)/2 \\
 P_3(x) &= (5x^3 - 3x^2)/2 \\
 P_l(x) &= \frac{1}{2^l l!} \left(\frac{d}{dq} \right)^l (q^2 - 1)^l \quad (2.146)
 \end{aligned}$$

Tabel 2.6: Enkele Legendrepolynomen

Primitiveren

Primitiveren is het bepalen van alle functies waarvan een gegeven vergelijking de afgeleide is. Onderstaand is een beknopte primitieventabel gegeven. Voor een uitgebreid overzicht wordt verwezen naar [1]. Een primitieve wordt ook wel **onbepaalde integraal** genoemd.

$$\int u dv = uv - \int v du \quad (2.149)$$

$$\int f(g(x)) \cdot \frac{d}{dx} g(x) dx = \int f(u) du \quad (2.150)$$

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1 \quad (2.151)$$

$$\int \frac{1}{u} du = \ln |u| + C \quad (2.152)$$

$$\int e^u du = e^u + C \quad (2.153)$$

$$\int a^u du = \frac{a^u}{\ln a} + C \quad (2.154)$$

$$\int \sin u du = -\cos u + C \quad (2.155)$$

$$\int \cos u du = \sin u + C \quad (2.156)$$

$$\int \sec^2 u du = \tan u + C \quad (2.157)$$

$$\int \csc^2 u du = -\cot u + C \quad (2.158)$$

$$\int \sec u \tan u du = \sec u + C \quad (2.159)$$

$$\int \csc u \cot u du = -\csc u + C \quad (2.160)$$

$$\int \tan u du = \ln |\sec u| + C \quad (2.161)$$

$$\int \cot u du = \ln |\sin u| + C \quad (2.162)$$

$$\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C \quad (2.163)$$

$$\int \csc u du = \ln |\csc u - \cot u| + C \quad (2.164)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - u^2}} du = \arcsin \frac{u}{a} + C \quad (2.165)$$

$$\int \frac{1}{a^2 + u^2} du = \frac{1}{a} \arctan \frac{u}{a} + C \quad (2.166)$$

$$\int \frac{1}{u \sqrt{u^2 - a^2}} du = \frac{1}{a} \operatorname{arcsec} \frac{u}{a} + C \quad (2.167)$$

$$\int \frac{1}{a^2 - u^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u+a}{u-a} \right| + C \quad (2.168)$$

$$\int \frac{1}{u^2 - a^2} du = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{u-a}{u+a} \right| + C \quad (2.169)$$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

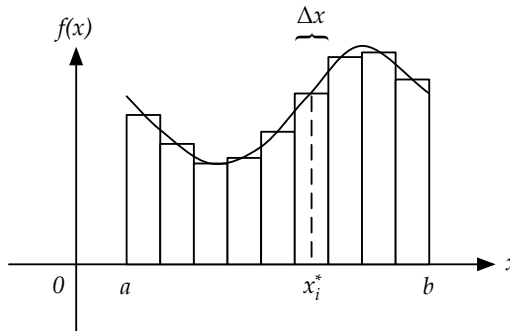
Integreren

Bepaalde integraal

Een bepaalde integraal van een functie f die continu is op het interval $[a, b]$ wordt gedefinieerd volgens vergelijking 2.170. Het interval wordt verdeeld in n subintervallen ter grootte Δx . $x_0 \cdots x_n$ zijn de respectievelijke intervalgrenzen. $x_1^* \cdots x_n^*$ zijn *willekeurige* proefpunten binnen de bijbehorende subintervallen. Merk op dat in de uitkomst van een bepaalde integraal de **dummy-variabele** (in dit geval x) niet voorkomt en daarom door elke willekeurige andere letter vervangen kan worden.

$$\begin{aligned}\Delta x &= \frac{b-a}{n} \\ x_i &= a + i \cdot \Delta x \\ x_i^* &\in [x_{i-1}, x_i]\end{aligned}$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x \quad (2.170)$$



Figuur 2.8: Grafische interpretatie van de Riemann-som

De uitdrukking $\sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x$ wordt **Riemann-som**¹ genoemd. Een grafische interpretatie is weergegeven in figuur 2.8. Wanneer f positief is op $[a, b]$, kan de Riemann-som worden geïnterpreteerd als de som van de oppervlaktes van de benaderende rechthoeken onder de grafiek. Hierdoor kan de bepaalde

¹Bernhard Riemann(1826-1866)

integraal onder deze conditie worden opgevat als de oppervlakte onder de curve $y = f(x)$ van a tot b .

Voor de bepaalde integraal gelden de eigenschappen zoals weergegeven in de vergelijkingen 2.171 tot en met 2.181. Vergelijking 2.181 is de **fundamentele stelling** van de calculus en geeft de relatie weer tussen de primitiveren en integreren.

$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx \quad (2.171)$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0 \quad (2.172)$$

$$\int_a^b c dx = c(b - a) \quad (2.173)$$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \quad (2.174)$$

$$\int_a^b c \cdot f(x)dx = c \cdot \int_a^b f(x)dx \quad (2.175)$$

$$\int_a^b [f(x) - g(x)] dx = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx \quad (2.176)$$

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \quad (2.177)$$

$$f(x) \geq 0 | x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad (2.178)$$

$$f(x) \geq g(x) | x \in [a, b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx \quad (2.179)$$

$$m \leq f(x) \leq M | x \in [a, b] \Rightarrow m(b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b - a) \quad (2.180)$$

$$\frac{d}{dx} F(x) = f(x) \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \quad (2.181)$$

De bepaalde integraal van een vectorfunctie wordt gedefinieerd als:

$$\int_a^b \vec{r}(t)dt = \int_a^b \begin{bmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} \int_a^b f(t)dt \\ \int_a^b g(t)dt \\ \int_a^b h(t)dt \end{bmatrix}$$

Partieel integreren met vectoren

Partieel integreren is een integratietechniek die toegepast kan worden wanneer de integrand het product van een functie en de afgeleide van een andere functie is. Daarbij wordt de afgeleide van de ene naar de andere functie verplaatst. Voor scalars is deze relatie weergegeven in vergelijking 2.149. In het vectoriële geval gelden de vergelijkingen 2.182 tot en met 2.184.

$$\int_V f(\nabla \cdot \vec{\mathbf{A}}) d\tau = - \int_V \vec{\mathbf{A}} \cdot (\nabla f) d\tau + \oint_S f \vec{\mathbf{A}} \cdot d\vec{\mathbf{a}} \quad (2.182)$$

$$\int_S f(\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) \cdot d\vec{\mathbf{a}} = \int_S [\vec{\mathbf{A}} \times (\nabla f)] \cdot d\vec{\mathbf{a}} + \oint_P f \vec{\mathbf{A}} \cdot d\vec{\mathbf{l}} \quad (2.183)$$

$$\int_V \vec{\mathbf{B}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{A}}) d\tau = \int_V \vec{\mathbf{A}} \cdot (\nabla \times \vec{\mathbf{B}}) d\tau + \oint_S (\vec{\mathbf{A}} \times \vec{\mathbf{B}}) \cdot d\vec{\mathbf{a}} \quad (2.184)$$

Dubbele integraal

Betekenis

Een integraal over een 2-dimensionaal lichaam, een **dubbele integraal** wordt gedefiniëerd volgens vergelijking 2.185. De meetkundige betekenis is als volgt: Als $f(x, y) \geq 0$, dan is het volume van het lichaam boven rechthoek R in het x, y -vlak en onder het vlak $z=f(x, y)$ gegeven door vergelijking 2.186

$$\iint_R f(x, y) dA \equiv \lim_{m, n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n f(x_{ij}^*, y_{ij}^*) \Delta A \quad (2.185)$$

$$V = \iint_R f(x, y) dA \quad (2.186)$$

Voorbeeld

$$\int_0^3 \int_1^2 x^2 y dy dx \quad (2.187)$$

Als we eerst x constant houden krijgen we:

$$\begin{aligned} \int_1^2 x^2 y dy &= \left[x^2 \frac{y^2}{2} \right]_{y=1}^{y=2} \\ &= x^2 \left(\frac{2^2}{2} \right) - x^2 \left(\frac{1^2}{2} \right) = \frac{3}{2} x^2 \end{aligned} \quad (2.188)$$

Dat moeten we nog een keer naar x integreren:

$$\begin{aligned}\iint_0^3 \int_1^2 x^2 y \, dy dx &= \int_0^3 \left[\int_1^2 x^2 y \, dy \right] dx \\ &= \int_0^3 \frac{3}{2} x^2 dx = \left[\frac{x^3}{2} \right]_0^3 = \frac{27}{2}\end{aligned}\quad (2.189)$$

Fubini's Stelling

De stelling van Fubini luidt: "Als f continu is boven een rechthoek $R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, dan geldt vergelijking 2.190." Zie voor de drie-dimensionale equivalenten pagina 77

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx dy \quad (2.190)$$

Integratiegebieden

Bij een enkele integraal integreren we altijd over een interval, getekend als een lijnstuk, maar bij dubbele integralen is het niet altijd de bedoeling om over een rechthoek te integreren. We onderscheiden twee typen integratiegebieden. Door het gewenste integratiegebied op te delen in stukken van deze typen, kan over het hele gebied geïntegreerd worden.

- I: Een gebied is van type I wanneer het tussen twee continue functies van x ligt waarbij geldt: $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$
- II: Een gebied is van type II wanneer het tussen twee continue functies van y ligt waarbij geldt: $D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$

Greens Theorie

De **theorie van Green** geeft een verband aan tussen een lijnintegraal rond een simpele gesloten kromme C en een dubbele integraal over gebied D dat omsloten is door C . C is een positief georiënteerde, simpele gesloten kromme, waarbij D het gebied is dat omsloten is door C . Als P en Q continue partiële afgeleiden hebben in een gebied D , dan gelden volgens Greens theorie de volgende vergelijkingen:

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dA \quad (2.191)$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_D \nabla \times \vec{F} d\vec{A} \quad (2.192)$$

$$\oint_C \vec{F} \cdot \hat{n} ds = \iint_D \nabla \cdot \vec{F} d\vec{A} \quad (2.193)$$

Poolcoördinaten

Bij ronde vormen loont het vaak de moeite om bij de berekening van dubbele integralen over te gaan op poolcoördinaten. Als we bijvoorbeeld de oppervlakte van een cirkel die begrensd is door $x^2 + y^2 = 1$ willen berekenen, definiëren we gebied R als $R = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$.

Poolcoördinaten zijn gerelateerd aan rechthoekige coördinaten door de volgende formules:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (2.194)$$

$$x = r \cos(\theta) \quad (2.195)$$

$$y = r \sin(\theta) \quad (2.196)$$

Dus om bij een dubbele integraal over te gaan naar poolcoördinaten: als f continu is op een polaire rechthoek R gedefinieerd door $0 \leq a \leq r \leq b, \alpha \leq \theta \leq \beta$, waarbij $0 \leq \beta - \alpha \leq 2\pi$, dan is de equivalente integraal in poolcoördinaten:

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_{\alpha}^{\beta} \int_a^b f(r \cos(\theta), r \sin(\theta)) r dr d\theta \quad (2.197)$$

Zwaartepunt berekenen

Het zwaartepunt (\bar{x}, \bar{y}) van een vlak D met dichtheidsfunctie $\rho(x, y)$ wordt gegeven door:

$$\bar{x} = \frac{M_y}{m} = \frac{1}{m} \iint_D x \cdot \rho(x, y) dA \quad (2.198)$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{m} = \frac{1}{m} \iint_D y \cdot \rho(x, y) dA \quad (2.199)$$

$$m = \iint_D \rho(x, y) dA \quad (2.200)$$

Drievoudige integralen

Fubini's stelling voor drievoudige integralen

De onderstaande vergelijkingen geven Fubini's stelling in 3-dimensionaal Carthesische-, cylinder en bolcoördinaten. Daarin moet de functie $f(x, y, z)$ continu zijn op respectievelijk de balk $B = [x_1, x_2] \times [y_1, y_2] \times [z_1, z_2]$, de cylinderbalk $C = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [z_1, z_2]$ en de polaire balk $P = [r_1, r_2] \times [\theta_1, \theta_2] \times [\varphi_1, \varphi_2]$.

$$\iiint_B f(x, y, z) dV = \int_{x_1}^{x_2} \int_{y_1}^{y_2} \int_{z_1}^{z_2} f(x, y, z) dx dy dz \quad (2.201)$$

$$\iiint_C f(x, y, z) dV = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{z_1}^{z_2} f(r \cos(\theta), r \sin(\theta), z) \cdot r dz d\theta dr \quad (2.202)$$

$$\iiint_P f(x, y, z) dV = \int_{r_1}^{r_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f \left(\begin{array}{l} r \sin(\varphi) \cos(\theta) \\ r \sin(\varphi) \sin(\theta) \\ r \cos(\varphi) \end{array} \right) r^2 \sin(\varphi) d\varphi d\theta dr \quad (2.203)$$

Stokes' theorie

Stokes' theorie, of het **divergentietheorema** luidt: Als E een simpel massief lichaam is en S is de rand van het oppervlak van E , met positieve oriëntatie en \vec{F} is een vectorveld met continue partiële afgeleiden op een open gebied dat E omvat, dan geldt:

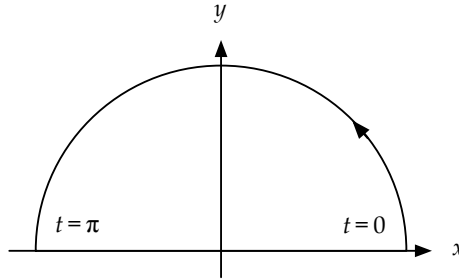
$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iiint_E \nabla \cdot \vec{F} dV \quad (2.204)$$

Lijnintegralen

Een functie $f(x, y)$ kan langs een pad worden geïntegreerd. (Als $f(x, y) = 1$ wordt dus de lengte van het pad bepaald.)

$$\int_c f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \quad (2.205)$$

(Dit kan op gelijksoortige wijze voor paden in hoger-dimensionale ruimtes.)



Figuur 2.9: Voorbeeldintegratiepad

Voorbeeld

Reken uit: $\int_C (2 + x^2 y) ds$ waarbij C de bovenste helft van de cirkel $x^2 + y^2 = 1$ is (figuur 2.9). We gebruiken de volgende parametrisering:

$$x = \cos t \quad y = \sin t \quad (2.206)$$

Het interval $0 \leq t \leq \pi$ komt overeen met de bovenste helft van de cirkel. Dat levert op:

$$\begin{aligned} \int_C (2 + x^2 y) ds &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^\pi (2 + \cos^2 t \sin t) dt = \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^\pi \\ &= 2\pi + \frac{2}{3} \end{aligned} \quad (2.207)$$

Lijnintegralen en vectorvelden

Wanneer \vec{F} een continu vectorveld is op een curve c gegeven door vector functie $\vec{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, dan is de lijnintegraal van \vec{F} langs c :

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= \int_a^b \vec{F}(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt \\ &= \int_C \vec{F} \cdot \vec{T} ds \end{aligned} \quad (2.208)$$

Als $\vec{F}(x, y) = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix}$ een **conservatief vectorveld** is en P en Q continue eerste-orde afgeleiden hebben in domein D dan geldt in gebied D :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (2.209)$$

Deze stelling is ook omkeerbaar: wanneer $\vec{F} = \begin{bmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{bmatrix}$ een vectorveld is in een open simpel-verbonden gebied D en P en Q hebben continue eerste-orde afgeleiden en er geldt: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ dan is \vec{F} conservatief.

Differentiaalvergelijkingen

Een **differentiaalvergelijking** is een vergelijking waarin een zekere onbekende functie en een of meer van zijn afgeleiden voorkomen. De **orde** van een differentiaalvergelijking is de orde van de hoogste afgeleide die in de vergelijking voorkomt. Een functie waarmee voldaan wordt aan de vergelijking wordt een oplossing van de differentiaalvergelijking genoemd. Bij het oplossen van een differentiaalvergelijking moeten alle mogelijke oplossingen gevonden worden. Er is geen standaard methode om iedere willekeurige differentiaalvergelijking op te lossen. Vaak wordt de oplossingsverzameling beperkt door een zekere **beginwaarde**. Het vraagstuk wordt dan een **beginwaardenprobleem** genoemd.

Zogenaamde **scheidbare vergelijkingen** (vergelijking 2.210) worden opgelost volgens vergelijking 2.211. Een voorbeeld van een scheidbare vergelijking is de differentiaalvergelijking van natuurlijke groei (vergelijking 2.212). De oplossing van dit beginwaardenprobleem wordt gegeven door vergelijking 2.213. Eerste-orde lineaire differentiaalvergelijkingen kunnen worden weergegeven in de vorm van vergelijking 2.214 en worden opgelost door beide zijden van de vergelijking te vermenigvuldigen met de **integratiefactor** $I(x)$ (vergelijking 2.215) en vervolgens beide zijden te integreren.

Algemeen

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \tag{2.210}$$

Wiskunde

$$\int \frac{1}{f(y)} dy = \int g(x) dx \tag{2.211}$$

$$\frac{dy}{dt} = ky \quad y(0) = y_0 \tag{2.212}$$

$$y(t) = y_0 e^{kt} \tag{2.213}$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{2.214}$$

Informatica

$$I(x) \equiv e^{\int P(x) dx} \tag{2.215}$$

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Tweede-orde lineaire differentiaalvergelijkingen zijn vergelijkingen die in de vorm van vergelijking 2.216 geschreven kunnen worden. Als hierin geldt dat $G(x) \equiv 0$ dan wordt de vergelijking een **homogene lineaire differentiaalvergelijking** genoemd. Als $y_1(x)$ en $y_2(x)$ beiden oplossingen zijn van een homogene lineaire differentiaalvergelijking, is $y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$, waarbij c_1 en c_2 willekeurige constanten zijn, dat ook. Als y_1 en y_2 bovendien lineair onafhankelijke oplossingen zijn en $P(x) \neq 0$ dan is $y(x)$ de algemene oplossing van de de homogene vergelijking. Als de coëfficiëntfuncties van de homogene differentiaalvergelijking constant zijn (zie vergelijking 2.217), wordt de oplossing bepaald met behulp van de oplossingen van de zogenaamde **karacteristieke vergelijking** (vergelijking 2.218). De gedaante van de oplossing (vergelijking 2.219, 2.220 of 2.221) wordt bepaald door de discriminant van de karakteristieke vergelijking (zie pagina 42).

$$P(x) \frac{d^2y}{dx^2} + Q(x) \frac{dy}{dx} + R(x)y = G(x) \tag{2.216}$$

$$a \frac{d^2y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + cy = 0 \tag{2.217}$$

$$ar^2 + br + c = 0 \tag{2.218}$$

$$D > 0 \Rightarrow y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} \tag{2.219}$$

$$D = 0 \Rightarrow y = c_1 e^{rx} + c_2 x e^{rx} \tag{2.220}$$

$$D < 0 \Rightarrow y = e^{\Re(r_1)x} (c_1 \cos(\Im(r_1)x) + c_2 \sin(\Im(r_1)x)) \tag{2.221}$$

Van niet-homogene differentiaalvergelijkingen van de vorm in vergelijking 2.216, wordt de oplossing gevonden volgens de vergelijking $y(x) = y_h(x) + y_p(x)$,

waarbij $y(x)$ de algemene oplossing is, $y_h(x)$ de algemene oplossing van de bijbehorende homogene vergelijking ($G(x) \mapsto 0$) en $y_p(x)$ een **particuliere oplossing** is van de vergelijking. Voor het vinden van een particuliere oplossing worden hier twee methoden besproken: de **methode van onbepaalde coëfficiënten** en de **methode van parametervariatie**. Ze worden beiden toegelicht aan de hand van hetzelfde voorbeeld (vergelijking 2.222).

Bij de methode van onbepaalde coëfficiënten wordt afhankelijk van $G(x)$ een vorm van $y_p(x)$ gekozen, waarin de parameters nog moeten worden bepaald. Als $G(x)$ een n -de graads polynoom is probeert men $y_p(x) = \sum_{k=0}^n a_k \cdot x^k$ (vergelijking 2.235). Als $G(x)$ een sinusoïde met hoekfrequentie n is, probeert men $y_p(x) = a_1 \sin(nx) + a_2 \cos(nx)$. Als $G(x)$ een e -macht is, probeert men $y_p(x) = a_1 e^{a_2 x}$. Als $G(x)$ de som of het product van twee eerder genoemde vormen is, wordt $y_p(x)$ gezocht in de vorm van respectievelijk de som en het product van de eerder genoemde bijbehorende oplossingen (vergelijking 2.238). Wanneer de gekozen vorm in de differentiaalvergelijking wordt ingevuld, ontstaat een (stelsel van) vergelijking(en). Door deze op te lossen, kunnen de parameters bepaald worden. Wanneer echter blijkt dat de geprobeerde particuliere oplossing een oplossing is van de homogene vergelijking, moet de eerstgenoemde met x vermenigvuldigd worden, alvorens deze in de differentiaalvergelijking in te vullen. Wanneer ook dit een oplossing van de homogene vergelijking blijkt te zijn, moet nogmaals met x vermenigvuldigd worden (vergelijking 2.230).

De methode van parametervariatie gaat uit van de oplossing van de homogene differentiaalvergelijking. Hierin worden de parameters (c_1 en c_2 in het voorbeeld) vervangen door functies ($u_1(x)$ en $u_2(x)$) en de twee homogene basisoplossingen (e^x en xe^x in het voorbeeld) worden voor het gemak respectievelijk $y_1(x)$ en $y_2(x)$ genoemd, zoals weergegeven in vergelijking 2.241. Omdat $u_1(x)$ en $u_2(x)$ willekeurige functies zijn, kunnen er twee voorwaarden aan worden gesteld. Een daarvan is dat voldaan moet worden aan de differentiaalvergelijking, de ander wordt gekozen: $u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) \equiv 0$. Daardoor komen er in de verdere berekening geen tweede-orde afgeleiden van $u_1(x)$ en $u_2(x)$ voor. Invullen in de differentiaalvergelijking levert een formule op waarvan zes van de termen samen de twee oplossingen van de homogene differentiaalvergelijking vormen en derhalve samen 0 bedragen (vergelijking 2.244). Het restant vormt samen met de eerder gestelde voorwaarde een stelsel van twee vergelijkingen (vergelijking 2.245). Bedenken dat $y_1(x)$ en $y_2(x)$ bekend zijn en zo het stelsel oplossen levert $u_1'(x)$ en $u_2'(x)$. Door te integreren worden $u_1(x)$ en $u_2(x)$ gevonden. De algemene oplossing wordt ten slotte gevonden door de gevonden vergelijking 2.241 in te vullen.

Voorbeeld:

$$y''(x) - 2y'(x) + y(x) = e^x + x(1 - x) \quad (2.222)$$

(a1 en b1) Oplossen van de homogene differentiaalvergelijking:

$$y_h''(x) - 2y_h'(x) + y_h(x) = 0 \quad (2.223)$$

$$y_h(x) = e^{rx} \quad (2.224)$$

$$(r^2 - 2r + 1)e^{rx} = 0 \quad (2.225)$$

$$(r - 1)^2 = 0 \quad (2.226)$$

$$r = 1 \quad (2.227)$$

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (2.228)$$

(a2) Bepalen van de particuliere oplossing:

$$y_{p1}''(x) - 2y_{p1}'(x) + y_{p1}(x) = e^x \quad (2.229)$$

$$y_{p1}(x) = Ax^2 e^x \quad (2.230)$$

$$A(x^2 + 4x + 2 - 4x - 2x^2 + x^2)e^x = e^x \quad (2.231)$$

$$A = \frac{1}{2} \quad (2.232)$$

$$y_{p1}(x) = \frac{1}{2} x^2 e^x \quad (2.233)$$

$$y_{p2}''(x) - 2y_{p2}'(x) + y_{p2}(x) = x(1 - x) = x - x^2 \quad (2.234)$$

$$y_{p2}(x) = Px^2 + Qx + R \quad (2.235)$$

$$Px^2 + (-4P + Q)x + (2P - 2Q + R) = x - x^2 \quad (2.236)$$

$$y_{p2}(x) = -x^2 - 3x - 4 \quad (2.237)$$

$$\begin{aligned} y_p(x) &= y_{p1}(x) + y_{p2}(x) \\ &= \frac{1}{2} x^2 e^x - x^2 - 3x - 4 \end{aligned} \quad (2.238)$$

(a3) Bepalen van de algemene oplossing:

$$y(x) = y_h(x) + y_p(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x + \frac{1}{2} x^2 e^x - x^2 - 3x - 4 \quad (2.239)$$

(b2) Parameters vervangen door functies:

$$y_h(x) = c_1 e^x + c_2 x e^x \quad (2.240)$$

$$y(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \quad (2.241)$$

$$\left[\begin{array}{l} y_1(x) = e^x \\ y_2(x) = x e^x \end{array} \right] \quad (2.242)$$

$$u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) \equiv 0 \quad (2.243)$$

$$\begin{aligned} y''(x) - 2y'(x) + y(x) &= u_1(x)(y_1''(x) - 2y_1'(x) + y_1(x)) + \\ &+ u_2(x)(y_2''(x) - 2y_2'(x) + y_2(x)) + \\ &+ u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) \\ &= e^x + x(1-x) \end{aligned} \quad (2.244)$$

(b3) Stelsel oplossen:

$$\begin{cases} u_1'(x)y_1'(x) + u_2'(x)y_2'(x) = e^x + x(1-x) \\ u_1'(x)y_1(x) + u_2'(x)y_2(x) = 0 \end{cases} \quad (2.245)$$

$$u_1'(x) = -x - x^2 e^{-x} + x^3 e^{-x} \quad (2.246)$$

$$u_2'(x) = 1 + x e^{-x} - x^2 e^{-x} \quad (2.247)$$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \int u_1'(x) dx \\ &= \frac{x^2}{-2} - (x^3 + 2x^2 + 4x + 4)e^{-x} + C_1 \end{aligned} \quad (2.248)$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= \int u_2'(x) dx \\ &= x + (x^2 + x + 1)e^{-x} + C_2 \end{aligned} \quad (2.249)$$

(b4) Bepalen van de algemene oplossing:

$$\begin{aligned} y(x) &= u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \\ &= \frac{1}{2}x^2 e^x - x^2 - 3x - 4 + C_1 e^x + C_2 x e^x \end{aligned} \quad (2.250)$$

Voor een stelsel van **differentiaalvergelijkingen** geldt dat wanneer $\vec{x}'(t) = A \cdot \vec{x}(t)$ geldt, de vergelijking voor $\vec{x}(t)$ als in vergelijking 2.251 kan worden geschreven. Hierin zijn v_n de eigenvectoren die passen bij de bijbehorende eigenwaarde.

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot \vec{v}_1 \cdot e^{\lambda_1 t} + c_2 \cdot \vec{v}_2 \cdot e^{\lambda_2 t} + \dots + c_n \cdot \vec{v}_n \cdot e^{\lambda_n t} \quad (2.251)$$

Rijen en reeksen

Rij

Een **rij** is een lijst getallen (termen) met een volgorde. Een rij wordt genoteerd als $\{a_1, a_2, a_3, \dots\} = \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Rijen kunnen worden gedefiniëerd door middel van alle termen, door een functie die aan n de waarde van de n -de term toevoegt, of door middel van een recursieve formule, waarbij één of meer startwaarden gegeven zijn en iedere volgende term berekend wordt als functie van de voorgaande term(en). Als $\forall \epsilon > 0 \exists N \Rightarrow |a_n - L| < \epsilon$ met $n > N$ heeft de rij de limiet L ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$) en heet de rij **convergent**; de rij convergeert. Rijen die niet convergeren divergeren (zijn **divergent**). Een rij $\{a_n\}$ heet toenemend als $a_n < a_{n+1} \forall n \geq 1$ en afnemend als $a_n > a_{n+1} \forall n \geq 1$. Een rij die toenemend, danwel afnemend is, is **monotoon**.

Reeks

Een **reeks** is de som of het product van een rij. Een somreeks wordt genoteerd als $s = \sum_{i=1}^{\infty} a_i$. Een **partiële som** is de som van de eerste n termen: $s_n = \sum_{i=1}^n a_i$. Als de rij $\{s_n\}$ convergeert wordt de reeks $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ convergent genoemd, anders divergent.

Een **rekenkundige reeks** is een reeks die voldoet aan $s_n = \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n p + iq$. In dat geval geldt $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$. Een **meetkundige reeks** is een reeks die voldoet aan $s_n = \sum_{i=1}^n pr^{i-1}$. In dat geval geldt $s_n = p \frac{1-r^n}{1-r}$. Deze reeks convergeert dan en slechts dan als $|r| < 1$. en convergeert dan naar $s = \frac{p}{1-r}$.

Taylorreeksen

De Taylorreeks¹ is een benadering om een bepaald punt a van een willekeurige functie $f(x)$ op basis van polynomen. Elke functie wordt zo benaderd:

$$f(x) = T_n + R_n \quad (2.252)$$

$$T_n = \sum_{i=0}^n \frac{f^{(i)}(a)}{i!} (x-a)^i \quad (2.253)$$

¹naar Brook Taylor (1685-1731)

Voor $a = 0$ heet dit de Maclaurin¹-reeks. De onderste reeks heet de n -de orde Taylor-expansie van $f(x)$ rond a . De restterm R_n wordt als volgt afgeschat:

$$\text{Als } |f^{(n+1)}(x)| \leq M \text{ voor } |x - a| \leq d \quad (2.254)$$

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!} |x - a|^{n+1} \quad |x - a| \leq d \quad (2.255)$$

Toepassingsvoorbeeld: Getal van Euler

Het getal e is gedefiniëerd als het getal waarvoor geldt dat

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = 1 \Leftrightarrow \left. \frac{d}{dx} e^x \right|_{x=0} = 1 \quad (2.256)$$

Daaruit volgt:

$$\frac{d}{dx} e^x = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^x (e^h - 1)}{h} = e^x \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x \quad (2.257)$$

Op basis daarvan kan de Taylorreeks van e^x worden berekend, waarmee het getal e met de gewenste nauwkeurigheid kan worden benaderd.

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \quad (2.258)$$

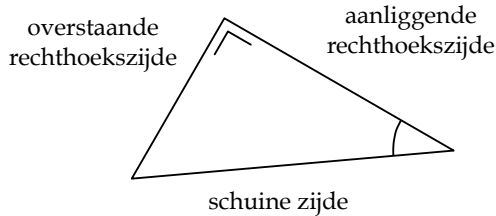
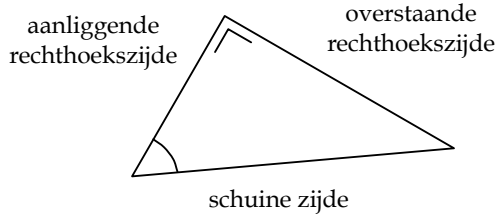
¹Colin Maclaurin (1698-1746)

Meetkunde

Goniometrie

Rechthoekige driehoek

In een **rechthoekige driehoek** gelden de volgende eigenschappen:



Figuur 2.10: Rechthoekige driehoek

$$\text{TOA} \quad \tan(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{aanliggende rechthoekszijde}}$$

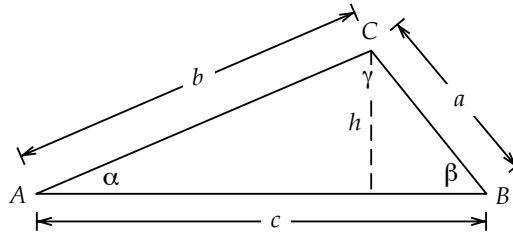
$$\text{SOS} \quad \sin(\alpha) = \frac{\text{overstaande rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

$$\text{CAS} \quad \cos(\alpha) = \frac{\text{aanliggende rechthoekszijde}}{\text{schuine zijde}}$$

Verder geldt de **stelling van Pythagoras**:

$$(\text{aanliggende zijde})^2 + (\text{overstaande zijde})^2 = (\text{schuine zijde})^2 \quad (2.259)$$

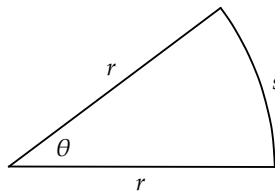
Willekeurige driehoek



Figuur 2.11: Driehoek

Oppervlakte	$A = \frac{1}{2}ch$ $= \frac{1}{2}bc \sin(\alpha)$
Driehoeksstelling	$a + b \geq c$ $b + c \geq a$ $c + a \geq b$
Sinusregel	$\frac{\sin(\alpha)}{a} = \frac{\sin(\beta)}{b} = \frac{\sin(\gamma)}{c}$
Cosinusregel	$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos(\alpha)$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos(\beta)$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(\gamma)$

Cirkelsector



Figuur 2.12: Cirkelsector

Oppervlakte	$A = \frac{1}{2}r^2\theta$ [rad]
Cirkelboog	$s = r\theta$ [rad]
	π [rad] = 180°

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Enkele exacte goniometrische waarden

α [$^\circ$]	0°	30°	45°	60°	90°
α [rad]	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(\alpha)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos(\alpha)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan(\alpha)$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞

Fundamentele identiteiten

$$\csc(\alpha) \equiv \frac{1}{\sin(\alpha)} \quad (2.260)$$

$$\sec(\alpha) \equiv \frac{1}{\cos(\alpha)} \quad (2.261)$$

$$\cot(\alpha) \equiv \frac{1}{\tan(\alpha)} \quad (2.262)$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} \quad (2.263)$$

$$\cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1 \quad (2.264)$$

$$1 + \tan^2(\alpha) = \sec^2(\alpha) \quad (2.265)$$

$$1 + \cot^2(\alpha) = \csc^2(\alpha) \quad (2.266)$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin(\alpha) \quad (2.267)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos(\alpha) \quad (2.268)$$

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin(\alpha) \quad (2.269)$$

$$\cos(-\alpha) = \cos(\alpha) \quad (2.270)$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \quad (2.271)$$

$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos(\alpha) \quad (2.272)$$

$$\tan(-\alpha) = -\tan(\alpha) \quad (2.273)$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot(\alpha) \quad (2.274)$$

Som- en verschilformules

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (2.275)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) - \cos(\alpha) \sin(\beta) \quad (2.276)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) - \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (2.277)$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cos(\beta) + \sin(\alpha) \sin(\beta) \quad (2.278)$$

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (2.279)$$

$$\sin(\alpha) - \sin(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \quad (2.280)$$

$$\cos(\alpha) + \cos(\beta) = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (2.281)$$

$$\cos(\alpha) - \cos(\beta) = 2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right) \quad (2.282)$$

Dubbele- en halve-hoekformules

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \quad (2.283)$$

$$\begin{aligned} \cos(2\alpha) &= \cos^2(\alpha) - \sin^2(\alpha) \\ &= 2 \cos^2(\alpha) - 1 \\ &= 1 - 2 \sin^2(\alpha) \end{aligned} \quad (2.284)$$

$$\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan(\alpha)}{1 - \tan^2(\alpha)} \quad (2.285)$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2\alpha) \quad (2.286)$$

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\alpha) \quad (2.287)$$

Kegelsneden

Kegelsneden zijn meetkundige plaatsen die ontstaan door het doorsnijden van een kegel (of eigenlijk een twee omgekeerde kegels met de toppen op elkaar en de symmetrie-assen samenvallend). Een kegelsnede kan een cirkel, ellips, parabool, hyperbool, punt, rechte of twee snijdende rechten zijn. De

laatste drie worden ontaarde kegelsneden genoemd en hebben gemeen dat de top van de kegels in het snijvlak ligt. Niet-ontaarde kegelsneden zijn allen te definiëren als de meetkundige plaats van alle punten waarvan de verhouding tussen de afstand tot een zekere gegeven lijn en een zeker gegeven punt een vaste waarde e hebben. Kegelsneden in een carthesiaans assenstelsel voldoen aan de vergelijking $ax^2 + by^2 + c + 2fx + 2gy + 2kxy = 0$ en omgekeerd zijn alle meetkundige plaatsen die aan deze vergelijking voldoen kegelsneden.

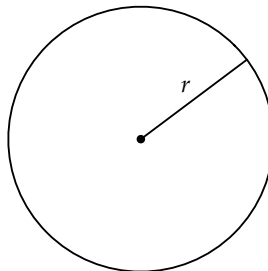
Punt

Een **punt** (symbolisch: \cdot) is een meetkundige plaats met 0 dimensies en is coherent aan het begrip locatie. Een punt geldt als axioma in de meetkunde. De kegelsnede-vergelijking voor een punt is $ax^2 + by^2 + c + 2fx + 2gy + 2kxy = 0$ met $c = 0$.

Lijn

Een **lijn** is een continue oneindige aaneenschakeling van punten en heeft één dimensie. Een lijn geldt als axioma in de meetkunde en is het kortste pad tussen twee punten. Lijnen worden onderverdeeld in **rechten** en **krommen**. Halfrechten (of stralen) en lijnstukken lijken op rechten, maar worden door respectievelijk één en twee eindpunten begrensd. De helling van een lijn door (x_1, y_1) en (x_2, y_2) is $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. De vergelijking van een lijn door (x_1, y_1) met helling m is $y - y_1 = m(x - x_1)$.

Cirkel



Figuur 2.13: Cirkel

Beschrijving: De meetkundige plaats van alle punten in een vlak met een vaste afstand r , de **straal** genoemd, tot een punt M in dat vlak, het **middelpunt** genoemd.

Kegelsnede-vergelijking	$ax^2 + by^2 + c + 2fx + 2gy + 2kxy = 0$ met $a = b$ en $k = 0$
Vereenvoudigde vergelijking	$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = r^2$ met $(x_M, y_M) = M$
Excentriciteit	$e \equiv 0$
Omtrek	$P = 2\pi r$
Oppervlakte	$A = \pi r^2$

Ellips

Beschrijving: De meetkundige plaats van alle punten in een vlak waarvoor geldt dat de som van de afstanden van dit punt tot twee gegeven **brandpunten** F_1 en F_2 in dat vlak constant is. Equivalent is een ellips de meetkundige plaats van alle punten in een vlak waarvoor geldt dat het quotiënt van de afstand van dit punt tot een gegeven brandpunt F en de afstand van dit punt tot een gegeven **richtlijn** ℓ constant is en kleiner dan 1. Dit quotiënt wordt de **excentriciteit** van de ellips genoemd. De lijn door de brandpunten en de middelloodlijn tussen de brandpunten vormen de assen van de ellips. Als de twee brandpunten samenvallen, wordt de ellips een cirkel.

Kegelsnede-vergelijking	$ax^2 + by^2 + c + 2fx + 2gy + 2kxy = 0$ met $k^2 < ab$
Vereenvoudigde vergelijking (met de ellipsassen als assenstelsel)	$\frac{x^2}{x_0^2} + \frac{y^2}{y_0^2} = 1$ met x_0 en y_0 de snijpunten van de ellips met de respectievelijke assen.
Omtrek	$P = \pi(x_0 + y_0) \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n h^n h = \frac{x_0 + y_0}{x_0 - y_0} \approx \pi(x_0 + y_0) \left(1 + \frac{1}{4}h + \frac{1}{64}h^2 + \frac{1}{258}h^3 + \frac{1}{16384}h^4\right)$
Oppervlakte	$A = x_0 y_0 \pi$
Excentriciteit	$e \equiv \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{x_0^2}} < 1$

Parabool

Beschrijving: De meetkundige plaats van alle punten die een gelijke afstand hebben tot een gegeven brandpunt F en een richtlijn ℓ .

Kegelsnede-vergelijking	$ax^2 + by^2 + c + 2fx + 2gy + 2kxy = 0$ met $k^2 = ab$
Vereenvoudigde vergelijking (met de loodlijn vanuit F op l als y -as)	$y - rx^2 = y_T$ met y_T de y -coördinaat van de top en $r = \frac{1}{2} \frac{d^2 y}{dx^2}$
Excentriciteit	$e \equiv 1$

Hyperbool

Beschrijving: De meetkundige plaats van alle punten in een vlak waarvoor geldt dat het absolute verschil van de afstanden van dit punt tot twee gegeven brandpunten F_1 en F_2 in dat vlak constant is. Equivalent is een hyperbool de meetkundige plaats van alle punten in een vlak waarvoor geldt dat het quotiënt van de afstand van dit punt tot een gegeven brandpunt F en de afstand van dit punt tot een gegeven richtlijn ℓ constant is en groter dan 1. Dit quotiënt wordt de excentriciteit van de hyperbool genoemd. Een hyperbool bestaat uit twee krommen, takken genaamd. De lijn door de brandpunten en de middelloodlijn tussen de brandpunten vormen de assen van de hyperbool.

Kegelsnede-vergelijking	$ax^2 + by^2 + c + 2fx + 2gy + 2kxy = 0$ met $k^2 > ab$
Vereenvoudigde vergelijking (met de hyperboolassen als assenstelsel)	$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$ met $p^2 + q^2 = \left(\frac{1}{2} F_1F_2 \right)^2$ en $ HF_1 - HF_2 = 2p$ waarbij H een willekeurig punt op de hyperbool is.
Excentriciteit	$e \equiv \sqrt{1 + \frac{q^2}{p^2}}$
Rechthoekige hyperbool	$\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$ met $p + q = 0$
Asymptoten	$y = \pm \frac{q}{p}x$

Ruimtelijke figuren

Bol

Een bol is de meetkundige plaats van alle punten in een 3-dimensionale ruimte met een gelijke afstand r tot een gegeven middelpunt M .

Vergelijking	$(x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 = r^2$ met $(x_M, y_M, z_M) = M$
Oppervlakte	$A = 4\pi r^2$
Inhoud	$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

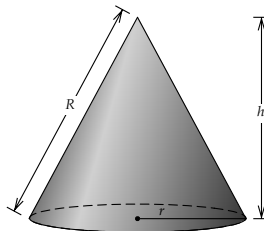
Cilinder, balk en prisma

Cilinders, balken en prisma's zijn figuren die in een richting op elke hoogte binnen de figuur dezelfde oppervlakte hebben. Cilinders hebben een cirkelvormig grondvlak (doorsnede), balken hebben een rechthoekig grondvlak en prisma's hebben een veelhoekig grondvlak.

Cilindermantel	$A = 2\pi rh$ met h de hoogte
Inhoud	$V = A_G h$ met A_G de oppervlakte van het grondvlak

Kegel en piramide

Kegels en piramides zijn figuren die in een richting op elke hoogte binnen de figuur een doorsnede hebben waarvan de oppervlakte rechtevenredig is met het kwadraat van de hoogte.



Figuur 2.14: Kegel

Kegelmantel	$A = \pi r R = \pi r \sqrt{r^2 + h^2}$ met h de hoogte
Inhoud	$V = \frac{1}{3} A_G h$ met A_G de oppervlakte van het grondvlak

Kansrekening en statistiek

Basisbegrippen

Kansrekening is het van te voren uitspraken doen over een toevalsexperiment, op basis van een kansmodel. Een van de gebieden waarin kansrekening wordt toegepast is statistiek, voornamelijk om meetgegevens te verwerken.

De **uitkomstenruimte** S bevat alle mogelijke uitkomsten van een **toevalsexperiment**. Een **gebeurtenis** is een deelverzameling uit S en wordt gewoonlijk aangeduid met A, B, C, \dots . De **kans** op een gebeurtenis A wordt aangeduid met $P(A)$. Verder zijn alle bekende notaties uit de verzamelingenleer (zie p. 36) geldig om gebeurtenissen samen te voegen en uit te sluiten. Voorbeelden:

$$A \cup B \quad A \text{ en/of } B \text{ treden op} \quad (2.288)$$

$$A \cap B \quad A \text{ en } B \text{ treden op} \quad (2.289)$$

De **complementaire kans** (de kans dat gebeurtenis A niet optreedt) is te berekenen op basis van de **wet van de totale kans**:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \quad (2.290)$$

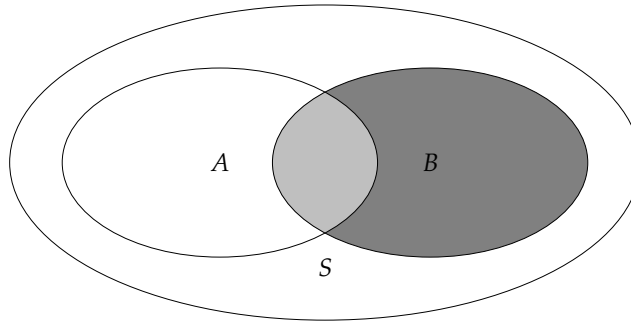
Als een experiment N maal wordt uitgevoerd, is $N(A)$ het aantal keer dat het experiment de uitkomst A heeft. Het **frequentiequotiënt** van A is:

$$\text{fq}(A) = \frac{N(A)}{N} \quad (2.291)$$

Volgens de **empirische wet van de grote getallen** naderen de frequentiequotiënten de **kansmaat** $P(A)$ voor grote N .

Als we geïnteresseerd zijn in de kans dat een gebeurtenis A optreedt, gegeven dat een gebeurtenis B optreedt, spreken we van voorwaardelijke kansen; notatie $P(A|B)$. Omdat er een randvoorwaarde is (B), hoeven we alleen naar de gebeurtenissen in de verzameling B te kijken, die ook in de gebeurtenis A zitten (zie figuur, dit is een **Venn-diagram**¹).

¹naar John Venn (1834-1923)



De kans bedraagt dan (het lichtgrijze gebied gedeeld door B):

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad (2.292)$$

Twee gebeurtenissen zijn **onderling onafhankelijk** (o.o.) als het optreden van de ene gebeurtenis geen invloed heeft op de kans dat de andere gebeurtenis optreedt. De gebeurtenissen A en B zijn dus onafhankelijk als geldt (twee mogelijkheden):

$$P(A) = P(A|B) \iff P(B) = P(B|A) \quad (2.293)$$

Een **stochastische variabele**, s.v. of kortweg **stochast** is een reële functie op de uitkomstenruimte. Stochasten worden vaak met symbolen als X, X_1, X_2, \dots, Y, Z aangeduid. In de informatietechniek worden ook wel x, a, b etc. gebruikt.

Een voorbeeld van een stochast X is het aantal defecte lampen in een productie van 100 stuks. De kans dat er meer dan 5 lampen stuk zijn, noteren we als:

$$P(X > 5) \quad (2.294)$$

Kansverdelingen

Een **kansverdeling** geeft van een stochast aan welke kans er is dat de stochast een zekere waarde aanneemt. Van een stochast X geeft een **verdelingsfunctie** $F_X(x)$ de kans dat de stochast X een waarde van x of lager aanneemt. (Als het duidelijk is om welke stochast het gaat wordt ook wel de notatie $F(x)$ gebruikt.)

Er zijn een groot aantal bekende (parametrische) kansverdelingen, zoals de binomiale verdeling $B(n, k)$. Als een stochast is verdeeld volgens zo'n verdeling noteren we $X \sim B(n, k)$.

Als een stochast een eindig of aftelbaar oneindig aantal waarden kan aannemen, heeft deze een **discrete kansverdeling**. Die kan er bijvoorbeeld zo uit zien:

$P(X = 0)$	0,2
$P(X = 1)$	0,3
$P(X = 2)$	0,5

De som van deze kansen bedraagt natuurlijk één. De verdelingsfunctie voor deze stochast ziet er zo uit:

$$F(x) = \begin{cases} 0,0 & x < 0 \\ 0,2 & 0 \leq x < 1 \\ 0,5 & 1 \leq x < 2 \\ 1,0 & 2 \leq x \end{cases} \quad (2.295)$$

Voor absoluut continue stochasten (die een overaftelbaar oneindig aantal waarden kunnen aannemen) bestaat er de **kansdichtheidsfunctie** $f_X(x)$ of kortweg $f(x)$ waarvoor geldt:

$$\int_a^b f(x) dx = P(a < X < b) \quad (2.296)$$

Deze functie is te berekenen door de afgeleide te nemen van de verdelingsfunctie:

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(u) du \quad (2.297)$$

Soms is er een kansverdeling (kansmaat) voor twee of meer stochasten tegelijk. We spreken dan van een **simultane kansverdeling**.

Voor discrete kansverdelingen neemt de kansmaat $P(X = x \text{ en } Y = y)$ dan twee argumenten (de mogelijke waarden van beide stochasten) en geeft de kans dat die combinatie van uitkomsten optreedt. De kansen kunnen bijvoorbeeld in een tabel worden weergegeven (zie tabel 2.7).

De kansen in de rechter- en ondermarge zijn de **marginale kansen**: de totale kansen $P(X = x)$ en $P(Y = y)$. Er bestaan ook discrete kansverdelingen voor meer dan twee stochasten, een tabel is dan niet meer geschikt om de kansen weer te geven.

Op dezelfde manier bestaat er een **simultane kansdichtheid** om meerdere continue stochasten tegelijk te beschrijven. Deze kansdichtheidsfunctie neemt

x	y	1	2	3	$P(X = x)$
	1	0,1	0,0	0,2	0,3
	2	0,3	0,1	0,1	0,5
	3	0,0	0,0	0,2	0,2
	$P(Y = y)$	0,4	0,1	0,5	1

Tabel 2.7: Een discrete kansverdeling

dan de waarden van de stochasten X_1, X_2, \dots, X_n , notatie $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Door de kansdichtheid over oppervlakte, inhoud, hyperruimte etc. te integreren kunnen kansen worden berekend.

De marginale kansdichtheid is te vinden door de kansdichtheid over alle andere stochasten te integreren. Voorbeeld:

$$f_{X_1}(x_1) = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_2 \dots dx_n \quad (2.298)$$

Stochasten X_1, X_2, \dots, X_n zijn **onderling onafhankelijk** als voor alle $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ geldt dat:

$$f_X(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n f_{X_i}(x_i) \quad (2.299)$$

Verwachting en variantie

De **verwachtingswaarde** van een stochast is de waarde die hij 'gemiddeld genomen' zal aannemen. We noteren $E(X)$ (van *expectation*) of μ_X .

Voor een discrete kansverdeling vinden we de verwachtingswaarde door het gewogen gemiddelde te nemen over alle mogelijke uitkomsten. De kans op een mogelijke uitkomst is dan de wegingsfactor:

$$E(X) = \sum_x x P(X = x) \quad (2.300)$$

Van een stochast met een continue kansverdeling vinden we de kansverdeling op een vergelijkbare manier:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (2.301)$$

De verwachtingswaarde geeft een 'centrale waarde', een zwaartepunt in de kansverdeling, de **variantie** is een maat voor de spreiding van de kansen daaromheen. Per definitie is de variantie (notatie $\text{var}(X)$, σ_X^2 of σ^2 als duidelijk is om welke stochast het gaat) de verwachtingswaarde van de gekwadrateerde afwijking (eerst kwadraat, daarna verwachtingswaarde):

$$\text{var}(X) = E(X - E(X))^2 \quad (2.302)$$

Eigenschappen van de variantie:

$$\text{var}(X) = E(X^2) - (E(X))^2 \quad (2.303)$$

$$\text{var}(aX) = a^2 \text{var}(X) \quad (2.304)$$

$$\text{var}(X + b) = \text{var}(X) \quad (2.305)$$

Voor een discrete cq. continue kansverdeling:

$$\text{var}(X) = \sum_x (x - E(X))^2 P(X = x) \quad (2.306)$$

$$= \left(\sum_x x^2 P(X = x) \right) - (E(X))^2 \quad (2.307)$$

$$\text{var}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x) dx - (E(X))^2 \quad (2.308)$$

De **standaardafwijking** of **standaarddeviatie** van een stochast is de wortel van de variantie. Notaties: $\sqrt{\text{var}(X)}$, σ_X , $\text{SD}(X)$ of σ als bekend is om welke stochast het gaat.

De **covariantie** van twee stochasten geeft aan in welke mate zij afhankelijk zijn. Voor onderling onafhankelijke stochasten is de covariantie nul. Definitie:

$$\text{cov}(X, Y) = E[(X - E(X))(Y - E(Y))] \quad (2.309)$$

De covariantie is positief als grote en kleine waarden voor X en Y vaak samengaan. De covariantie is negatief als relatief grote waarden van X samengaan met relatief kleine waarden van Y en omgekeerd. De covariantie is groter (positief of negatief) naarmate dit verschijnsel sterker is.

Voor discrete kansverdelingen vinden we de covariantie van twee variabelen door voor elke uitkomst (x, y) de afwijking op X , de afwijking op Y en de kans op de uitkomst te vermenigvuldigen en deze termen op te tellen:

$$\text{cov}(X, Y) = \sum_x \sum_y (x - E(X))(y - E(Y))P(X = x \text{ en } Y = y) \quad (2.310)$$

Voor continue kansverdelingen geldt iets soortgelijks:

$$\text{cov}(X, Y) = \iint_{x,y} (u - E(X))(v - E(Y))P(X = u \text{ en } Y = v) dudv \quad (2.311)$$

De variantie van de som van de stochasten kan berekend worden als de covariantie bekend is:

$$\text{var}(X + Y) = \text{var}(X) + \text{var}(Y) + 2\text{cov}(X, Y) \quad (2.312)$$

Voor covarianties gelden de volgende verbanden:

$$\text{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) \quad (2.313)$$

$$\text{cov}(X, Y) = \text{cov}(Y, X) \quad (2.314)$$

$$\text{cov}(X, X) = \text{var}(X) \quad (2.315)$$

$$\text{cov}(X + a, Y) = \text{cov}(X, Y) \quad (2.316)$$

$$\text{cov}(aX, Y) = a \text{cov}(X, Y) \quad (2.317)$$

$$\text{cov}(X, Y + Z) = \text{cov}(X, Y) + \text{cov}(X, Z) \quad (2.318)$$

$$X, Y \text{ zijn o.o.} \implies \text{cov}(X, Y) = 0 \quad (2.319)$$

De **correlatiecoëfficiënt** van twee stochasten (notatie $\rho(X, Y)$ of $\text{cor}(X, Y)$) wordt gegeven door:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{var}(X)\text{var}(Y)}} \quad (2.320)$$

Dit is feitelijk een gestandaardiseerde covariantie (positieve schaling naar een getal tussen -1 en 1) waardoor varianties van stochasten met verschillende betekenissen met elkaar vergeleken kunnen worden. Zo kunnen uitspraken worden gedaan als:

$$\rho(X, Y) = 1 \iff P(Y = aX + b) = 1 \quad (2.321)$$

voor zekere $a > 0$ en $b \in \mathbb{R}$

$$\rho(X, Y) = -1 \iff P(Y = aX + b) = 1 \quad (2.322)$$

voor zekere $a < 0$ en $b \in \mathbb{R}$

Discrete kansverdelingen

Als een stochast X maar één waarde (c) kan aannemen, heeft deze een **ontaarde- of gedegeneerde verdeling**:

$$P(X = c) = 1 \quad E(X) = c \quad \text{var}(X) = 0 \quad (2.323)$$

Als een stochast twee waarden kan aannemen (succes of mislukking) met een kans p op succes, spreken we van een **alternatieve verdeling**. Het bijbehorende experiment (succes of mislukking met slaagkans p) noemen we een **Bernoulli-experiment**.

$$\begin{aligned} P(X = 1) &= p, \quad P(X = 0) = 1 - p \\ E(X) &= p \quad \text{var}(X) = p(1 - p) \end{aligned} \quad (2.324)$$

Als een stochast het aantal successen is bij een n -maal herhaald Bernoulli-experiment (met succeskans p), heeft deze een **binomiale verdeling**. Dit wordt wel genoteerd als een $B(n, p)$ -verdeling.

$$\begin{aligned} P(X = k) &= \binom{n}{k} p^k p^{n-k} \\ E(X) &= np \quad \text{var}(X) = np(1 - p) \end{aligned} \quad (2.325)$$

De eerste factor (spreek uit: n -boven- k) is het aantal verschillende mogelijke volgordes van successen en mislukkingen voor n successen en k experimenten. Deze **binomiaalcoëfficiënt** wordt als volgt berekend:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n - k)! k!} \quad (2.326)$$

Voor sommige toevallige discrete stochasten (zoals het aantal vervallen atomen in een minuut) geldt de **Poisson-verdeling**¹. Deze verdeling wordt genoteerd als $P(\mu)$ en heeft maar één parameter.

$$\begin{aligned} P(X = x) &= \frac{e^{-\mu} \mu^x}{x!} \\ E(X) &= \mu \quad \text{var}(X) = \mu \end{aligned} \quad (2.327)$$

¹naar Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

Continue kansverdelingen

Als de kansdichtheid van een stochast X op een zeker interval (a, b) een vaste waarde heeft, spreken we van een **uniforme- of homogene verdeling**, notatie $U(a, b)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} 1/(b-a) & a < x < b \\ 0 & \text{elders} \end{cases} \\ F(x) &= \begin{cases} (x-a)/(b-a) & a < x < b \\ 0 & x \leq a \\ 1 & x \geq b \end{cases} \\ E(X) &= \frac{b+a}{2} \quad \text{var}(X) = \frac{1}{12}(b-a)^2 \end{aligned} \quad (2.328)$$

De **exponentiële verdeling** (notatie $E(\lambda)$) wordt vaak gebruikt om wachttijden of levensduren te modelleren:

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ F(x) &= \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \\ E(X) &= \frac{1}{\lambda} \quad \text{var}(X) = \frac{1}{\lambda^2} \end{aligned} \quad (2.329)$$

Bijzonder veel stochasten laten zich modelleren met de **Gaussische- of normale verdeling**, notatie $N(\mu, \sigma^2)$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ E(X) &= \mu \quad \text{var}(X) = \sigma^2 \end{aligned} \quad (2.330)$$

De verdelingsfunctie behorende bij de normale verdeling is niet exact te evalueren, de benadering wordt vaak geschreven met de *error function*:

$$\begin{aligned}
 F(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int_{-\infty}^x \exp\left(-\frac{(x' - \mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx' \\
 &= \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x - \mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right)
 \end{aligned} \tag{2.331}$$

$$\operatorname{erf}(z) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt \tag{2.332}$$

Er gelden de volgende vuistregels ten aanzien van de kansmassa onder de normale verdeling:

Interval	Kans
$\mu - 0,6745\sigma, \mu + 0,6745\sigma$	50%
$\mu - \sigma, \mu + \sigma$	68%
$\mu - 2\sigma, \mu + 2\sigma$	95%
$\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma$	99,7%

Enkele rekenregels voor normaal verdeelde stochasten:

1. Als $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ dan $aX + b \sim N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.
2. Als X_1 en X_2 o.o. en normaal verdeeld zijn, dan is $X_1 + X_2$ ook normaal verdeeld.

De kansverdeling $N(0, 1)$ wordt de **standaardnormale verdeling** genoemd. De kansdichtheidsfunctie die daarbij hoort wordt met $\varphi(x)$ aangeduid, de verdelingsfunctie met $\Phi(x)$. De waarden van deze functies zijn op te zoeken in tabellen. Elke $N(\mu, \sigma^2)$ -verdeling heeft het volgende verband met de standaardnormale verdeling:

$$\text{Als } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ dan } \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \tag{2.333}$$

Volgens de **Centrale LimietStelling (CLS)** nadert de gestandaardiseerde som van een toenemend aantal stochasten naar een stochast met een normale verdeling, waarbij de kansverdeling van de oorspronkelijke stochasten niet ter zake doet (!). Formeel luidt de CLS:

Gegeven o.o. stochasten X_1, X_2, \dots, X_n met dezelfde kansverdeling met eindige verwachting μ en eindige variantie σ^2 . Dan geldt voor alle $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma \sqrt{n}} \leq x\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma} \sqrt{n} \leq x\right) = \Phi(x) \quad (2.334)$$

De **Student¹- of t-verdeling** wordt gebruikt voor het bepalen van betrouwbaarheidsintervallen voor μ . De verdeling wordt genoteerd als $T(f)$ of T_f . Zie voor de gamma-functie pagina 45.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\Gamma((f+1)/2)}{\Gamma(f/2) \sqrt{f\pi}} \left(1 + \frac{x^2}{f}\right)^{-(f+1)/2} \\ F(x) &= \frac{\Gamma((f+1)/2)}{\Gamma(f/2) \sqrt{f\pi} (1 + x^2/f)^{(f+1)/2}} \\ E(X) &= 0 \quad \text{var}(X) = \frac{f}{f-2} \end{aligned} \quad (2.335)$$

De **χ^2 -verdeling** wordt gebruikt om een betrouwbaarheidsinterval vast te stellen voor σ^2 . De verdeling wordt genoteerd als χ_f^2 -verdeling (chi kwadraat-verdeling met f vrijheidsgraden).

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{(1/2)^{f/2}}{\Gamma(f/2)} x^{f/2-1} e^{-x/2} \\ E(X) &= f \quad \text{var}(X) = 2f \end{aligned} \quad (2.336)$$

De **F-verdeling** of **Fisher-Snedecor verdeling²** wordt gebruikt voor het bepalen van een betrouwbaarheidsinterval van het quotiënt van twee varianties. Notatie: F_g^f (de F-verdeling met f het aantal vrijheidsgraden bij de teller en g het aantal vrijheidsgraden bij de noemer).

$$\begin{aligned} E(X) &= \frac{g}{g-2} \quad (\text{voor } f > 2) \\ \text{var}(X) &= \frac{2g^2(f+g-2)}{f(g-2)^2(g-4)} \quad (\text{voor } g > 4) \end{aligned} \quad (2.337)$$

¹pseudoniem van William Sealey Gosset (1876-1937)

²naar Ronald Aylmer Fisher (1890 - 1962) en George Waddel Snedecor (1881 - 1974)

Schatten

In de statistiek worden meetgegevens verwerkt om daaraan voorspellende of verklarende betekenis te geven. Bij metingen aan één variabele krijgen we een verzameling waarden die over het algemeen niet allemaal gelijk zijn. Als we die waarden X_1, X_2, \dots, X_n analyseren (**monovariante analyse**) is een mogelijk model:

$$X_i = \theta + U_i \quad (2.338)$$

Waarbij U_i de **toevallige meetfout** is bij de i -de waarneming. U heeft verwachting nul en variantie σ^2 . (Als de verwachting ongelijk aan nul is, spreken we van een **systematische meetfout**.) θ is de werkelijke waarde (de betekenis daarvan hangt van het model af).

Een veelgebruikte schatter voor de verwachtingswaarde van een stochast is het **gemiddelde** (notatie \bar{X}). Bij n waarnemingen geldt:

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (2.339)$$

$$E(\bar{X} - \theta)^2 = \text{var}(\bar{X}) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{SD}(X) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2.340)$$

Soms wordt ook de **mediaan** als schatter gebruikt, omdat deze minder schade van uitschieters ondervindt dan de gemiddelde waarde. Om de mediaan te vinden worden de gevonden waarden gesorteerd, waarna de middelste genomen wordt (of het gemiddelde van de middelste twee bij een even aantal meetwaarden).

Een schatter T van θ (wat elke parameter van een verdeling kan zijn) heet **zuiver** als:

$$E(T) = \theta \quad \text{voor alle } \theta \in \Theta \quad (2.341)$$

Bepalen of een schatter zuiver is, gaat dus door $E(T)$ te evalueren en te kijken of dit op θ uitkomt.

Zuiverheid is meestal niet voldoende om betere en slechtere schatters te vergelijken. Een ander bruikbaar criterium is de **verwachte kwadratische fout**:

$$E(T - \theta)^2 \quad \theta \in \Theta \quad (2.342)$$

Een schatter $T_1(X_1, X_2, \dots, X_N)$ is beter dan $T_2(X_1, X_2, \dots, X_N)$ als

$$E(T_1 - \theta)^2 \leq E(T_2 - \theta)^2 \quad \text{voor alle } \theta \in \Theta$$

en

$$E(T_1 - \theta)^2 < E(T_2 - \theta)^2 \quad \text{voor minstens één } \theta \in \Theta \quad (2.343)$$

Voor de volgende verdelingen worden de volgende (zuivere) schatters vaak gebruikt:

kansverdeling	te schatten parameter	veel gebruikte schatter
alternatief	p	\bar{X}
$B(n, p)$	p	X/n
$P(\mu)$	μ	\bar{X}
$U(a, b)$	a	$\min(X_1, X_2, \dots, X_n)$
	b	$\max(X_1, X_2, \dots, X_n)$
$E(\lambda)$	λ	$n^{-1}(n-1)\bar{X}^{-1}$
$N(\mu, \sigma^2)$	μ	\bar{X}
	σ^2	$\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$

Betrouwbaarheidsintervallen

Een **betrouwbaarheidsinterval** geeft het interval aan waarin de werkelijke waarde van een geschatte parameter met een gegeven zekerheid ligt. Gegeven een **foutmarge** α (soms ook a) ligt de werkelijke waarde van de geschatte parameter met **betrouwbaarheid** $1 - \alpha$ in het betrouwbaarheidsinterval. Gebruikelijke waarden voor α zijn 1%, 5% en 10%.

Laat $T_1 < T_2$ steekproeffuncties zijn (waargenomen waarden t_1 en t_2) waarvoor geldt:

$$P(T_1 < \theta < T_2) = 1 - \alpha \quad \text{voor alle } \theta \in \Theta \quad (2.344)$$

Dan noemen we (t_1, t_2) het (numerieke) betrouwbaarheidsinterval voor θ met betrouwbaarheid $1 - \alpha$.

Vaak wordt het betrouwbaarheidsinterval van μ gevraagd, dit is voor waargenomen \bar{x} en s (steekproef-standaarddeviatie) in n metingen:

$$\left(\bar{x} - c \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + c \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \quad (2.345)$$

Voor c geldt:

$$P(T_{n-1} \leq c) = 1 - \frac{1}{2}\alpha \quad (2.346)$$

Waarbij T_{n-1} verdeeld is volgens de Student-verdeling met $n - 1$ vrijheidsgraden. c is (bij gegeven n en α) op te zoeken in de tabel op pagina 117.

Correlatie en regressie

In een statistisch onderzoek kan het nuttig zijn om te bekijken of er een verband bestaat tussen twee variabelen. Dit kan met de **steekproefcorrelatiecoëfficiënt**, symbool r :

$$r = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{S_x S_y} = \frac{S_{xy}}{\sqrt{S_{xx} S_{yy}}} \quad (2.347)$$

$$\text{met } S_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$$

r neemt een waarde van -1 tot 1 aan, die de sterkte van het lineaire verband tussen de variabelen aangeeft (vergelijkbaar met de correlatiecoëfficiënt ρ). Hierbij zijn x en y gelijkwaardig.

Door een **regressie-analyse** uit te voeren op statistische gegevens, proberen we een verband te leggen tussen een **voorspellende- of verklarende variabele** x en een **responsvariabele** y . In dit compendium bekijken we alleen **enkelvoudige lineaire regressie**. Enkelvoudig omdat er maar één voorspellende variabele is, en lineair omdat we van een lineair verband uitgaan. In de praktijk wordt soms op basis van een 'krom' ogend verband tussen x en y lineaire regressie toegepast op x en een (logarithmisch of kwadratisch) getransformeerde y .

Een mogelijke techniek om lineaire regressie uit te voeren, is de **kleinste-kwadraten-methode**. Hierbij wordt het verband $y = \alpha + \beta x$ aangenomen, en α en β zo gekozen dat de som van de gekwadraterde fouten minimaal is. α en β worden gevonden met:

$$\alpha = \bar{y} - \beta \bar{x} \quad (2.348)$$

$$\beta = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} \quad (2.349)$$

Deze waarden zijn goed bruikbaar om een kansmodel op te stellen. De hierboven gevonden parameters zijn dan de zuivere schatters $\hat{\alpha}$ en $\hat{\beta}$. De werkelijke

lijn $y = \alpha + \beta x$ heet de **regressielijn** en is niet te tekenen (de parameters zijn immers onbekend). De schatting van deze lijn ($y = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$) heet **aangepaste rechte lijn**.

Zoals bij monovariante analyse gaan we er vanuit dat elke gemeten waarde voorspeld wordt door de regressielijn plus een zekere onbekende verstoring. Als de verstoring verdeeld is met gemiddelde waarde nul, dan geldt:

$$Y_i \sim N(\alpha + \beta x_i, \sigma^2) \quad (2.350)$$

Een zuivere schatter voor σ^2 is:

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta}x_i)^2 \quad (2.351)$$

Het betrouwbaarheidsinterval van $\hat{\beta}$ (betrouwbaarheid $1 - \alpha$) wordt gegeven door:

$$\left(\hat{\beta} - c \frac{S}{S_{xx}}, \hat{\beta} + c \frac{S}{S_{xx}} \right) \quad (2.352)$$

— Waarbij $S = \sqrt{S^2}$ en c gegeven door $P(T_{n-2} \leq c) = 1 - \frac{1}{2}\alpha$ (zie de tabel met de Student-verdeling).

Als er een lineair model is opgesteld, is het betrouwbaarheidsinterval van de verwachtingswaarde van $Y(x)$:

$$\left(\hat{\alpha} + \hat{\beta}x - cS \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \hat{\alpha} + \hat{\beta}x + cS \left\{ \frac{1}{n} + \frac{(x - \bar{x})^2}{S_{xx}} \right\}^{\frac{1}{2}} \right) \quad (2.353)$$

Tabellen

Binomiale verdeling (pag. 110)

In de tabel staat bij bepaalde n , p en c de kans

$$P(X \leq c) = \sum_{k=0}^c \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (2.354)$$

als X een $B(n, p)$ -verdeling heeft. (Alleen de eerste 4 decimalen gegeven, kansen ≥ 0.99995 weggelaten.)

Voor kansen $p > 1/2$ moet worden overgegaan op de verdeling van $n - X$, namelijk $B(n, 1 - p)$. Als bijvoorbeeld $X \sim B(9, 0.7)$ verdeeld is en $P(X \leq 2)$ gevraagd wordt, kun je schrijven: $X = 9 - Y$ waarbij $Y \sim B(9, 0.3)$ verdeeld is:

$$\begin{aligned} P(X \leq 2) &= P(9 - Y \leq 2) = P(Y \geq 7) = 1 - P(Y < 7) \\ &= 1 - P(Y \leq 6) = 1 - 0,9957 = 0,0043 \end{aligned} \quad (2.355)$$

$$P(X \leq c) = 1 - P(Y \leq n - (c + 1)) \text{ met } Y \sim B(n, 1 - p) \quad (2.356)$$

Poisson verdeling (pag. 114)

In de tabel staat bij bepaalde μ en c de kans

$$P(X \leq c) = \sum_{k=0}^c \frac{e^{-\mu} \mu^k}{k!} \quad (2.357)$$

als X een Poisson-verdeling heeft met parameter μ .

Standaardnormale verdeling (pag. 116)

De tabel geeft de verdelingsfunctie Φ voor een $N(0, 1)$ -verdeelde toevalsvariabele Z . Voor negatieve x geldt: $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$

$$\Phi(z) = P(Z \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-x^2/2} dx \quad (2.358)$$

Voor een willekeurige normale verdeling geldt:

$$\text{als } X \sim N(\mu, \sigma^2) \text{ dan } \frac{X - \mu}{\sigma} \sim N(0, 1) \quad (2.359)$$

Dus voor $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, geldt: (let op σ i.p.v. σ^2)

$$P(X \leq c) = \Phi\left(\frac{c - \mu}{\sigma}\right) \quad (2.360)$$

De laatste kolom geeft de dichtheid ϕ van de $N(0, 1)$ -verdeling

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2} \quad (2.361)$$

Student of t-verdeling (pag. 117)

In de tabel staat bij bepaalde f en d de waarde van t waarvoor geldt dat

$$P(T_f \leq t) = d \quad (2.362)$$

als T_f een Student-verdeling met f vrijheidsgraden heeft.

χ^2 -verdeling (pag. 118)

In de tabel staat bij bepaalde f en d de waarde van z waarvoor geldt:

$$P(X \leq z) = d \quad (2.363)$$

als X een χ^2 -verdeling heeft met f vrijheidsgraden.

F-verdeling (pag. 119)

In de drie tabellen staat voor resp. $d = 0.01$, $d = 0.025$ en $d = 0.05$ de waarde van z waarvoor geldt:

$$P(X > z) = d \quad (2.364)$$

als X een F_g^f -verdeling heeft (een F -verdeling met f vrijheidsgraden in de teller en g vrijheidsgraden in de noemer).

Binomiale verdeling

n	c	p										1/6	1/3	
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50			
2	0	9025	8100	7225	6400	5625	4900	4225	3600	3025	2500	6944	4444	
	1	9975	9900	9775	9600	9375	9100	8775	8400	7975	7500	9722	8889	
3	0	8574	7290	6141	5120	4219	3430	2746	2160	1664	1250	5787	2963	
	1	9928	9720	9392	8960	8438	7840	7183	6480	5748	5000	9259	7407	
	2	9999	9990	9966	9920	9844	9730	9571	9360	9089	8750	9954	9630	
4	0	8145	6561	5220	4096	3164	2401	1785	1296	0915	0625	4823	1975	
	1	9860	9477	8905	8192	7383	6517	5630	4752	3910	3125	8681	5926	
	2	9995	9963	9880	9728	9492	9163	8735	8208	7585	6875	9838	8889	
	3		9999	9995	9984	9961	9919	9850	9744	9590	9375	9992	9877	
5	0	7738	5905	4437	3277	2373	1681	1160	0778	0503	0313	4019	1317	
	1	9774	9185	8352	7373	6328	5282	4284	3370	2562	1875	8038	4609	
	2	9988	9914	9734	9421	8965	8369	7648	6826	5931	5000	9645	7901	
	3			9995	9978	9933	9844	9692	9460	9130	8688	8125	9967	9547
	4				9999	9997	9990	9976	9947	9898	9815	9688	9999	9959
6	0	7351	5314	3771	2621	1780	1176	0754	0467	0277	0156	3349	0878	
	1	9672	8857	7765	6554	5339	4202	3191	2333	1636	1094	7368	3512	
	2	9978	9842	9527	9011	8306	7443	6471	5443	4415	3438	9377	6804	
	3	9999	9987	9941	9830	9624	9295	8826	8208	7447	6563	9913	8999	
	4		9999	9996	9984	9954	9891	9777	9590	9308	8906	9993	9822	
	5				9999	9998	9993	9982	9959	9917	9844		9986	
7	0	6983	4783	3206	2097	1335	0824	0490	0280	0152	0078	2791	0585	
	1	9556	8503	7166	5767	4449	3294	2338	1586	1024	0625	6698	2634	
	2	9962	9743	9262	8520	7564	6471	5323	4199	3164	2266	9042	5706	
	3	9998	9973	9879	9667	9294	8740	8002	7102	6083	5000	9824	8267	
	4		9998	9988	9953	9871	9712	9444	9037	8471	7734	9980	9547	
	5			9999	9996	9987	9962	9910	9812	9643	9375	9999	9931	
	6					9999	9998	9994	9984	9963	9922		9995	
8	0	6634	4305	2725	1678	1001	0576	0319	0168	0084	0039	2326	0390	
	1	9428	8131	6572	5033	3671	2553	1691	1064	0632	0352	6047	1951	
	2	9942	9619	8948	7969	6785	5518	4278	3154	2201	1445	8652	4682	
	3	9996	9950	9786	9437	8862	8059	7064	5941	4770	3633	9693	7414	
	4		9996	9971	9896	9727	9420	8939	8263	7396	6367	9954	9121	
	5			9998	9988	9958	9887	9747	9502	9115	8555	9996	9803	
	6				9999	9996	9987	9964	9915	9819	9648		9974	
7					9999	9998	9993	9983	9961			9998		

Voorbeeld:

Als $X \sim B(6, 0.25)$ dan $P(X \leq 2) = 0,8306$

n	c	p										1/6	1/3
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50		
9	0	6302	3874	2316	1342	0751	0404	0207	0101	0046	0020	1938	0260
	1	9288	7748	5995	4362	3003	1960	1211	0705	0385	0195	5427	1431
	2	9916	9470	8591	7382	6007	4628	3373	2318	1495	0898	8217	3772
	3	9994	9917	9661	9144	8343	7297	6089	4826	3614	2539	9520	6503
	4		9991	9944	9804	9511	9012	8283	7334	6214	5000	9910	8552
	5		9999	9994	9969	9900	9747	9464	9006	8342	7461	9989	9576
	6				9997	9987	9957	9888	9750	9502	9102	9999	9917
	7					9999	9996	9986	9962	9909	9805		9990
10	8						9999	9997	9992	9980		9999	
	0	5987	3487	1969	1074	0563	0282	0135	0060	0025	0010	1615	0173
	1	9139	7361	5443	3758	2440	1493	0860	0464	0233	0107	4845	1040
	2	9885	9298	8202	6778	5256	3828	2616	1673	0996	0547	7752	2991
	3	9990	9872	9500	8791	7759	6496	5138	3823	2660	1719	9303	5593
	4	9999	9984	9901	9672	9219	8497	7515	6331	5044	3770	9845	7869
	5		9999	9986	9936	9803	9527	9051	8338	7384	6230	9976	9234
	6			9999	9991	9965	9894	9740	9452	8980	8281	9997	9803
11	7				9999	9996	9984	9952	9877	9726	9453		9966
	8						9999	9995	9983	9955	9893		9996
	9							9999	9997	9990			
	0	5688	3138	1673	0859	0422	0198	0088	0036	0014	0005	1346	0116
	1	8981	6974	4922	3221	1971	1130	0606	0302	0139	0059	4307	0751
	2	9848	9104	7788	6174	4552	3127	2001	1189	0652	0327	7268	2341
	3	9984	9815	9306	8389	7133	5696	4256	2963	1911	1133	9044	4726
	4	9999	9972	9841	9496	8854	7897	6683	5328	3971	2744	9755	7110
12	5		9997	9973	9883	9657	9218	8513	7535	6331	5000	9954	8779
	6			9997	9980	9924	9784	9499	9006	8262	7256	9994	9614
	7				9998	9988	9957	9878	9707	9390	8867	9999	9912
	8					9999	9994	9980	9941	9852	9673		9986
	9							9998	9993	9978	9941		9999
	10								9998	9995			
	0	5404	2824	1422	0687	0317	0138	0057	0022	0008	0002	1122	0077
	1	8816	6590	4435	2749	1584	0850	0424	0196	0083	0032	3813	0540
2	9804	8891	7358	5583	3907	2528	1513	0834	0421	0193	6774	1811	
3	9978	9744	9078	7946	6488	4925	3467	2253	1345	0730	8748	3931	
4	9998	9957	9761	9274	8424	7237	5833	4382	3044	1938	9636	6315	
5		9995	9954	9806	9456	8822	7873	6652	5269	3872	9921	8223	
6		9999	9993	9961	9857	9614	9154	8418	7393	6128	9987	9336	
13	7			9999	9994	9972	9905	9745	9427	8883	8062	9998	9812
	8				9999	9996	9983	9944	9847	9644	9270		9961
	9						9998	9992	9972	9921	9807		9995
	10							9999	9997	9989	9968		
	11								9999	9998	9998		
										9999	9998		

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

<i>n</i>	<i>c</i>	<i>p</i>										1/6	1/3		
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50				
13	0	5133	2542	1209	0550	0238	0097	0037	0013	0004	0001	0935	0051		
	1	8646	6213	3983	2336	1267	0637	0296	0126	0049	0017	3365	0385		
	2	9755	8661	6920	5017	3326	2025	1132	0579	0269	0112	6281	1387		
	3	9969	9658	8820	7473	5843	4206	2783	1686	0929	0461	8419	3224		
	4	9997	9935	9658	9009	7940	6543	5005	3530	2279	1334	9488	5520		
	5		9991	9925	9700	9198	8346	7159	5744	4268	2905	9873	7587		
	6			9999	9987	9930	9757	9376	8705	7712	6437	5000	9976	8965	
	7				9998	9988	9944	9818	9538	9023	8212	7095	9997	9653	
	8					9998	9990	9960	9874	9679	9302	8666		9912	
	9						9999	9993	9975	9922	9797	9539		9984	
	10							9999	9997		9987	9959	9888	9998	
	11									9999	9995	9983			
12											9999				
14	0	4877	2288	1028	0440	0178	0068	0024	0008	0002	0001	0779	0034		
	1	8470	5846	3567	1979	1010	0475	0205	0081	0029	0009	2960	0274		
	2	9699	8416	6479	4481	2811	1608	0839	0398	0170	0065	5795	1053		
	3	9958	9559	8535	6982	5213	3552	2205	1243	0632	0287	8063	2612		
	4	9996	9908	9533	8702	7415	5842	4227	2793	1672	0898	9310	4755		
	5			9985	9885	9561	8883	7805	6405	4859	3373	2120	9809	6898	
	6				9998	9978	9884	9617	9067	8164	6925	5461	3953	9959	8505
	7					9997	9976	9897	9685	9247	8499	7414	6047	9993	9424
	8						9996	9978	9917	9757	9417	8811	7880	9999	9826
	9							9997	9983	9940	9825	9574	9102		9960
	10								9998	9989	9961	9886	9713		9993
	11									9999	9994	9978	9935		9999
12										9999	9997	9991			
13												9999			
15	0	4633	2059	0874	0352	0134	0047	0016	0005	0001	0000	0649	0023		
	1	8290	5490	3186	1671	0802	0353	0142	0052	0017	0005	2596	0194		
	2	9638	8159	6042	3980	2361	1268	0617	0271	0107	0037	5322	0794		
	3	9945	9444	8227	6482	4613	2969	1727	0905	0424	0176	7685	2092		
	4	9994	9873	9383	8358	6865	5155	3519	2173	1204	0592	9102	4041		
	5	9999	9978	9832	9389	8516	7216	5643	4032	2608	1509	9726	6184		
	6			9997	9964	9819	9434	8689	7548	6098	4522	3036	9934	7970	
	7				9994	9958	9827	9500	8868	7869	6535	5000	9987	9118	
	8					9999	9992	9958	9848	9578	9050	8182	6964	9998	9692
	9						9999	9992	9963	9876	9662	9231	8491		9915
	10							9999	9993	9972	9907	9745	9408		9982
	11								9999	9995	9981	9937	9824		9997
12									9999	9997	9989	9963			
13											9999	9995			

n	c	p										1/6	1/3
		0.05	0.10	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35	0.40	0.45	0.50		
20	0	3585	1216	0388	0115	0032	0008	0002	0000	0000	0000	0261	0003
	1	7358	3917	1756	0692	0243	0076	0021	0005	0001	0000	1304	0033
	2	9245	6769	4049	2061	0913	0355	0121	0036	0009	0002	3287	0176
	3	9841	8670	6477	4114	2252	1071	0444	0160	0049	0013	5665	0604
	4	9974	9568	8298	6296	4148	2375	1182	0510	0189	0059	7687	1515
	5	9997	9887	9327	8042	6172	4164	2454	1256	0553	0207	8982	2972
	6		9976	9781	9133	7858	6080	4166	2500	1299	0577	9629	4793
	7		9996	9941	9679	8982	7723	6010	4159	2520	1316	9887	6615
	8		9999	9987	9900	9591	8867	7624	5956	4143	2517	9972	8095
	9			9998	9974	9861	9520	8782	7553	5914	4119	9994	9081
	10				9994	9961	9829	9468	8725	7507	5881	9999	9624
	11				9999	9991	9949	9804	9435	8692	7483		9870
	12					9998	9987	9940	9790	9420	8684		9963
	13						9997	9985	9935	9786	9423		9991
	14							9997	9984	9936	9793		9998
	15								9997	9985	9941		
	16									9997	9987		
17										9998			
25	0	2774	0718	0172	0038	0008	0001	0000	0000	0000	0105	0000	
	1	6424	2712	0931	0274	0070	0016	0003	0001	0000	0000	0629	0005
	2	8729	5371	2537	0982	0321	0090	0021	0004	0001	0000	1887	0035
	3	9659	7636	4711	2340	0962	0332	0097	0024	0005	0001	3816	0149
	4	9928	9020	6821	4207	2137	0905	0320	0095	0023	0005	5937	0462
	5	9988	9666	8385	6167	3783	1935	0826	0294	0086	0020	7720	1120
	6	9998	9905	9305	7800	5611	3407	1734	0736	0258	0073	8908	2215
	7		9977	9745	8909	7265	5118	3061	1536	0639	0216	9553	3703
	8		9995	9920	9532	8506	6769	4668	2735	1340	0539	9843	5376
	9		9999	9979	9827	9287	8106	6303	4246	2424	1148	9953	6956
	10			9995	9944	9703	9022	7712	5858	3843	2122	9988	8220
	11			9999	9985	9893	9558	8746	7323	5426	3450	9997	9082
	12				9996	9966	9825	9396	8462	6937	5000	9999	9585
	13				9999	9991	9940	9745	9222	8173	6550		9836
	14					9998	9982	9907	9656	9040	7878		9944
	15						9995	9971	9868	9560	8852		9984
	16						9999	9992	9957	9826	9461		9996
17							9998	9988	9942	9784		9999	
18								9997	9984	9927			
19								9999	9996	9980			
20									9999	9995			
21										9999			

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Algemeen

Poisson verdeling

c	.10	.20	.30	.40	.50 ^{μ}	.60	.70	.80	.90	1.00
0	.905	.819	.741	.670	.607	.549	.497	.449	.407	.368
1	.995	.982	.963	.938	.910	.878	.844	.809	.772	.736
2	1.000	.999	.996	.992	.986	.977	.966	.953	.937	.920
3	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.997	.994	.991	.987	.981
4	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.996
5	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999
6	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

c	1.10	1.20	1.30	1.40	1.50 ^{μ}	1.60	1.70	1.80	1.90	2.00
0	.333	.301	.273	.247	.223	.202	.183	.165	.150	.135
1	.699	.663	.627	.592	.558	.525	.493	.463	.434	.406
2	.900	.879	.857	.833	.809	.783	.757	.731	.704	.677
3	.974	.966	.957	.946	.934	.921	.907	.891	.875	.857
4	.995	.992	.989	.986	.981	.976	.970	.964	.956	.947
5	.999	.998	.998	.997	.996	.994	.992	.990	.987	.983
6	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999	.998	.997	.997	.995
7	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999
8	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

c	2.10	2.20	2.30	2.40	2.50 ^{μ}	2.60	2.70	2.80	2.90	3.00
0	.122	.111	.100	.091	.082	.074	.067	.061	.055	.050
1	.380	.355	.331	.308	.287	.267	.249	.231	.215	.199
2	.650	.623	.596	.570	.544	.518	.494	.469	.446	.423
3	.839	.819	.799	.779	.758	.736	.714	.692	.670	.647
4	.938	.928	.916	.904	.891	.877	.863	.848	.832	.815
5	.980	.975	.970	.964	.958	.951	.943	.935	.926	.916
6	.994	.993	.991	.988	.986	.983	.979	.976	.971	.966
7	.999	.998	.997	.997	.996	.995	.993	.992	.990	.988
8	1.000	1.000	.999	.999	.999	.999	.998	.998	.997	.996
9	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999	.999
10	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

Voorbeeld:

Als $X \sim P(1.30)$ dan $P(X \leq 4) = 0,989$

c	3.10	3.20	3.30	3.40	3.50	3.60	3.70	3.80	3.90	4.00
0	.045	.041	.037	.033	.030	.027	.025	.022	.020	.018
1	.185	.171	.159	.147	.136	.126	.116	.107	.099	.092
2	.401	.380	.359	.340	.321	.303	.285	.269	.253	.238
3	.625	.603	.580	.558	.537	.515	.494	.473	.453	.433
4	.798	.781	.763	.744	.725	.706	.687	.668	.648	.629
5	.906	.895	.883	.871	.858	.844	.830	.816	.801	.785
6	.961	.955	.949	.942	.935	.927	.918	.909	.899	.889
7	.986	.983	.980	.977	.973	.969	.965	.960	.955	.949
8	.995	.994	.993	.992	.990	.988	.986	.984	.981	.979
9	.999	.998	.998	.997	.997	.996	.995	.994	.993	.992
10	1.000	1.000	.999	.999	.999	.999	.998	.998	.998	.997
11	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.999
12	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000

c	4.50	5.00	5.50	6.00	6.50	7.00	7.50	8.00	8.50	9.00
0	.011	.007	.004	.002	.002	.001	.001	.000	.000	.000
1	.061	.040	.027	.017	.011	.007	.005	.003	.002	.001
2	.174	.125	.088	.062	.043	.030	.020	.014	.009	.006
3	.342	.265	.202	.151	.112	.082	.059	.042	.030	.021
4	.532	.440	.358	.285	.224	.173	.132	.100	.074	.055
5	.703	.616	.529	.446	.369	.301	.241	.191	.150	.116
6	.831	.762	.686	.606	.527	.450	.378	.313	.256	.207
7	.913	.867	.809	.744	.673	.599	.525	.453	.386	.324
8	.960	.932	.894	.847	.792	.729	.662	.593	.523	.456
9	.983	.968	.946	.916	.877	.830	.776	.717	.653	.587
10	.993	.986	.975	.957	.933	.901	.862	.816	.763	.706
11	.998	.995	.989	.980	.966	.947	.921	.888	.849	.803
12	.999	.998	.996	.991	.984	.973	.957	.936	.909	.876
13	1.000	.999	.998	.996	.993	.987	.978	.966	.949	.926
14	1.000	1.000	.999	.999	.997	.994	.990	.983	.973	.959
15	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998	.995	.992	.986	.978
16	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.996	.993	.989
17	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.998	.997	.995
18	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	.999	.999	.998

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Standaardnormale verdeling

z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09	$\phi(z)$
0.0	5000	5040	5080	5120	5160	5199	5239	5279	5319	5359	0.3989
0.1	5398	5438	5478	5517	5557	5596	5636	5675	5714	5753	0.3970
0.2	5793	5832	5871	5910	5948	5987	6026	6064	6103	6141	0.3910
0.3	6179	6217	6255	6293	6331	6368	6406	6443	6480	6517	0.3814
0.4	6554	6591	6628	6664	6700	6736	6772	6808	6844	6879	0.3683
0.5	6915	6950	6985	7019	7054	7088	7123	7157	7190	7224	0.3521
0.6	7257	7291	7324	7357	7389	7422	7454	7486	7517	7549	0.3332
0.7	7580	7611	7642	7673	7704	7734	7764	7794	7823	7852	0.3123
0.8	7881	7910	7939	7967	7995	8023	8051	8078	8106	8133	0.2897
0.9	8159	8186	8212	8238	8264	8289	8315	8340	8365	8389	0.2661
1.0	8413	8438	8461	8485	8508	8531	8554	8577	8599	8621	0.2420
1.1	8643	8665	8686	8708	8729	8749	8770	8790	8810	8830	0.2179
1.2	8849	8869	8888	8907	8925	8944	8962	8980	8997	9015	0.1942
1.3	9032	9049	9066	9082	9099	9115	9131	9147	9162	9177	0.1714
1.4	9192	9207	9222	9236	9251	9265	9279	9292	9306	9319	0.1497
1.5	9332	9345	9357	9370	9382	9394	9406	9418	9429	9441	0.1295
1.6	9452	9463	9474	9484	9495	9505	9515	9525	9535	9545	0.1109
1.7	9554	9564	9573	9582	9591	9599	9608	9616	9625	9633	0.0940
1.8	9641	9649	9656	9664	9671	9678	9686	9693	9699	9706	0.0790
1.9	9713	9719	9726	9732	9738	9744	9750	9756	9761	9767	0.0656
2.0	9772	9778	9783	9788	9793	9798	9803	9808	9812	9817	0.0540
2.1	9821	9826	9830	9834	9838	9842	9846	9850	9854	9857	0.0440
2.2	9861	9864	9868	9871	9875	9878	9881	9884	9887	9890	0.0355
2.3	9893	9896	9898	9901	9904	9906	9909	9911	9913	9916	0.0283
2.4	9918	9920	9922	9925	9927	9929	9931	9932	9934	9936	0.0224
2.5	9938	9940	9941	9943	9945	9946	9948	9949	9951	9952	0.0175
2.6	9953	9955	9956	9957	9959	9960	9961	9962	9963	9964	0.0136
2.7	9965	9966	9967	9968	9969	9970	9971	9972	9973	9974	0.0104
2.8	9974	9975	9976	9977	9977	9978	9979	9979	9980	9981	0.0079
2.9	9981	9982	9982	9983	9984	9984	9985	9985	9986	9986	0.0060
3.0	9987	9987	9987	9988	9988	9989	9989	9989	9990	9990	0.0044
3.1	9990	9991	9991	9991	9992	9992	9992	9992	9993	9993	0.0033
3.2	9993	9993	9994	9994	9994	9994	9994	9995	9995	9995	0.0024
3.3	9995	9995	9995	9996	9996	9996	9996	9996	9996	9997	0.0017
3.4	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9997	9998	0.0012
3.5	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	9998	0.0009
3.6	9998	9998	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	9999	0.0006

Voorbeelden:

- $\Phi(1,76) = P(Z \leq 1,76) = 0,9608$
- Als $X \sim N(4, 25)$ dan is $P(X \leq 3) = \Phi\left(\frac{3-4}{5}\right) = \Phi(-0,2) = 1 - \Phi(0,2) = 1 - 0,5793 = 0,4207$
- Als $X \sim N(4, 25)$ dan is $P(X \leq 6) = \Phi\left(\frac{6-4}{5}\right) = \Phi(0,4) = 0,6554$

Student-verdeling

$d =$	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.9975	0.999	0.9995
$f=1$	3.08	6.31	12.71	31.82	63.66	127.32	318.33	636.67
$f=2$	1.89	2.92	4.30	6.96	9.92	14.09	22.33	31.60
$f=3$	1.64	2.35	3.18	4.54	5.84	7.45	10.21	12.92
$f=4$	1.53	2.13	2.78	3.75	4.60	5.60	7.17	8.61
$f=5$	1.48	2.02	2.57	3.37	4.03	4.77	5.89	6.87
$f=6$	1.44	1.94	2.45	3.14	3.71	4.32	5.21	5.96
$f=7$	1.41	1.89	2.36	3.00	3.50	4.03	4.79	5.41
$f=8$	1.40	1.86	2.31	2.90	3.36	3.83	4.50	5.04
$f=9$	1.38	1.83	2.26	2.82	3.25	3.69	4.30	4.78
$f=10$	1.37	1.81	2.23	2.76	3.17	3.58	4.14	4.59
$f=11$	1.36	1.80	2.20	2.72	3.11	3.50	4.02	4.44
$f=12$	1.36	1.78	2.18	2.68	3.05	3.43	3.93	4.32
$f=13$	1.35	1.77	2.16	2.65	3.01	3.37	3.85	4.22
$f=14$	1.35	1.76	2.14	2.62	2.98	3.33	3.79	4.14
$f=15$	1.34	1.75	2.13	2.60	2.95	3.29	3.73	4.07
$f=16$	1.34	1.75	2.12	2.58	2.92	3.25	3.69	4.02
$f=17$	1.33	1.74	2.11	2.57	2.90	3.22	3.65	3.97
$f=18$	1.33	1.73	2.10	2.55	2.88	3.20	3.61	3.92
$f=19$	1.33	1.73	2.09	2.54	2.86	3.17	3.58	3.88
$f=20$	1.33	1.72	2.09	2.53	2.85	3.15	3.55	3.85
$f=21$	1.32	1.72	2.08	2.52	2.83	3.14	3.53	3.82
$f=22$	1.32	1.72	2.07	2.51	2.82	3.12	3.51	3.79
$f=23$	1.32	1.71	2.07	2.50	2.81	3.10	3.48	3.77
$f=24$	1.32	1.71	2.06	2.49	2.80	3.09	3.47	3.75
$f=25$	1.32	1.71	2.06	2.49	2.79	3.08	3.45	3.73
$f=26$	1.31	1.71	2.06	2.48	2.78	3.07	3.44	3.71
$f=27$	1.31	1.70	2.05	2.47	2.77	3.06	3.42	3.69
$f=28$	1.31	1.70	2.05	2.47	2.76	3.05	3.41	3.67
$f=29$	1.31	1.70	2.05	2.46	2.76	3.04	3.40	3.66
$f=30$	1.31	1.70	2.04	2.46	2.75	3.03	3.39	3.65
$f=40$	1.30	1.68	2.02	2.42	2.70	2.97	3.31	3.55
$f=50$	1.30	1.68	2.01	2.40	2.68	2.94	3.26	3.50
$f=100$	1.29	1.66	1.98	2.36	2.63	2.87	3.17	3.39
$f=200$	1.29	1.65	1.97	2.35	2.60	2.84	3.13	3.34
$f=\infty$	1.28	1.64	1.96	2.33	2.58	2.81	3.09	3.29

Voorbeeld:

$$\begin{aligned}
 P(-1.94 < T_6 < 1.94) &= P(T_6 < 1.94) - P(T_6 < -1.94) = \\
 0.95 - P(T_6 > 1.94) &= 0.95 - 1 + P(T_6 \leq 1.94) = \\
 0.95 - 1 + 0.95 &= 0.90
 \end{aligned}$$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

χ^2 -verdeling

f	d											
	.005	.010	.025	.050	.100	.250	.750	.900	.950	.975	.990	.995
1	.000	.000	.001	.004	.016	.102	1.32	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.010	.020	.051	.103	.211	.575	2.77	4.61	5.99	7.38	9.21	10.6
3	.072	.115	.216	.352	.584	1.21	4.11	6.25	7.81	9.35	11.3	12.8
4	.207	.297	.484	.711	1.06	1.92	5.39	7.78	9.49	11.1	13.3	14.9
5	.412	.554	.831	1.15	1.61	2.67	6.63	9.24	11.1	12.8	15.1	16.7
6	.676	.872	1.24	1.64	2.20	3.45	7.84	10.6	12.6	14.4	16.8	18.5
7	.989	1.24	1.69	2.17	2.83	4.25	9.04	12.0	14.0	16.0	18.5	20.3
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	5.07	10.2	13.4	15.5	17.5	20.1	22.0
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	5.90	11.4	14.7	16.9	19.0	21.7	23.6
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	6.74	12.5	16.0	18.3	20.5	23.2	25.2
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	7.58	13.7	17.3	19.7	21.9	24.7	26.8
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	8.44	14.8	18.5	21.0	23.3	26.2	28.3
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	9.30	16.0	19.8	22.4	24.7	27.7	29.8
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	10.2	17.1	21.1	23.7	26.1	29.1	31.3
15	4.60	5.23	6.26	7.26	8.55	11.0	18.2	22.3	25.0	27.5	30.6	32.8
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	11.9	19.4	23.5	26.3	28.8	32.0	34.3
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.1	12.8	20.5	24.8	27.6	30.2	33.4	35.7
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.9	13.7	21.6	26.0	28.9	31.5	34.8	37.2
19	6.84	7.63	8.91	10.1	11.7	14.6	22.7	27.2	30.1	32.9	36.2	38.6
20	7.43	8.26	9.59	10.9	12.4	15.5	23.8	28.4	31.4	34.1	37.6	40.0
21	8.03	8.90	10.3	11.6	13.2	16.3	24.9	29.6	32.7	35.5	38.9	41.4
22	8.64	9.50	11.0	12.3	14.0	17.2	26.0	30.8	33.9	36.8	40.3	42.8
23	9.26	10.2	11.7	13.1	14.8	18.1	27.1	32.0	35.2	38.1	41.6	44.2
24	9.89	10.9	12.4	13.8	15.7	19.0	28.2	33.2	36.4	39.4	43.0	45.6
25	10.5	11.5	13.1	14.6	16.5	19.9	29.3	34.4	37.7	40.6	44.3	46.9
26	11.2	12.2	13.8	15.4	17.3	20.8	30.4	35.6	38.9	41.9	45.6	48.3
27	11.8	12.9	14.6	16.2	18.1	21.7	31.5	36.7	40.1	43.2	47.0	49.6
28	12.5	13.6	15.3	16.9	18.9	22.7	32.6	37.9	41.3	44.5	48.3	51.0
29	13.1	14.3	16.0	17.7	19.8	23.6	33.7	39.1	42.6	45.7	49.6	52.3
30	13.8	15.0	16.8	18.5	20.6	24.5	34.8	40.3	43.8	47.0	50.9	53.7
40	20.7	22.2	24.4	26.5	29.1	33.7	45.6	51.8	55.8	59.3	63.7	66.8
50	28.0	29.7	32.4	34.8	37.7	42.9	56.3	63.2	67.5	71.4	76.2	79.5
60	35.5	37.5	40.5	43.2	46.5	52.3	67.0	74.4	79.1	83.3	88.4	92.0
70	43.3	45.4	48.8	51.7	55.3	61.7	77.6	85.5	90.5	95.0	100.4	104.2
80	51.2	53.5	57.2	60.4	64.3	71.1	88.1	96.6	101.9	106.6	112.3	116.3
90	59.2	61.8	65.6	69.1	73.3	80.6	98.6	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3
100	67.3	70.1	74.2	77.9	82.4	90.1	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2

Voorbeeld:

$$P(1.24 < \chi_7^2 \leq 4.25) = P(\chi_7^2 \leq 4.25) - P(\chi_7^2 \leq 1.24) = 0,250 - 0,010 = 0,240$$

F-verdeling

		$d = 0.01$								
		$f = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$g=1$		4052	5000	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6023
2		98.5	99.0	99.2	99.2	99.3	99.3	99.4	99.4	99.4
3		34.1	30.8	29.5	28.7	28.2	27.9	27.7	27.5	27.3
4		21.2	18.0	16.7	16.0	15.5	15.2	15.0	14.8	14.7
5		16.3	13.3	12.1	11.4	11.0	10.7	10.5	10.3	10.2
6		13.7	10.9	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98
7		12.2	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72
8		11.3	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91
9		10.6	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35
10		10.0	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94
12		9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39
15		8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89
20		8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46
30		7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07
40		7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89
60		7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72
120		6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56
∞		6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41

		$f = 10$	12	15	20	30	40	60	120	∞
$g=1$		6056	6106	6157	6209	6261	6287	6313	6339	6366
2		99.4	99.4	99.4	99.4	99.5	99.5	99.5	99.5	99.5
3		27.2	27.1	26.9	26.7	26.5	26.4	26.3	26.2	26.1
4		14.5	14.4	14.2	14.0	13.8	13.7	13.7	13.6	13.5
5		10.1	9.89	9.72	9.55	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
6		7.87	7.72	7.56	7.40	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
7		6.62	6.47	6.31	6.16	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
8		5.81	5.67	5.52	5.36	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
9		5.26	5.11	4.96	4.81	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
10		4.85	4.71	4.56	4.41	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
12		4.30	4.16	4.01	3.86	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
15		3.80	3.67	3.52	3.37	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
20		3.37	3.23	3.09	2.94	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
30		2.98	2.84	2.70	2.55	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
40		2.80	2.66	2.52	2.37	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
60		2.63	2.50	2.35	2.20	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120		2.47	2.34	2.19	2.03	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
∞		2.32	2.18	2.04	1.88	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Voorbeeld:

Als X een F_4^{20} -verdeling heeft dan geldt $P(X > 14, 0) = 0,01$.

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

		$d = 0.025$								
		$f = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
$g=1$		648	800	864	900	922	937	948	957	963
2		38.5	39.0	39.2	39.2	39.3	39.3	39.4	39.4	39.4
3		17.4	16.0	15.4	15.1	14.9	14.7	14.6	14.5	14.5
4		12.2	10.6	9.98	9.60	9.36	9.20	9.07	8.98	8.90
5		10.0	8.43	7.76	7.39	7.15	6.98	6.85	6.76	6.68
6		8.81	7.26	5.60	6.23	5.99	5.82	5.70	5.60	5.52
7		8.07	6.54	5.89	5.52	5.29	5.12	4.99	4.90	4.82
8		7.57	6.05	5.42	5.05	4.82	4.65	4.53	4.43	4.36
9		7.21	5.71	5.08	4.72	4.48	4.32	4.20	4.10	4.03
10		6.94	5.46	4.83	4.47	4.24	4.07	3.95	3.85	3.78
12		6.55	5.10	4.47	4.12	3.89	3.73	3.61	3.51	3.44
15		6.20	4.77	4.15	3.80	3.58	3.41	3.29	3.20	3.12
20		5.87	4.46	3.86	3.51	3.29	3.13	3.01	2.91	2.84
30		5.57	4.18	3.59	3.25	3.03	2.87	2.75	2.65	2.57
40		5.42	4.05	3.46	3.13	2.90	2.74	2.62	2.53	2.45
60		5.29	3.93	3.34	3.01	2.79	2.63	2.51	2.41	2.33
120		5.15	3.80	3.33	2.89	2.67	2.52	2.39	2.30	2.22
∞		5.02	3.69	3.12	2.79	2.67	2.41	2.29	2.19	2.11

		$f = 10$	12	15	20	30	40	60	120	∞
$g=1$		969	977	985	993	1001	1006	1010	1014	1018
2		39.4	39.4	39.4	39.4	39.5	39.5	39.5	39.5	39.5
3		14.4	14.3	14.3	14.2	14.1	14.0	14.0	13.9	13.9
4		8.84	8.75	8.66	8.56	8.46	8.41	8.36	8.31	8.26
5		6.62	6.52	6.43	6.33	6.23	6.18	6.12	6.07	6.02
6		5.46	5.37	5.27	5.17	5.07	5.01	4.96	4.90	4.85
7		4.76	4.67	4.57	4.47	4.36	4.31	4.25	4.20	4.14
8		4.30	4.20	4.10	4.00	3.89	3.84	3.78	3.73	3.67
9		3.96	3.87	3.77	3.67	3.56	3.51	3.45	3.39	3.33
10		3.72	3.62	3.52	3.42	3.31	3.26	3.20	3.14	3.08
12		3.37	3.28	3.18	3.07	2.96	2.91	2.85	2.79	2.72
15		3.06	2.96	2.86	2.76	2.64	2.59	2.52	2.46	2.40
20		2.77	2.68	2.57	2.46	2.35	2.29	2.22	2.16	2.09
30		2.51	2.41	2.31	2.20	2.07	2.01	1.94	1.87	1.79
40		2.39	2.29	2.18	2.07	1.94	1.88	1.80	1.72	1.64
60		2.27	2.17	2.06	1.94	1.82	1.74	1.67	1.58	1.48
120		2.16	2.05	1.94	1.82	1.69	1.61	1.53	1.43	1.31
∞		2.05	1.94	1.83	1.71	1.57	1.48	1.39	1.27	1.00

$g=$	$d = 0.05$								
	$f = 1$	2	3	4	5	6	7	8	9
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18.5	19.0	19.2	19.2	19.3	19.3	19.4	19.4	19.4
3	10.1	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

$g=$	$f = 10$	12	15	20	30	40	60	120	∞
1	242	244	246	248	250	251	252	253	254
2	19.4	19.4	19.4	19.4	19.5	19.5	19.5	19.5	19.5
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.50	4.46	4.43	4.40	4.37
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
7	3.64	3.57	3.51	3.44	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
15	2.54	2.48	2.40	2.33	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
20	2.35	2.28	2.20	2.12	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
120	1.91	1.83	1.75	1.66	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25
∞	1.83	1.75	1.67	1.57	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Hoofdstuk 3 Informatica

Inhoudsopgave

Digitale techniek	123
Begrippen	123
Operaties	126
Combinatorische circuits	133
Sequentiële bouwstenen	141
Timing	152
Spanningen	152
ASCII	154
Computerorganisatie en architectuur	157
Processoren en Bussen	157
Cache geheugen	165
Intern geheugen	170
Input/Output	172
Memory Management	174
Computernetwerken	177
Internet	177
Applicatielaag	180
Transportlaag	193
Netwerklaag	201
Linklaag	208
Fysieke laag	212
Programmeren	219
Sequentieel programmeren	219
Objectgeïntereerd programmeren	228
Typen en operatoren	236
De printf() functie	239

Digitale techniek

Begrippen

In een **digitaal** (van *digitus*, vinger) systeem komen alleen maar discreetwaardige signalen voor (telbaar). Dit in tegenstelling tot een analoog systeem, waarin de signalen reëelwaardig zijn (overaafelbaar). De meeste digitale systemen werken met binaire signalen. Een signaal kan dan twee waarden aannemen: hoog of laag, waar of onwaar, H of L, 1 of 0. Het werken met binaire signalen beperkt weliswaar de informatiecapaciteit per symbool, maar vereenvoudigt de verwerking. In het vervolg zullen we alleen binaire digitale systemen bespreken (in de vakliteratuur worden de begrippen digitaal en binair vaak door elkaar gebruikt).

Eén binair signaal wordt **bit** genoemd (b). Daarmee kunnen $2^1 = 2$ getallen worden weergegeven (H en L). Met 4 bits, een zogeheten **nibble**, kunnen $2^4 = 16$ getallen worden weergegeven. Met 8 bits, een **byte** (B), kunnen $2^8 = 256$ verschillende getallen worden gemaakt. Met n bits kunnen dus 2^n combinaties worden gemaakt.

Om hoeveelheden van gegevens aan te geven worden de voorvoegsels kilo- (k) voor 1024 , mega- (M) voor $1024^2 = 1048576$ en giga- (G) voor $1024^3 = 1073741824$ gebruikt. 2,4 MB is dus $2,4 \cdot 1024^2 = 2516582$ bytes. 12 kbps is dus $12 \cdot 1024 = 12288$ bits (!) per seconde (1536 bytes). Let erop dat de groottes van harde schijven vaak weer in 'echte' (in 1000-tallen) Gigabytes worden gegeven.

In een fysiek elektrisch systeem worden digitale signalen vaak door spanningen (bijvoorbeeld 0 en V_{cc}) overgedragen. Bij het implementeren van een digitaal systeem zijn deze spanningen en overgangsverschijnselen van belang, zie hiervoor pagina 152. Voor het abstract ontwerpen van een digitaal systeem is het eenvoudiger naar de binaire variabelen te kijken. Het rekenen aan digitale systemen kan met de booleaanse algebra (zie pag. 128).

Tekst

Een in computers gangbare code om tekst op te slaan op een digitaal medium is **ASCII** (American Standard Code for Information Interchange). Dit is een 7 bits brede code, waarmee 128 karakters gerepresenteerd kunnen worden (waarvan 95 drukbaar, en 33 zgn. *control characters*). Zie pag. 154.

Tegenwoordig wordt steeds meer de Unicode gebruikt. Dit is een 16 bits code, met symbolen en tekens uit allerlei talen.

Getallen

Getallen kunnen in verschillende **talstelsels** worden genoteerd:

Naam	Cijfers
Binair	(0, 1)
Ternair	(0, 1, 2)
:	
Octaal	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7)
Decimaal	(0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)
Hexadecimaal	(0 ... 9, A, B, C, D, E, F)

De *base* of **radix** van een getal zegt met welke systeem gewerkt wordt (een getal met radix 10 is een decimaal getal). Als niet uit de context duidelijk is met welke radix een getal is genoteerd, wordt dit in subscript aangegeven. $(1234)_8$ is dus het octale getal 1234.

Getallen gerepresenteerd in het ene talstelsel kunnen altijd naar een ander talstelsel worden omgeschreven, hoewel het aantal benodigde decimalen in de regel anders is.

Om een getal in een willekeurig talstelsel om te zetten naar het decimale talstelsel kan de volgende methode worden gebruikt: Laat A_{n-1} t/m A_{-m} de coëfficiënten zijn van een getal met n cijfers rechts van de komma en m cijfers links, en r de radix. Dan geldt:

$$\begin{aligned} & (A_{n-1}A_{n-2} \dots A_1A_0A_{-1} \dots A_{-m} + 1_{A-m})_r & (3.1) \\ & = (A_{n-1} \cdot r^{n-1} + A_{n-2} \cdot r^{n-2} + \dots + A_1 \cdot r^1 + A_0 \cdot r^0 \\ & \quad + A_{-1} \cdot r^{-1} + \dots + A_{-m+1} \cdot r^{-m+1} + A_{-m} \cdot r^{-m})_{10} \end{aligned}$$

Een andere belangrijke conversie is die van decimaal naar binair. Dit wordt gedaan door telkens te delen door 2 (na de komma vermenigvuldigen). Om het getal $(83,375)_{10}$ bijvoorbeeld in het binaire talstelsel om te schrijven, gaan we als volgt te werk.

$$\begin{array}{llll} 83 \div 2 = & 41 & \text{rest } \mathbf{1} & \text{(LSB)} & 0,375 \times 2 = & 0,75 = & \mathbf{0} + 0,75 & \text{(MSB)} \\ 41 \div 2 = & 20 & \text{rest } \mathbf{1} & & 0,75 \times 2 = & 1,5 = & \mathbf{1} + 0,5 \\ 20 \div 2 = & 10 & \text{rest } \mathbf{0} & & 0,5 \times 2 = & 1,0 = & \mathbf{1} + 0 & \text{(LSB)} \\ 10 \div 2 = & 5 & \text{rest } \mathbf{0} & & & & & \\ 5 \div 2 = & 2 & \text{rest } \mathbf{1} & & & & & \\ 2 \div 2 = & 1 & \text{rest } \mathbf{0} & & & & & \\ 1 \div 2 = & 0 & \text{rest } \mathbf{1} & \text{(MSB)} & & & & \end{array}$$

Dus $(83,375)_{10} = (1010011,011)_2$.

Er zijn nog andere manieren om een getal binair weer te geven, onder andere ook om negatieve getallen weer te geven.

BCD¹: Hier wordt ieder decimaal cijfer 0 t/m 9 afzonderlijk gecodeerd, met vier bits per cijfer. Voorbeelden:

$2 = 0010$, $9 = 1001$ en $29 = 0010\ 1001$.

Gray code²: er verandert bij iedere ophoging maar één bit. Dit is een nuttige eigenschap voor mechanische encoders waar bits nooit synchroon kunnen omklappen (zodat er bij een overgang onduidelijke codes tussendoor kunnen komen). De laatste code verschilt maar één bit van de eerste code (cyclische eigenschap). Er zijn verschillende (binaire) Gray codes, de meest voorkomende is de **BRGC**³. De code voor twee bits is 00-01-11-10. De code voor 3 bits wordt gemaakt door een nul voor de code voor 2 bits te zetten, en een één voor de omgekeerde code voor 2 bits: 000-001-011-010-110-111-101-100. Door dit proces voort te zetten, kunnen BRGC's voor een willekeurig aantal bits worden gemaakt. De 4-bits BRGC is bijvoorbeeld 0000-0001-0011-0010-0110-0111-0101-0100-1100-1101-1111-1110-1010-1011-1001-1000.

Signed Magnitude representatie: standaard gecodeerd binair getal, waar bij het eerste bit het teken aangeeft (1 is negatief, 0 is positief). Er zijn dan twee codes voor nul (+0 en -0) en rekenkundige operaties zijn niet eenvoudig te implementeren.

1-complement representatie: Positieve getallen worden standaard binair gecodeerd, negatieve getallen worden standaard gecodeerd en vervolgens bitsgewijs geïnverteerd. Getallen in 1-complement notatie kunnen op de gebruikelijke manier worden opgeteld en afgetrokken, waarmee rekenen met negatieve getallen eenvoudig te realiseren is. Nadeel aan de 1-complement representatie is dat er een positieve en een negatieve nul bestaat.

2-complement representatie: Positieve getallen worden standaard binair gecodeerd, negatieve getallen worden standaard binair gecodeerd, bitsgewijs geïnverteerd en met één opgehoogd. Rekenen met getallen in 2-complement representatie kan op de gebruikelijke manier en er is maar één nul.

¹Binary Coded Decimal

²naar Frank Gray

³Binary Reflected Gray Code

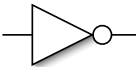
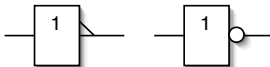
Operaties

Logische Poorten


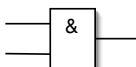
Functies van binaire variabelen worden vaak als **binaire operatoren** geschreven. In de context van binaire signalen wordt vaak van **logische poorten** gesproken.

Boven de poorten staat de Engelse naam (gangbaar in vakliteratuur) en tussen haakjes de Nederlandse. Bij de notatie staat ook de notatie in de beschrijvingstalen **AHDL** en **VHDL**. In functionele schema's worden vaak onderstaande symbolen gebruikt (boven de Amerikaanse, onder de internationale (**IEC**) variant).


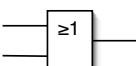
NOT (NIET)

Waarheidstabel		Notatie	Symbool
x	$F = \bar{x}$	$F = \bar{x}$	
0	1	$F = x'$	
1	0	$F = \neg x$	
		$F = !x$ (AHDL)	
		$F = \text{not}(x)$ (VHDL)	

AND (EN)

Waarheidstabel			Notatie	Symbool
x	y	$F = x \cdot y$	$F = x \cdot y$	
0	0	0	$F = xy$	
0	1	0	$F = x \wedge y$	
1	0	0	$F = x \ \& \ y$ (AHDL)	
1	1	1	$F = x \ \text{and} \ y$ (VHDL)	

OR (OF)

Waarheidstabel			Notatie	Symbool
x	y	$F = x + y$	$F = x + y$	
0	0	0	$F = x \vee y$	
0	1	1	$F = x \ \# \ y$ (AHDL)	
1	0	1	$F = x \ \text{or} \ y$ (VHDL)	
1	1	1		

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

NAND (NEN)

Waarheidstabel			Notatie	Symbool
x	y	$F = \overline{x \cdot y}$	$F = \overline{x \cdot y}$	
0	0	1	$F = x \text{ !\& } y$	
0	1	1	(AHDL)	
1	0	1	$F = x \text{ nand } y$	
1	1	0	(VHDL)	

NOR (NOF)

Waarheidstabel			Notatie	Symbool
x	y	$F = \overline{x + y}$	$F = \overline{x + y}$	
0	0	1	$F = x \text{ !\# } y$	
0	1	0	(AHDL)	
1	0	0	$F = x \text{ nor } y$	
1	1	0	(VHDL)	

EXOR (EXOF)

Waarheidstabel			Notatie	Symbool
x	y	$F = x \oplus y$	$F = x \oplus y$	
0	0	0	$F = x \text{ \$ } y$	
0	1	1	(AHDL)	
1	0	1	$F = x \text{ xor } y$	
1	1	0	(VHDL)	
Eigenschappen				
$x \oplus 0 = x$	$x \oplus x = 0$	$x \oplus y = y \oplus x$	$(x \oplus y) \oplus z = x \oplus (y \oplus z)$	

EXNOR (EXNOF)

Waarheidstabel			Notatie	Symbool
x	y	$F = \overline{x \oplus y}$	$F = \overline{x \oplus y}$	
0	0	1	$F = x \text{ !\$ } y$	
0	1	0	(AHDL)	
1	0	0	$F = x \text{ xnor } y$	
1	1	1	(VHDL)	

Booleaanse algebra

De wiskunde gebruikt om te rekenen met binaire variabelen (operaties en rekenregels) is de **Booleaanse algebra**¹. De principiële identiteiten zijn:

1. $x + 0 = x$
2. $x + 1 = 1$
3. $x + x = x$
4. $x + \bar{x} = 1$
5. $\overline{\bar{x}} = x$
6. $x \cdot 0 = 0$
7. $x \cdot 1 = x$
8. $x \cdot x = x$
9. $x \cdot \bar{x} = 0$

De belangrijkste rekenregels (eigenschappen van operatoren) zijn:

10. $x + y = y + x$
11. $x + (y + z) = (x + y) + z$
12. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$
13. $\frac{x + y}{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}$
14. $x \cdot y = y \cdot x$
15. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$
16. $x + y \cdot z = (x + y) \cdot (x + z)$
17. $\frac{x \cdot y}{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}$

Eigenschappen 13 en 17 worden ook het **theorema van De Morgan** genoemd (ook toepasbaar voor meer variabelen). Het **consensustheorema** is ook handig:

$$\begin{aligned} x \cdot y + x \cdot z + y \cdot z &= x \cdot y + x \cdot z \\ (x + y) \cdot (x + z) \cdot (y + z) &= (x + y) \cdot (x + z) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Methode van Karnaugh (minimalisatie)

De **methode van Karnaugh**² wordt gebruikt voor het handmatig vereenvoudigen van eenvoudige binaire functies van maximaal 4 bits. Een Karnaugh diagram (of **Veitch diagram**) heeft voor n bits 2^n cellen. Iedere cel komt overeen met een combinatie van de n bits, en bevat de bijbehorende functiewaarde. Buurcellen hebben afstand één (er verandert één bit aan de parameter). Hier bespreken we minimalisatie van functies van 2 en 3 variabelen. Enkele begrippen:

Minterm: Productterm waarin alle variabelen precies één keer voorkomen. Een functie van n variabelen heeft 2^n mogelijke mintermen. Elke minterm wijst naar een cel in het Karnaugh diagram, en is 1 voor precies één binaire combinatie van de variabelen, en 0 voor alle anderen. In de tabel hieronder worden als voorbeeld de mintermen voor $n = 3$ weergegeven:

¹naar George Boole (1815 - 1864)

²naar Maurice Karnaugh

x	y	z	productterm (minterm)	symbool
0	0	0	$\bar{x} \bar{y} \bar{z}$	m_0
0	0	1	$\bar{x} \bar{y} z$	m_1
0	1	0	$\bar{x} y \bar{z}$	m_2
0	1	1	$\bar{x} y z$	m_3
1	0	0	$x \bar{y} \bar{z}$	m_4
1	0	1	$x \bar{y} z$	m_5
1	1	0	$x y \bar{z}$	m_6
1	1	1	$x y z$	m_7

SOP¹: Vorm waarin een functie gegeven wordt als som van mintermen.

Maxterm: Somterm waarin alle variabelen precies één keer voorkomen. Een functie van n variabelen heeft ook 2^n mogelijke maxtermen. Elke maxterm wijst naar een cel in het Karnaugh diagram, en is 0 voor precies één binaire combinatie van de variabelen, en 1 voor alle anderen. In de tabel hieronder worden als voorbeeld de maxtermen voor $n = 3$ weergegeven:

x	y	z	somterm (maxterm)	symbool
0	0	0	$x + y + z$	M_0
0	0	1	$x + y + \bar{z}$	M_1
0	1	0	$x + \bar{y} + z$	M_2
0	1	1	$x + \bar{y} + \bar{z}$	M_3
1	0	0	$\bar{x} + y + z$	M_4
1	0	1	$\bar{x} + y + \bar{z}$	M_5
1	1	0	$\bar{x} + \bar{y} + z$	M_6
1	1	1	$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$	M_7

Elke maxterm is de inverse van de minterm van de zelfde index. Voor m_3 geldt bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} m_3 &= \bar{x} \cdot y \cdot z \\ m_3 &= \overline{\bar{x} \cdot y \cdot z} = x + \bar{y} + \bar{z} = M_3 \end{aligned} \quad (3.3)$$

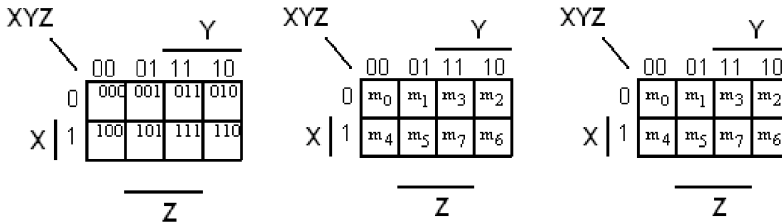
POS²: Vorm waarin een functie gegeven wordt als product van maxtermen.

Don't cares: Parameters van de binaire functie waarvoor de functiewaarde zowel 0 als 1 mag zijn.

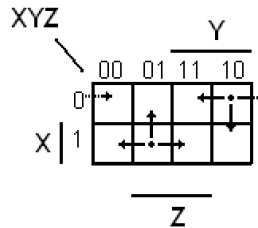
¹Sum of Products

²Product of Sums

Karnaugh voor 3 variabelen Wordt normaal gesproken zo geïmplementeerd; iedere cel is een combinatie, maxterm of minterm. De lijnen aan de kant, met de naam van een variabele helpen om te onthouden in welke rij of kolom die variabele hoog of laag is (let op de cijfertjes).

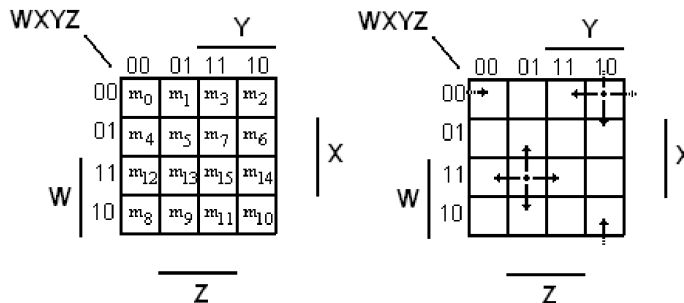


Iedere (!) cel heeft drie "buren" zoals onderstaande figuur toont:



Het uitwerken van dit diagram gaat als met 4 variabelen, zie verderop.

Karnaugh voor 4 variabelen Een Karnaugh diagram voor vier variabelen ziet er als volgt uit (hier met mintermen gerepresenteerd, met maxtermen gaat het op een vergelijkbare manier). Iedere cel heeft nu 4 "buren".



Minimalisatie Als voorbeeld minimaliseren we een functie van 4 variabelen, met 3 variabelen gaat het op een vergelijkbare manier. De waarheidstabel is gegeven (*don't cares* met x aangegeven):

w	x	y	z	F	w	x	y	z	F
0	0	0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	1	0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	1
0	1	0	0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	x	1	1	0	1	1
0	1	1	0	1	1	1	1	0	0
0	1	1	1	x	1	1	1	1	1

Stap 1. Zet de waarden in een Karnaugh diagram.

WXYZ		Y				X
		00	01	11	10	
W	00	1	0	0	1	
	01	1	x	x	1	
	11	0	1	1	0	
	10	0	1	1	1	

Stap 2. Er zal eerst gekeken worden naar minimalisering met mintermen. Neem daarvoor de grootste macht van twee met bits die in naburige cellen liggen. In dit geval hebben we twee groepen van 4 bits. Daarna wordt gekeken naar welke bits nog "vrij" zijn. Ze kunnen alléén genomen worden, of met een "buurman". In dit geval hebben we een bit met de buurman genomen.

WXYZ		Y				X
		00	01	11	10	
W	00	1	0	0	1	
	01	1	x	x	1	
	11	0	1	1	0	
	10	0	1	1	1	

Stap 3. Neem de producttermen gerepresenteerd door de groepjes bits. Dit zijn de variabelen waarvoor bepaalde bits dezelfde waarde hebben. In bovenstaande figuur: voor de bovenste groep zijn w en z altijd 0, dus de productterm behorend tot de bovenste groep is $\bar{w} \cdot \bar{z}$, de middelste groep heeft productterm

$w \cdot z$ en de groep rechtsonder $w \cdot \bar{x} \cdot y$. De geminimaliseerde functie in SOP vorm is dus:

$$F = \bar{w} \cdot \bar{z} + w \cdot z + w \cdot \bar{x} \cdot y \quad (3.4)$$

Stap 2 & 3. Door de cellen die nul zijn samen te nemen vinden we de functie in POS vorm:

		Y				
		00	01	11	10	
W	00	1	0	0	1	X
	01	1	x	x	1	
	11	0	1	1	0	
	10	0	1	1	1	
		Z				

De functie in POS form is als volgt (makkelijk onthouden: streepjes langs het diagram zijn de streepjes boven de variabelen):

$$F = (w + \bar{z}) \cdot (\bar{w} + z + y) \cdot (\bar{w} + \bar{x} + z) \quad (3.5)$$

Combinatorische circuits

Priority encoder

De *priority encoder* heeft 2^n D -ingangen, 1 V -uitgang en n A -uitgangen. Als tenminste één van de D -ingangen hoog is, dan is de V -uitgang hoog en geven de A -uitgangen in binaire code het nummer van de laagste D -ingang die hoog is. De waarheidstabel van een priority encoder met $n = 2$ is:

$D3$	$D2$	$D1$	$D0$	$A1$	$A0$	V
0	0	0	0	-	-	0
0	0	0	1	0	0	1
0	0	1	-	0	1	1
0	1	-	-	1	0	1
1	-	-	-	1	1	1

Implementatie in AHDL:

```
AHDL
```

```

1 SUBDESIGN prio_enc (D[3..0]: INPUT; A[1..0], V: OUTPUT;)
2 BEGIN
3     A[0] = D[3] # !D[2] & D[1];
4     A[1] = D[3] # D[2];
5     V = D[3] # D[2] # D[1] # D[0];
6 END;
```

prio_enc: naam van het ontwerp
 $D[3..0]$: Ingangsvariabelen
 $A[1..0]$: Uitgangsvariabelen

Demultiplexer of decoder

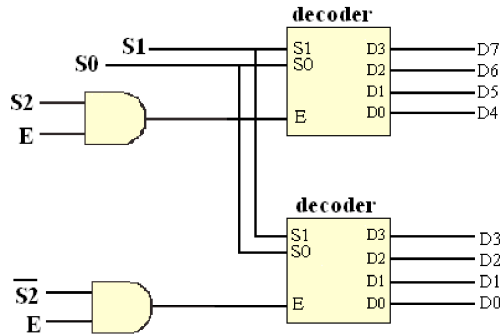
Een **demultiplexer** of **decoder** heeft:

- Een Enable (E) signaal. Hij werkt uitsluitend als dit signaal hoog is
- n besturingsingangen ($S_{n-1}..S_0$)
- 2^n datauitgangen (D_i)

De besturingssignalen bepalen (als binair getal) welke data-uitgang hoog is. Zie onderstaande gereduceerde waarheidstabel voor $n = 3$.

E	S_2	S_1	S_0	D_7	D_6	D_5	D_4	D_3	D_2	D_1	D_0
0	-	-	-	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
...
1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Vanaf $n = 2$ is het gunstiger om een decoder hiërarchisch te implementeren (dwz. met meerdere $n = 2$ decoders). Hieronder de implementatie voor $n = 3$:



Implementatie in AHDL:

```

AHDL
1 FUNCTION decoder2to4 (E, S[1..0]:INPUT) RETURNS(D[3..0]);
2 SUBDESIGN decoder3to8(E, S[2..0]: INPUT; D[7..0]:OUTPUT);
3 VARIABLE
4   dec1: decoder2to4;
5   dec2: decoder2to4;
6 BEGIN
7   dec1.S[0] = S[0]; dec1.S[1] = S[1]; dec1.E = E & !S[2];
8   dec2.S[0] = S[0]; dec2.S[1] = S[1]; dec2.E = E & S[2];
9   D[0] = dec1.D[0]; D[1] = dec1.D[1]; D[2] = dec1.D[2];
10  D[3] = dec1.D[3]; D[4] = dec2.D[0]; D[5] = dec2.D[1];
11  D[6] = dec2.D[2]; D[7] = dec2.D[3];
12 END;
```

Hier wordt gewerkt met een reeds gedefinieerd ontwerp (aangegeven met FUNCTION). In VARIABLE worden twee instanties van decoder2to4 gedeclareerd, de rest van het ontwerp is “pennetjes verbinden”.

Multiplexer

Een **multiplexer** heeft 2^n data ingangen (D_i), één data-uitgang (Y), n besturingsingangen (S_j) en één enable-ingang (E). Als het enable-sigitaal hoog is, bepalen de besturingsingangen (binair) welke data-ingang doorgegeven wordt aan de uitgang. Hieronder de waarheidstabel voor $n = 2$ en de AHDL implementatie.

E	S_1	S_0	D_3	D_2	D_1	D_0	Y
0	-	-	-	-	-	-	0
1	0	0	-	-	-	0	0
1	0	0	-	-	-	1	1
1	0	1	-	-	0	-	0
1	0	1	-	-	1	-	1
1	1	0	-	0	-	-	0
1	1	0	-	1	-	-	1
1	1	1	0	-	-	-	0
1	1	1	1	-	-	-	1

AHDL implementatie

AHDL

```

1 SUBDESIGN mux4to1(E, S[1..0], D[3..0]: INPUT; Y:OUTPUT;)
2 BEGIN
3   Y = E & !S[1] & !S[0] & D[0] # E & !S[1] & S[0] & D[1]
4     # E & S[1] & !S[0] & D[2] # E & S[1] & S[0] & D[3]
5 END;
```

In AHDL kan het ook op een andere manier:

AHDL

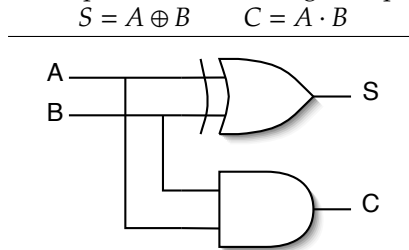
```

1 SUBDESIGN mux4to1(E, S[1..0], D[3..0]: INPUT; Y:OUTPUT;)
2 BEGIN
3   IF E THEN
4     CASE(S[1],S[0]) IS
5       WHEN 0 => Y = D[0];
6       WHEN 1 => Y = D[1];
7       WHEN 2 => Y = D[2];
8       WHEN 3 => Y = D[3];
9     END CASE;
10  END IF;
11 END;
```

Aritmetische optelling

Een *half-adder* is een één-bits opteller. Hij heeft twee ingangen (getal A en getal B), en twee uitgangen (S (um) en C (arry)). Hieronder staan de waarheidstabel, de functies van S en C , en de implementatie met logische poorten.

A	B	C	S	Som
0	0	0	0	0
0	1	0	1	1
1	0	0	1	1
1	1	1	0	10



AHDL

```

1 SUBDESIGN half_adder (a, b: INPUT; s,c: OUTPUT;)
2 BEGIN
3   s = a $ b;
4   c = a& b;
5 END;
```

Een *full-adder* (FA) lijkt op een half-adder, maar heeft ook een *carry in* (C_i), de carry out heet nu C_o :

C_i	A	B	C_o	Som
0	0	0	0	0
0	0	1	0	1
0	1	0	0	1
0	1	1	1	10
1	0	0	0	1
1	0	1	1	10
1	1	0	1	10
1	1	1	1	11

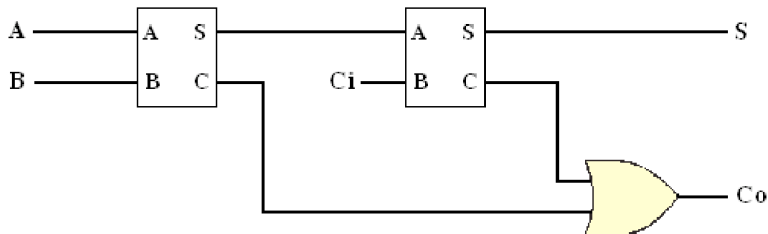
De vergelijkingen voor S en C_o zijn:

$$S = A \oplus B \oplus C_i \quad (3.6)$$

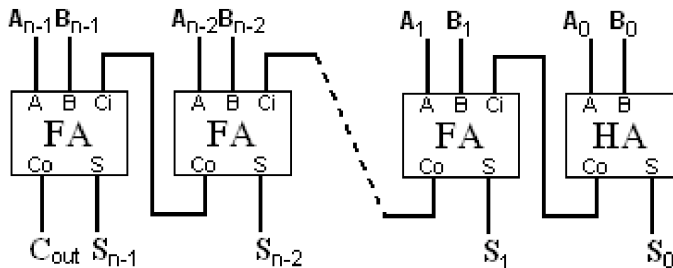
$$C_o = A \cdot B + A \cdot B + A \cdot B = A \cdot B + C_i \cdot (A \oplus B) \quad (3.7)$$

Een FA kan in AHDL geïmplementeerd worden met twee HA:

```
AHDL
1 FUNCTION half-adder (a, b) RETURNS (s, c);
2 SUBDESIGN full-adder (a, b, ci: INPUT; s, co: OUTPUT;);
3 VARIABLE
4   ha1, ha2 : half_adder;
5 BEGIN
6   ha1.a = a;
7   ha1.b = b;
8   ha2.a = ha1.s;
9   ha2.b = ci;
10  s = ha2.s;
11  c = ha1.c # ha2.c;
12 END;
```



Een **ripple carry adder** is een n -bits opteller die gebruikt maakt van $n - 1$ full adders en 1 half adder.



Voor 4 bits is een mogelijke AHDL implementatie:

```

AHDL
1 FUNCTION full_adder (a, b, ci) RETURNS (s, co);
2 SUBDESIGN ripple_adder (a[3..0], b[3..0],
3                          ci:INPUT; s[3..0], co:OUTPUT;)
4 VARIABLE
5   fa[3..0]: full_adder;
6   carry[4..0]: NODE;
7 BEGIN
8   carry[0] = ci;
9   FOR i IN 0 TO 3 GENERATE
10    fa[i].a = a[i];
11    fa[i].b = b[i];
12    fa[i].ci = carry[i];
13    s[i] = fa[i].s
14    carry[i + 1] = fa[i].c;
15  END GENERATE;
16  co = carry[4];
17 END;

```

NODE wordt gebruikt om een tussenvariabele te definiëren. Deze is “gratis”.

Er is een alternatieve manier om een adder te maken: de zogenaamde *carry lookahead adder* (CLA). Deze heeft niet de vertraging van de carry, die problematisch wordt bij een brede ripple carry adder. In een carry lookahead adder worden de carry bits parallel behandeld. Er worden twee extra signalen gegenereerd: Als A of B hoog is, dan is de carry out gelijk aan de carry in (*propagate*). Als A én B hoog zijn, is de carry out altijd gelijk aan 1, onafhankelijk van de waarde van de Carry in. Zo krijgen we een PFA¹ die S , P en G levert:

$$P = A \oplus B \quad (3.8)$$

$$G = A \cdot B \quad (3.9)$$

$$S = P \oplus Ci \quad (3.10)$$

¹Partial Full Adder

Voor 4 bits, zijn de vergelijkingen voor de carry's:

$$C_1 = G_0 + P_0 \cdot C_0 \quad (3.11)$$

$$C_2 = G_1 + P_1 \cdot C_1 = G_1 + P_1 \cdot G_0 + P_1 \cdot P_0 \cdot C_0 \quad (3.12)$$

$$C_3 = G_2 + P_2 \cdot G_1 + P_2 \cdot P_1 \cdot G_0 + P_2 \cdot P_1 \cdot P_0 \cdot C_0 \quad (3.13)$$

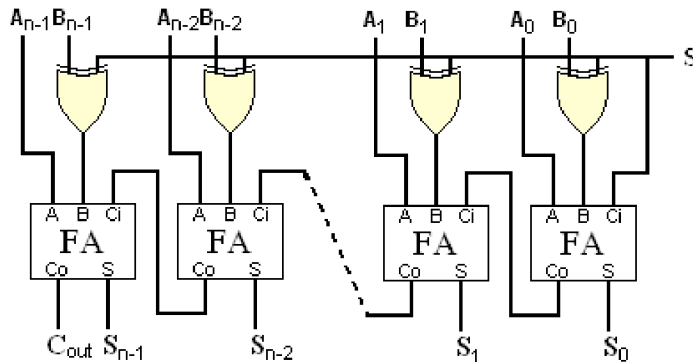
$$C_4 = G_3 + P_3 \cdot G_2 + P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot G_0 + P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 \cdot P_0 \cdot C_0 \quad (3.14)$$

Zo wordt voor elk bit een PFA gebruikt, die S , P en G voor die sectie bepaalt, en daaronder een Lookahead Adder schakeling (LA) die alle carry-signalen parallel bepaalt, elk met een SOP-schakeling van twee niveaus. Hieronder de implementatie van de LA.

Aangezien het aantal termen snel groeit als het aantal bits toeneemt, is een CLA geschikt in het algemeen geschikt tot 4 bits. Voor een hoger aantal bits worden meerdere (4 bits) LA's in serie gebruikt, waar de hoogste gegenereerde carry van de één de inkomende carry voor de volgende is.

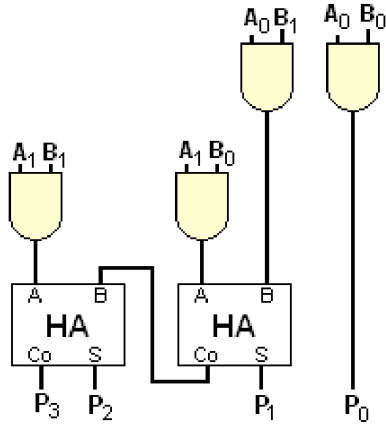
Aftrekken

Er kan ook een combinatorische adder/subtractor gemaakt worden. Hiervoor wordt de 2-complement notatie gebruikt (één getal van een andere aftrekken is hetzelfde als dat getal in 2-complement opgeteld bij het andere). Deze heeft een extra signaal in (S). Als S hoog wordt, dan wordt het getal B geïnverteerd en tevens wordt er een Carry-in gegeven.



Vermenigvuldigen

Vermenigvuldigen kan combinatorisch. Probleem hiervan is dat het vaak teveel hardware kost. Een 2×2 bits vermenigvuldiger ziet er bijvoorbeeld zo uit:



Sequentiële bouwstenen

Naast de bovenstaande combinatorische bouwstenen bestaan er sequentiële bouwstenen. De principiële verschillen met de combinatorische zijn:

- er kan data opgeslagen worden (bestaan van geheugen);
- de uitgangen zijn een functie van de huidige toestand en het verleden.

Er bestaan twee soorten sequentiële schakelingen: synchrone en asynchrone.

Asynchrone bouwstenen

Eigenschappen:

- door terugkoppeling ontstaat er geheugen;
- de teruggekoppelde signalen vormen samen de toestand van de schakeling;
- geen globale klok (energiezuinig).

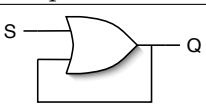
Problemen:

- verschillen in vertragingstijden (niet alle bits die de toestand bepalen veranderen tegelijk);
- géén synchronisatie.

Voorbeelden van asynchrone bouwstenen zijn de S-latch, de R-latch en de SR-latch.

S-latch

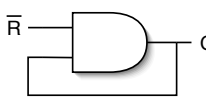
Onthoudt één bit, kan alleen geset worden en heeft een instabiele toestand in de overgang van $SQ = 01$ naar 10 .

Waarheidstabel			Implementatie
S	Q		
0	0	onthouden	
1	1	set	

$$Q = S + Q$$

\bar{R} -latch

Onthoudt één bit, kan alleen gereset worden.

Waarheidstabel			Implementatie
R	Q		
0	0	onthouden	
1	0	reset	

$$Q = \bar{R} \cdot Q$$

Algemeen

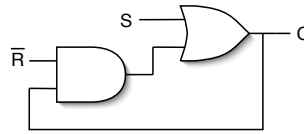
SR-latch (met overheersende set)

Combinatie van S en R latches, bij $R = 1$ en $S = 1$ overheerst de set.

Wiskunde

Waarheidstabel			
S	R	Q	
0	0	Q	onthouden
0	1	0	reset
1	0	1	set
1	1	1	set

Implementatie



$$Q = S + \bar{R} \cdot Q$$

Informatica

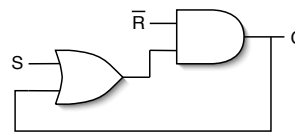
SR-latch (met overheersende reset)

Combinatie van S en R latches, bij $R = 1$ en $S = 1$ overheerst de reset.

Fysica

Waarheidstabel			
S	R	Q	
0	0	Q	onthouden
0	1	0	reset
1	0	1	set
1	1	0	reset

Implementatie



$$Q = \bar{R} \cdot (S + Q)$$

Meten

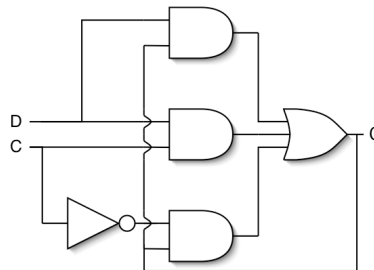
D-latch

Een D latch heeft twee ingangen, D (Data) en C (Control). Als $C = 0$, $Q = Q$ (onthouden) en als $C = 1$, $Q = D$ (volgen). De D latch heeft problemen met de overgang van $C = 1$ naar $C = 0$ als $D = 1$. Om problemen met metastabiliteit te voorkomen, wordt er bij de implementatie een extra 'overbodige' term $Q \cdot D$ opgenomen.

Signalen

Waarheidstabel		
C	Q	
0	Q	onthouden
1	D	volgen

Implementatie



$$Q = C \cdot D + Q \cdot (\bar{C} + D)$$

Elektronica

Synchrone bouwstenen

Eigenschappen:

- geheugenelementen mét klokingang;
- de geheugens zijn gesynchroniseerd zodat ze allemaal tegelijk veranderen;
- alle signalen worden vertraagd zodat het langzaamste pad tijd heeft om klaar te zijn vóóordat de next state begint;
- op elke flank van de klok klappen er een aantal nutteloze transistors (energieverspilling).

Een elementair geheugenelement (voor één bit) wordt een **flipflop** genoemd. Flipflops hebben één of twee sturingangen, een uitgang (soms ook een geïnverteerde uitgang), een kloklijn en een enable ingang. Op de opgaande flank van de klok worden de sturingangen gelezen en de uitgang aangepast. De enable ingang is vaak asynchroon geïmplementeerd, als deze laag is hebben de sturingangen geen invloed meer de op de uitgang.

Hieronder staan gangbare flipflops, welke allemaal met zekere combinatoriek in elkaar kunnen worden omgezet.

D-flipflop

De D flipflop heeft één ingang, en kan resetten ($D = 0$) of setten ($D = 1$).

Waarheidstabel			Symbol
D	Q+		
0	0	resetten	
1	1	setten	

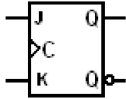
SR-flipflop

De SR flipflop heeft twee ingangen, S om te setten, R om te resetten. Als beide ingangen laag zijn, blijft de uitgang onveranderd. Het gedrag voor $S = R = 1$ is ongedefinieerd.

Waarheidstabel				Symbol
S	R	Q+		
0	0	Q	onthouden	
0	1	0	resetten	
1	0	1	setten	
1	1	?	ongedefinieerd	

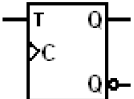
JK-flipflop

De *JK* flipflop heeft twee ingangen, *J* om te setten, *K* om te resetten. Als beide ingangen laag zijn, blijft de uitgang onveranderd. Als beide ingangen hoog zijn, klapt de uitgang om ($Q+ = \overline{Q}$).

Waarheidstabel			Symbool	
<i>J</i>	<i>K</i>	<i>Q+</i>		
0	0	<i>Q</i>		onthouden
0	1	0		resetten
1	0	1		setten
1	1	\overline{Q}		omklappen

T-flipflop

De *T* flipflop heeft één ingang *T*. Als $T = 0$ blijft de uitgang onveranderd, $T = 1$ klapt de uitgang om. De *T* flipflop is gelijk aan een *JK* flipflop met $J = K$.

Waarheidstabel		Symbool	
<i>T</i>	<i>Q+</i>		
0	<i>Q</i>		onthouden
1	\overline{Q}		omklappen

Toestandmachines

Een **toestandsmachine** of **FSM**¹ is een gedragsbeschrijvend model voor een systeem met geheugen, één of meerdere ingangen en één of meerdere uitgangen.

Toestandsmachines worden veelal ingedeeld in twee klassen: bij een **Mealy machine**² hangen de uitgangen af van de huidige staat en de ingangswaarden, bij een **Moore machine**³ hangen de uitgangen alleen af van de huidige staat.

Hier word er een voorbeeld gegeven van alle stappen te volgen bij het analyseren van een **toestandsmachine**. Daarna zal de synthese (het omgekeerde) aan de orde komen.

¹Finite State Machine

²naar G.H. Mealy

³naar Edward F. Moore (1925-2003)

Stap 1. Bepaal de ingangen en de uitgangen van de flipflops.

$$A.D = A \cdot X + B \cdot X \quad \text{Dit is de D ingang van flipflop A}$$

$$B.D = A \cdot X \quad \text{D ingang van flipflop B}$$

$$Y = (A + B) \cdot X \quad \text{Uitgang}$$

Stap 2. Maak een eendimensionale toestandstabel met een rij voor elke combinatie van toestandvariabelen en ingangswaarden.

huidige toestand		ingang	volgende toestand		uitgang
A	B	X	A+	B+	Y
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	1
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1
1	1	1	1	0	0

Stap 3a. Maak een tweedimensionale toestandstabel met een rij voor elke toestand en voor elke combinatie van ingangssignalen aparte kolommen voor de volgende toestand en de uitgangen.

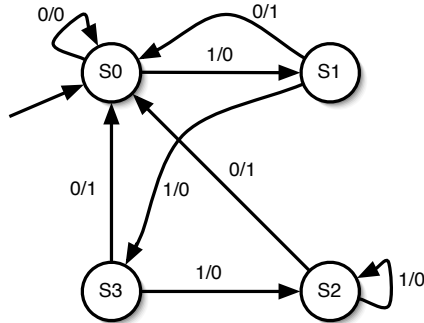
huidige toestand		volgende toestand				uitgang	
A	B	!X		X		!X	X
		A+	B+	A+	B+		
0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0	1	0
1	1	0	0	1	0	1	0

Stap 3b. Vervang de bitpatronen die de toestand coderen door vrij te kiezen symbolische namen.

huidige toestand	volgende toestand		uitgang	
	!X	X	!X	X
	Y	Y	Y	Y
S0	S0	S1	0	0
S1	S0	S3	1	0
S2	S0	S2	1	0
S3	S0	S2	1	0

Stap 4. Teken een **toestandsdiagram** met voor elke toestand een cirkel en voor elke overgang een pijl. Er gelden de volgende conventies voor toestandsdiagrammen:

- in de toestanden staat de naam of de codering van de toestand;
- bij de pijlen staan de bitpatronen van de inputs en de outputs voor die overgang (inputs/outputs);
- de initiële toestand of Reset State is vaak gemerkt met een “pijl uit het niets”.



Deze beschrijving kan ook vrij eenvoudig in AHDL worden gedaan:

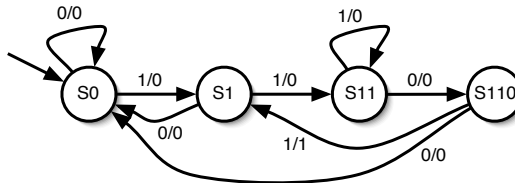
```

AHDL
1 VARIABLE ss: MACHINE WITH STATES (s0, s1, s2, s3);
2 BEGIN
3   ss.clk = Clock;
4   CASE ss IS
5     WHEN s0 => IF x THEN ss = s1; END IF;
6     WHEN s1 => IF !x THEN ss = s0; y = VCC;
7                 ELSE ss = s3; END IF;
8     WHEN s2 => IF !x THEN ss = s0; y = VCC; END IF;
9     WHEN s3 => IF !x THEN ss = s0; y = VCC;
10                ELSE ss = s2; END IF
11   END CASE;
12 END;
  
```

Het synthetiseren (ontwerpen) van een toestandsmachine gaat ongeveer omgekeerd als de analyse:

Stap 1. Maak vanuit een gegeven omschrijving in woorden (informele specificatie) een toestandsdiagram, toestandstabel of toestandsmachinebeschrijving (formele specificatie).

Nu ontwerpen we bijvoorbeeld een toestandsmachine die de sequentie 1101 aan de ingang X herkent en dan een hoog signaal aan de uitgang Z geeft. Formeel: 'Z = 1 als drie voorafgaande inputs X de waarde 110 hadden en de huidige input $X = 1$ is. Initialisatie met asynchrone reset naar toestand waarin geen enkele 1 is gedetecteerd.'



Stap 2. Vereenvoudig zonedig het toestandsdiagram (in dit voorbeeld onnodig).

Stap 3. Maak (zonedig) ongecodeerde tweedimensionale toestandstabellen.

huidige toestand	volgende toestand		uitgang	
	\bar{X}	X	\bar{Z}	Z
S0	S0	S1	0	0
S1	S0	S11	0	0
S11	S110	S11	0	0
S110	S0	S1	0	1

Stap 4. Kies het aantal flipflops, codeer de toestanden en maak zonedig een tweedimensionale gecodeerde toestandstabel. Opmerkingen:

- elke codering waarbij alle toestanden verschillend zijn gecodeerd werkt altijd, codering heeft echter sterke invloed op de grootte van de noodzakelijke combinatorische schakelingen;
- voor het coderen van m toestanden zijn tenminste n flipflops nodig, met $2^n \geq m$, het minimum aantal flipflops levert echter niet altijd de kleinste schakeling.

Kies bijvoorbeeld twee flipflops (A en B),
met $S0 \rightarrow 00, S1 \rightarrow 01, S11 \rightarrow 11, S110 \rightarrow 10$.

huidige toestand		volgende toestand				uitgang	
		!X		X		!X	X
A	B	A+	B+	A+	B+	Z	Z
0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	0	1	1	0	0
1	0	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	1	0	1

Stap 5. Maak een gecodeerde eendimensionale toestandstabel.

Neem alles over uit de twee-dimensionale tabel en zet de rijen in volgorde van de normale binaire codering.

huidige toestand		ingang	volgende toestand		uitgang
A	B	X	A+	B+	Z
0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	1	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0
1	1	1	1	1	0

Stap 6. Kies te gebruiken flipflops, de meest gebruikte zijn de D-flipflops (eenvoudig ontwerpen, omdat de ingangen ervan gelijk zijn aan de gewenste nieuwe toestand). Voeg aan de tabel kolommen voor de ingangen van de flipflops toe.

Stap 7. Maak de vergelijkingen voor de flipflop-ingangen, bijvoorbeeld met behulp van Karnaugh. In het voorbeeld:

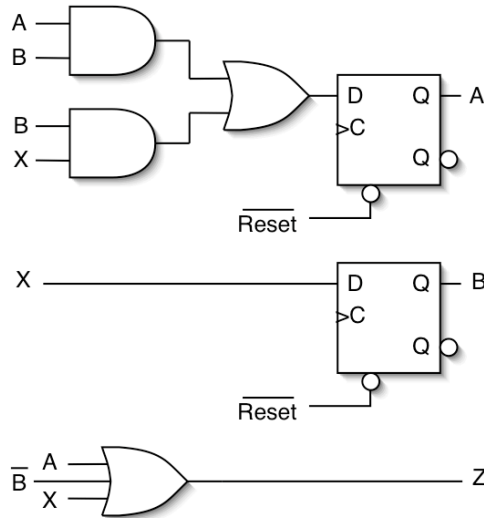
$$A.D = A \cdot B + B \cdot X \quad (3.15)$$

$$B.D = X \quad (3.16)$$

Stap 8. Maak vergelijkingen voor de uitgangen, bijvoorbeeld met behulp van Karnaugh. In het voorbeeld:

$$Z = A \cdot \bar{B} \cdot X \quad (3.17)$$

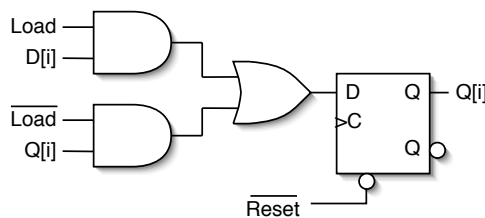
Stap 9. Teken het schema.



Registers

Registers bestaan uit een veelal groot aantal flipflops en hebben als belangrijkste functies het laden van een nieuwe waarde en het onthouden van deze data. Voor het laden met een nieuwe waarde zijn er tenminste zoveel ingangen nodig als er flipflops zijn. Registers zijn te realiseren als Moore Machines, met een combinatorische schakeling per sectie.

Register met Load Als *Load* hoog is, wordt de nieuwe waarde geladen. Als *Load* laag is, wordt de huidige waarde onthouden. Eén sectie van een register met *Load* kan er bijvoorbeeld zo uit zien:



Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

In AHDL zou een 4-bits register er bijvoorbeeld zo uit kunnen zien:

```
AHDL
1 SUBDESIGN Register (Clock, Load, d[3..0]: INPUT; 1[3..0]:
2   OUTPUT;)
3 VARIABLE
4   q[3..0]: DFF;
5 BEGIN
6   q[].clk = Clock;
7   IF Load, THEN q[] = d[];
8   ELSE qp[ = q[];
9   END IF;
10 END;
```

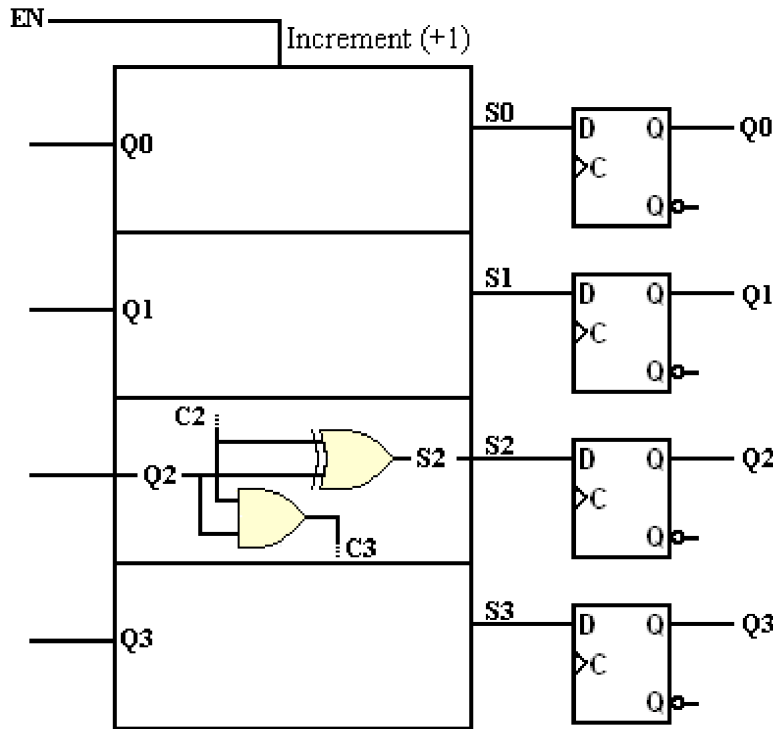
Schuifregisters of *shift registers* zijn registers die (ook) hun inhoud een plaats naar links en/of naar rechts kunnen schuiven, waarbij er aan de ene kant een nieuw bit seriëel wordt ingevoerd en er aan de andere kant een bit uit schuift. Er bestaan ook bidirectionele schuifregisters, geïmplementeerd met multiplexers.

Tellers

Tellers of *counters* zijn registers die volgens een bepaalde code, meestal de normale binaire code, hun inhoud kunnen ophogen of aflagen. Tellers kunnen heel goed beschreven worden in ADHL, omdat optelfuncties kunnen worden gebruikt.

```
AHDL
1 SUBDESIGN CTR4_spec (Clock, En: INPUT; q[3..0], Co: OUTPUT;)
2 VARIABLE
3   q[3..0]: DFF;
4 BEGIN
5   q[].clk = Clock;
6   IF En THEN (Co, q[]) = (0, q[]) +1;
7   ELSE q[] = q[];
8   END IF;
9 END;
```

Er zijn verschillende manieren om een teller te implementeren. Hieronder een 4-bit teller met D-flipflops.



Het probleem van deze implementatie is dat voor een hoger aantal bits het Carry pad lang (dus traag) wordt. In dat geval worden de Carry's signalen apart parallel behandeld. (Carry lookahead adder, zie pag. 138)

Grotere tellers kunnen worden geïmplementeerd met andere tellers in cascade. Het geïnverteerde meest significante bit van de minst significante teller gaat dan aan de klokingang van de meest significante teller (enzovoorts).

Timing

Hier worden verschillende aspecten van timing behandeld, waar rekening mee gehouden moet worden bij het ontwerpen van digitale schakelingen. Enkele begrippen (zie de volgende bladzijde):

- t_P (**propagatievertraging**): Tijd tussen het actief worden van het signaal en het effect daarvan op de uitgangen. (Ook: vertraging in een transmissielijn (draadje))
- t_{PHL}, t_{PLH} : propagatievertraging van hoog naar laag, respectievelijk van laag naar hoog.
- t_T : Transitietijden
- t_{rem} (*removal time*): Na het inactief worden van het signaal duurt het deze tijd voordat gegarandeerd is dat de schakeling weer normaal synchroon functioneert.
- t_{SU} (*set-up* tijd): Tijd dat een signaal stabiel moet zijn voorafgaand aan een actieve klokflank.
- t_h (*hold* tijd): Tijd dat een signaal stabiel moet blijven na een actieve klokflank.

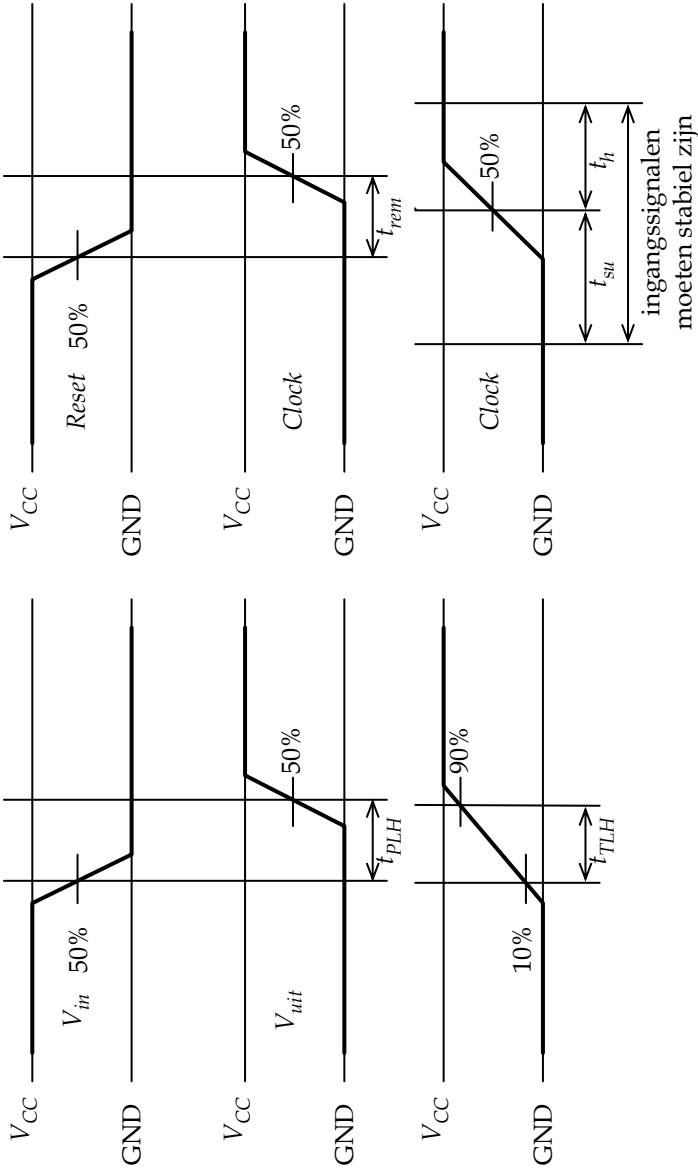
Om te bepalen hoe lang het duurt voordat alle uitgangen stabiel zijn in een zekere combinatorische schakeling, moet het **kritieke pad** bepaald worden. Door van links naar rechts alle vertragingen van ingang(en) naar uitgang(en) op te schrijven, wordt duidelijk welk proces het meeste tijd kost. Zoveel tijd moet dus minstens gewacht worden voordat met de resultaten van die combinatoriek wordt verder gerekend.

Spanningen

Voor de meeste logica (**TTL-compatibel**) geldt dat 5V een hoog signaal en 0V een laag signaal representeert. De volgende spanningen gelden voor de verschillende IC-families:

	CMOS	TTL	ETL	LowV	BTL	GTL
	AC-HC	ACT-HCT	F-S-AS		LV-LVC	
		AHC-C	AHCT-FCT	LS-ALS		ALVC
V_{OL} (Out Low)	0,2 V	0,2 V	0,35 V	0,4 V	0,4 V	0,4 V
V_{IL} (In Low)	1,3 V	0,8 V	0,8 V	1,4 V	0,8 V	1,4 V
V_T (Threshold)	2,5 V	1,5 V	1,5 V	1,5 V	1,5 V	1,6 V
V_{IH} (In High)	3,7 V	2,0 V	2,0 V	1,6 V	2,0 V	1,8 V
V_{OH} (Out High)	4,7 V	4,7 V	3,3 V	2,4 V	2,4 V	2,1 V

De meeste families accepteren spanningen tussen 0V en 5V, behalve Low Voltage (0,0 - 3,6 V), BTL (1,0 - 2,1 V) en GTL (0,0 - 1,1 V).



Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

ASCII

De **ASCII** (American Standard Code for Information Interchange) is een 7-bits code voor tekstboodschappen (MIME-type US-ASCII). Hieronder staan de besturings- en alfanumerieke karakters vermeld (20₁₆ is de spatie).

Besturingskarakters		Alfanumeriek					
00	NUL ^@ Null character	20	␣	40	@	60	'
01	SOH ^A Start of Header	21	!	41	A	61	a
02	STX ^B Start of Text	22	"	42	B	62	b
03	ETX ^C End of Text	23	#	43	C	63	c
04	EOT ^D End of Transmission	24	\$	44	D	64	d
05	ENQ ^E Enquiry	25	%	45	E	65	e
06	ACK ^F Acknowledgement	26	&	46	F	66	f
07	BEL ^G Bell	27	'	47	G	67	g
08	BS ^H Backspace	28	(48	H	68	h
09	HT ^I Horizontal Tab	29)	49	I	69	i
0A	LF ^J Line feed	2A	*	4A	J	6A	j
0B	VT ^K Vertical Tab	2B	+	4B	K	6B	k
0C	FF ^L Form feed	2C	,	4C	L	6C	l
0D	CR ^M Carriage return	2D	-	4D	M	6D	m
0E	SO ^N Shift Out	2E	.	4E	N	6E	n
0F	SI ^O Shift In	2F	/	4F	O	6F	o
10	DLE ^P Data Link Escape	30	0	50	P	70	p
11	DC1 ^Q Device Ctrl. 1 (XON)	31	1	51	Q	71	q
12	DC2 ^R Device Ctrl. 2	32	2	52	R	72	r
13	DC3 ^S Device Ctrl. 3 (XOFF)	33	3	53	S	73	s
14	DC4 ^T Device Ctrl. 4	34	4	54	T	74	t
15	NAK ^U Neg. Acknowledgement	35	5	55	U	75	u
16	SYN ^V Synchronous Idle	36	6	56	V	76	v
17	ETB ^W End of Trans. Block	37	7	57	W	77	w
18	CAN ^X Cancel	38	8	58	X	78	x
19	EM ^Y End of Medium	39	9	59	Y	79	y
1A	SUB ^Z Substitute	3A	:	5A	Z	7A	z
1B	ESC ^[Escape	3B	;	5B	[7B	{
1C	FS ^\ File Separator	3C	<	5C	\	7C	
1D	GS ^] Group Separator	3D	=	5D]	7D	}
1E	RS ^^ Record Separator	3E	>	5E	^	7E	~
1F	US ^_ Unit Separator	3F	?	5F	_		
7F	DEL ^? Delete						

De ASCII-code is uitgebreid met één bit om meer tekens mogelijk te maken.

De meestgebruikte uitbreiding voor 8-bits is *Latin-1*, MIME type ISO-8859-1:

	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	xA	xB	xC	xD	xE	xF
8x	PAD	HOP	BPH	NBH	IND	NEL	SSA	ESA	HTS	HTJ	VTS	PLD	PLU	RI	SS2	SS3
9x	DCS	PU1	PU2	STS	CCH	MW	SPA	EPA	SOS	SGCI	SCI	CSI	ST	OSC	PM	APC
Ax	NBSP	ı	ç	£	¤	¥	¦	§	¨	©	ª	«	¬	SHY	@	-
Bx	°	±	²	³	´	µ	¶	·	¸	¹	º	»	¼	½	¾	¿
Cx	À	Á	Â	Ã	Ä	Å	Æ	Ç	È	É	Ê	Ë	Ì	Í	Î	Ï
Dx	Dh	Ñ	Ò	Ó	Ô	Õ	Ö	×	Ø	Ù	Ú	Û	Ü	Ý	Th	ß
Ex	à	á	â	ã	ä	å	æ	ç	è	é	ê	ë	ì	í	î	ï
Fx	dh	ñ	ò	ó	ô	õ	ö	÷	ø	ù	ú	û	ü	ý	th	ÿ

NBSP is een *non-breaking-space*, SHY een afbreekstreepje (*hyphen*). Bovenstaande karakterset (inclusief ASCII) zonder de besturingskarakters (00-1F, 7F en 80-9F) heet **ISO/IEC 8859-1**, met besturingskarakters heet het **ISO-8859-1** (let op het extra streepje).

Microsoft heeft voor Windows de karakterset **Windows-1252** geadopteerd (ook: CP1252). Deze lijkt op de ISO-standaard, maar gebruikt de karakters 80-9F anders:

	x0	x1	x2	x3	x4	x5	x6	x7	x8	x9	xA	xB	xC	xD	xE	xF
8x	€		,	f	„	…	†	‡	^	%	Š	<	œ		Ž	
9x		‘	’	“	”	•	–	—	˘	™	š	>	œ		ž	ÿ
Ax	NBSP	ı	ç	£	¤	¥	¦	§	¨	©	ª	«	¬	SHY	@	-
Bx	°	±	²	³	´	µ	¶	·	¸	¹	º	»	¼	½	¾	¿
Cx	À	Á	Â	Ã	Ä	Å	Æ	Ç	È	É	Ê	Ë	Ì	Í	Î	Ï
Dx	Dh	Ñ	Ò	Ó	Ô	Õ	Ö	×	Ø	Ù	Ú	Û	Ü	Ý	Th	ß
Ex	à	á	â	ã	ä	å	æ	ç	è	é	ê	ë	ì	í	î	ï
Fx	dh	ñ	ò	ó	ô	õ	ö	÷	ø	ù	ú	û	ü	ý	th	ÿ

Opmerking: oorspronkelijk is de carriage return (0D) het teken dat de printer het wagentje moet laten teruglopen en is line feed (0A) het teken dat de printer het papier één regel moet doorschuiven. De verschillende besturingssystemen gebruiken verschillende karakters voor een ‘harde return’:

Teken	Platform
LF (0A)	Unix, Linux, Xenix, Mac OS X, BeOS, Amiga
CRLF (0D0A)	Microsoft Windows, DOS, CP/M, MP/M
CR (0D)	MacOS 9 en lager

De belangrijkste internetprotocollen (zoals HTTP, SMTP en FTP) schrijven

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

CRLF voor als teken voor een nieuwe regel. Bij het schrijven van software is het goed om de verschillende symbolen te ondersteunen:

- 0A (LF)
- 0D (CR)
- 0D0A (CRLF)
- 85 (NEL, Next Line)
- 0C (FF, Form Feed)

In Java is de escape-string voor LF `\n` en voor CR `\r`. In C is dit verband niet zo hard, bij het lezen of schrijven van een bestand in tekst modus (niet in *binary* modus) bijvoorbeeld, vertaalt C `\n` naar het platform afhankelijke symbool (dat dus niet per sé 1 byte lang is).

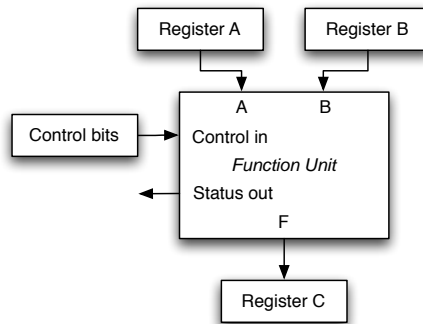
Computerorganisatie en architectuur

Processoren en Bussen

Processor

Een processor **CPU**¹ is opgebouwd uit een **FU**² en registers. De Function Unit bestaat uit een **ALU**³, die al het rekenwerk doet (denk aan optellen, aftrekken, etc.) en andere units met eigen functies, zoals opschuiven (*shift*). Voor elke processoractie staat er een instructie in het geheugen. Zo'n instructie bestaat uit:

- Operatie code (*opcode*); bij een n bits code zijn er 2^n mogelijke operaties.
- Adres(sen) van de te gebruiken geheugenadressen en/of registers; Als er n bits voor het (geheugen)adres beschikbaar zijn, kunnen er dus 2^n geheugenwoorden afzonderlijk geadresseerd worden.



Figuur 3.1: De *function unit*

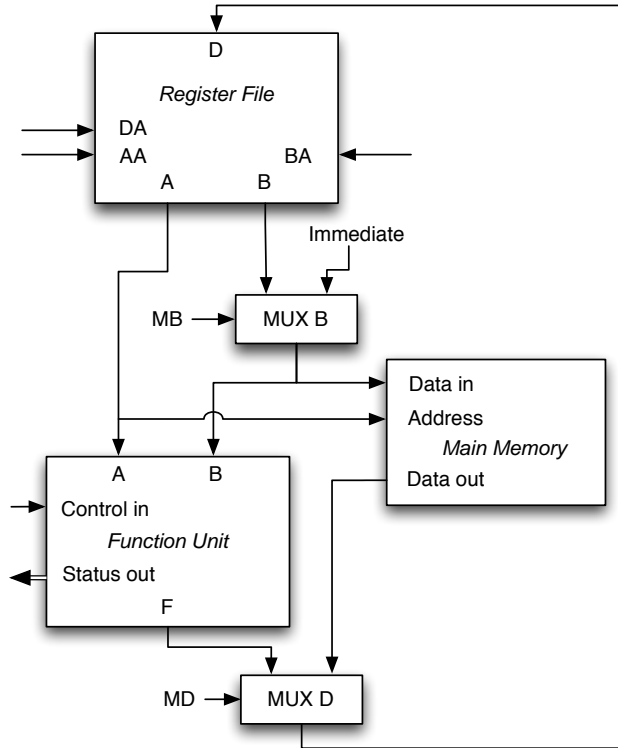
Het pad van data in een geheugen, dat via een bewerking in de function unit weer in het geheugen terechtkomt, noemen we het **datapad**. Om een instructie uit te voeren moet het volgende gebeuren:

1. Adres waar nieuwe instructie staat, berekenen
2. Instructie verkrijgen (*fetch*)
3. Instructie analyseren en het type operatie bepalen
4. Operand adres bepalen

¹Central Processing Unit

²Function Unit

³Arithmetic/Logic Unit



Figuur 3.2: Het datapad

5. Operand verkrijgen (uit geheugen)
6. Data handeling
7. Operand wegschrijven (*store*)

De processor weet aan de hand van de *ISA*¹ welke operatie code voor wat voor processorhandeling staat. De ISA is dus de interface tussen de hardware (van de ALU) en de software (geheugen). Voorbeelden van instructies:

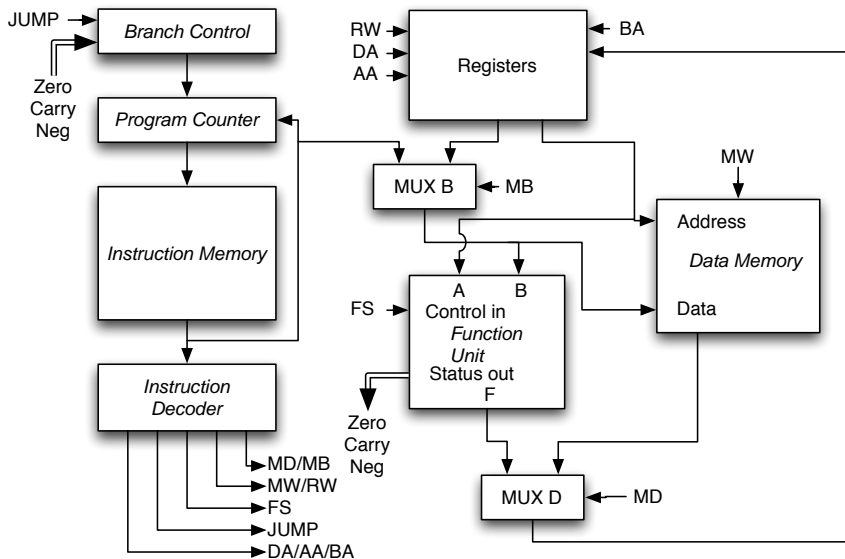
- **transfer:** $C = A$
- **add:** $C = A + B$
(Waarbij A en B beide input registers zijn en C een output register)
- **increment:** $C = A + 1$
- **shift left** 1
- **shift right**

¹*Instruction Set Architecture*

Microprogrammed Control

Niet alle uit te voeren instructies kunnen plaatsvinden in een klokslag van de processor (denk aan vermenigvuldigen, delen, etc.). Het zou mogelijk zijn om zo'n instructie uit te schrijven in de software, maar het kost minder geheugen als de Function Unit zelf zo'n functie heeft. Hiervoor wordt gebruik gemaakt van *Microprogrammed Control*. Op het moment dat er de instructie 'vermenigvuldigen' wordt aangeroepen, laat de processor een reeks van microinstructies draaien, die opgeslagen is in een klein **ROM** geheugen. Op het moment dat de microinstructies zijn afgelopen, gaat de processor verder met de 'gewone' instructies.

Single Cycle Computer



Figuur 3.3: Single cycle computer

Deze simpele computer heeft een datapad en een *control unit*. In de afbeelding is er een *Program Counter* te zien, die naar een instructie in het *instruction memory* verwijst. De instructie die eruit komt gaat in de *instruction decoder*. Verder wordt in geval van een *jump* rechtstreeks informatie uit de instructie

gehaald over het adres in het program memory en is er de mogelijkheid om een deel van de instructie te gebruiken als operand B voor de *function unit*. Dit kan geselecteerd worden met het MB-signaal. Met MD wordt er geselecteerd of de uitkomst van de *function unit* of data uit het hoofdgeheugen in het register moet komen. Met het *branch control* blok wordt afhankelijk van de instructie en de statussignalen van de *function unit* een bepaalde waarde in de *program counter* geladen.

We hebben een serie registers die geselecteerd kunnen worden en een *function unit* die de gewenste operatie uitvoert. Twee registerwaarden gaan de *function unit* in, eentje krijgt een nieuwe waarde met het resultaat van de *function unit*.

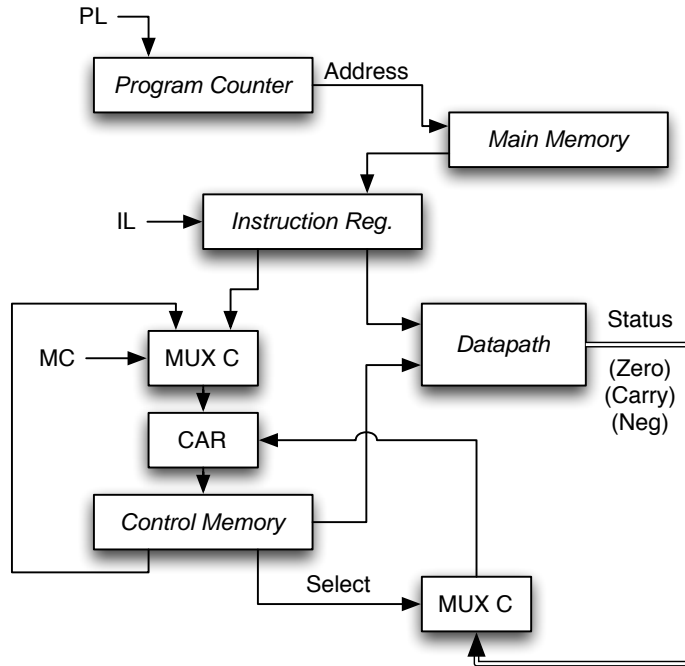
De *single cycle computer* werkt op een bepaalde klokfrequentie. Bij het bepalen van deze frequentie moet worden gekeken naar de langste vertraging (*delay*) die een onderdeel van het hele systeem kan hebben (**kritieke pad**). Op het moment dat de klokfrequentie hoger ligt dan de langste delay, kan er dataverlies optreden, met onvoorspelbare resultaten.

Multi Cycle Computer

De *single cycle computer* was niet in staat te vermenigvuldigen. Met een *microprogrammed operation* kan dat wel. Bij een **multi cycle computer** wordt een *microprogrammed* systeem met een *single cycle computer* verbonden (zie figuur 3.4). Het *microprogrammed control* gedeelte moet dan een nieuwe instructie uit het geheugen verkrijgen.

Het is ook mogelijk om data- en instructiegeheugen te combineren. Het is niet nodig deze gescheiden te houden.

Het nieuwe signaal **IL** staat voor *Instruction Load*. Deze functie kan vanuit het microprogramma worden aangeroepen om een volgende instructie van het programma te laden. Verder is er nog een **PL** lijntje, waarmee de *program counter* opnieuw geladen wordt.



Figuur 3.4: Multi cycle computer

Pipelining

Bij *pipelining* worden er bufferregisters in de processor geplaatst zodat er verschillende fases (*stages*) te onderscheiden zijn. Het doel van pipelining is om het traagste pad korter en dus sneller te maken zodat de frequentie van het hele systeem omhoog kan en zo de doorvoersnelheid hoger wordt. Op een bepaald moment zijn er meerdere instructies in uitvoering, elk in een ander stadium. Er zijn in dit geval (zie figuur 3.5) vier *stages* te onderscheiden (het aantal *stages* verschilt van processor tot processor):

1. **IF** (*Instruction Fetch*)
2. **DOF** (*Decode Operand Fetch*)
3. **EX** (*Execute*), het feitelijke rekenwerk
4. **WB** (*Write Back*)

Algemeen

Wiskunde

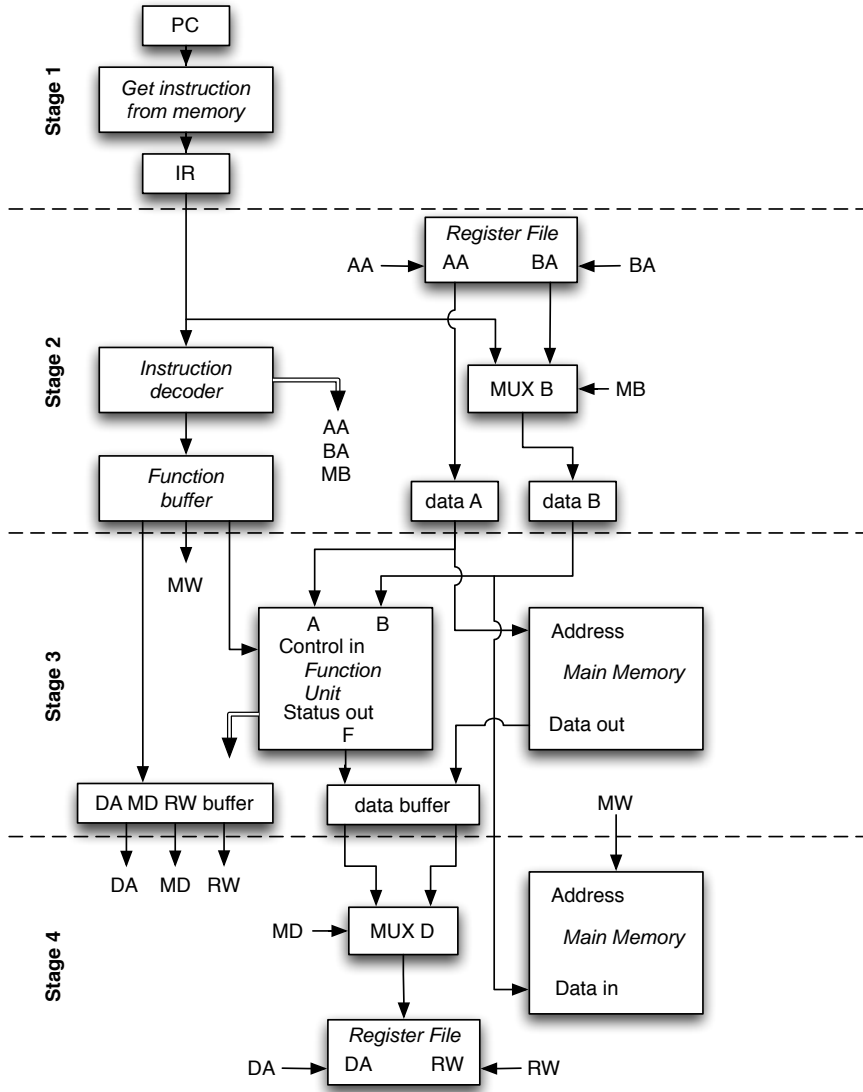
Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica



Figuur 3.5: Pipelining

Problemen met pipelining

Pipelining kan goed worden gebruikt om de snelheid te verhogen. Er is echter een probleem als er twee instructies op dezelfde operand achter elkaar uitgevoerd worden. De eerste instructie heeft dan het resultaat nog niet geschreven en de tweede instructie werkt met de oude waarde van de operand. Dit probleem wordt op verschillende manieren opgelost.

Een van de manieren is dat als de processor detecteert dat een instructie afhangt van een eerdere instructie, dat hij dan wacht totdat deze instructie klaar is. Voor pipelining en het oplossen van de problemen ervan zijn complexe algoritmes bedacht (zie [2] p. 431 e.v.).

Interrupts

Een **interrupt** is een onderbreking van het normale proces van de processor. Interrupts hebben voorrang boven gewone programmacode. Het doel van interrupts is om de efficiëntie van de processor te vergroten. Een processor hoeft dan niet te wachten op bijv. een I/O¹ apparaat, maar kan met zijn acties doorgaan, totdat die I/O-module zelf een interrupt geeft. Een interrupt kan veroorzaakt worden door:

- Het programma zelf, als resultaat van een executie, bijvoorbeeld een *overflow*, delen door 0, het uitvoeren van een onjuiste machine-instructie of een verwijzing naar een adresruimte die niet toegestaan is.
- Een *timer*, zodat bepaalde acties uitgevoerd worden op reguliere basis.
- Een I/O apparaat die data wil schrijven of uitgelezen kan worden.
- Een hardwarefout, bijvoorbeeld een voedingsprobleem of een geheugenpariteitsfout.

Tijdens een interrupt schakelt de processor over naar een ander stuk programmacode (*interrupt handler*), om vervolgens terug te keren naar het instructie-adres waar hij gebleven was. Het is ook mogelijk om (tijdelijk) de interrupts uit te schakelen (*disable*), een prioriteit toe te kennen aan een interrupt (bij meerdere interrupts) of een interrupt te hebben binnen een interrupt handler. Een interrupt die niet genegeerd kan worden, is een *non-maskable interrupt*.

Bussen

Een computer bestaat kortweg uit de volgende onderdelen:

- Processor (CPU)
 - leest instructies en data
 - schrijft data

¹Input/Output

- verzendt controlesignalen
- ontvangt interrupts
- Geheugen
 - moet data onthouden
 - verzendt en ontvangt data
 - ontvangt adressen
 - ontvangt controlesignalen (lezen, schrijven, timing)
- I/O (wordt vanuit de computer hetzelfde gezien als geheugen)
 - ontvangt controlesignalen en zendt deze naar de randapparatuur
 - verzendt en ontvangt data
 - ontvangt adressen van computer
 - zendt interrupt signalen naar computer

Om deze onderdelen met elkaar te laten communiceren, is een bus nodig. Hierin bevinden zich controle-, adres- en datalijnen. Hier werkt het principe van *broadcast*; alle signalen gaan naar alle modules op de bus. Met de adreslijnen moet er dus meegegeven worden voor wie het signaal bedoeld is.

Het is mogelijk om de bus op te delen op basis van snelheid. I/O-devices zijn relatief langzaam en kunnen dus beter op een aparte bus. Zo kan er een *systembus* zijn (voor processor/cache/geheugen) met een brug naar een *high-speed* bus (voor I/O met hoge snelheid, zoals een grafische kaart) met daarin weer een brug naar een bus van lagere snelheid.

Bus types

Bussen kunnen qua type opgedeeld worden in *dedicated* en *multiplexed*. Een *dedicated* bus verbinding is permanent toegewezen aan een bepaalde functie. Een *multiplexed* bus verbinding kan meerdere functies hebben. Zo kunnen door middel van een aparte controlelijn bijvoorbeeld adressen en data over dezelfde busverbinding gestuurd worden (*time multiplexing*).

Arbitrage

Het is nodig om het 'verkeer' te regelen binnen de bus, omdat meerdere modules gebruik willen maken van de bus. Dit kan centraal door middel van een enkel device op de bus die als een scheidsrechter optreedt. Het kan ook gedistribueerd: dan treedt een module (processor) op als *master*, die een data-overdracht kan starten.

Timing

Bij **synchrone timing** worden de tijden van alle gebeurtenissen bepaald door een klok. Een andere vorm is **asynchrone timing**, waarbij er door de module gewacht wordt om een reactie (*acknowledge*) van een andere module.

Cache geheugen

Computergeheugens van allerlei soort zijn te beoordelen op basis van verschillende eigenschappen:

- Locatie bijvoorbeeld in de processor, intern geheugen (*main memory*) of extern geheugen (*secondary*).
- Capaciteit; grootte van een **woord** (*word*) of het totaal aantal woorden. Een **byte** bestaat uit 8 bits en een woord bestaat uit meerdere bits (bijvoorbeeld 8, 16 of 32 bits). De capaciteit van extern geheugen wordt vaak weergegeven in bytes.
- Eenheid van dataverzending; per woord of per **blok** (*block*).
 - De eenheid van dataverzending is voor intern geheugen gelijk aan het aantal data lijnen van en naar de geheugenmodule. Dit kan gelijk zijn aan de woordlengte, maar is meestal groter, bijvoorbeeld een blok van 64, 128 of 256 bits.
 - De lengte van een woord is (meestal) gelijk aan de lengte van een instructie en aan het aantal bits om een getal te representeren (hier zijn wel uitzonderingen op).
 - Soms is de adresseerbare eenheid gelijk aan een woord, soms kan er tot een byte nauwkeurig geadresseerd worden. Als A de adreslengte in bits is, dan geldt voor de laatstgenoemde: het het aantal adresseerbare eenheden = 2^A (**adresruimte**).
- Toegangsmethode; sequentieel, direct, random of associatief.
 - Bij **sequentiële toegang** is het geheugen opgesplitst in *records*. Toegang tot deze records moet gebeuren in een specifieke volgorde. Toegangstijd is erg variabel. Een tape unit is hiervan een voorbeeld.
 - Bij **directe toegang** wordt net als bij sequentiële toegang gebruik gemaakt van een gedeeld lees/schrijfmechanisme. Individuele blokken of records hebben een adres, gebaseerd op een fysieke locatie. De toegangstijd is ook weer variabel. Een harde schijf is een voorbeeld hiervan.
 - Bij **RAM¹** wordt een locatie bereikt met een directe verbinding. De toegangstijd is niet afhankelijk van toegang tot een vorig adres. Intern geheugen en sommige cache systemen zijn *random access*.
 - **Associatief** geheugen is een soort random toegang geheugen, waarbij een vergelijking gemaakt kan worden van bepaalde bits (*tag*) in het woord dat opgeslagen is. Cache geheugens maken gebruik van associatieve toegang.

¹Random Access Memory

- Performance; **toegangstijd, cyclustijd** of snelheid van dataverzending.
 - Vaak is er bij random-access geheugen extra tijd nodig (naast de toegangstijd), de totale tijd is de cyclustijd. De cyclustijd hangt samen met de systeembus.
 - Snelheid van dataverzending (*transfer rate*) is voor random-access geheugen gelijk aan: $1/\text{cyclustijd}$. Voor andere geheugens geldt het volgende:

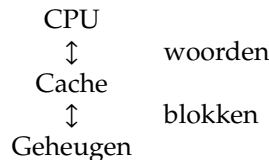
$$T_N = T_A + N/R$$

waarbij T_N = Gemiddelde tijd om N bits te schrijven, T_A = Gemiddelde toegangstijd, N = aantal bits, R = transfer rate, in bits per seconde (bps).

- Fysisch type; Halfgeleider, magnetisch, optisch of een combinatie van magnetisch en optisch.
- Fysische eigenschappen; wel/niet vluchtig (*volatile*), wel/niet uitwisbaar (*erasable*).
 - Vluchtig **DRAM**¹ geheugen moet eens in de zoveel tijd ververs worden, vanwege de lading die van een condensator wegvloeit.
 - Niet-uitwisbaar geheugen (of **ROM**²) is nooit vluchtig.

Principe van cache

Het doel van *cache* is om de snelheid van het geheugen te vergroten. Programma's hebben vaak maar een klein gedeelte van het geheugen opnieuw achter elkaar nodig (*temporal locality*) en als een woord gelezen is, is de kans groot dat woorden in de buurt van dat woord ook gelezen worden (*spatial locality*). De cache is relatief klein, maar snel. Het interne geheugen is groot, maar relatief langzaam.



Figuur 3.6: Communicatie tussen CPU en geheugen via de cache

Bij het opvragen van een geheugenwoord wordt er dus eerst gekeken of het in de cache aanwezig is. Zo ja, dan wordt die data gebruikt en anders moet er eerst een blok data van het geheugen gekopieerd worden naar de cache.

¹Dynamic RAM

²Read Only Memory

Soorten cache

Eigenlijk maken alle caches gebruik van (een variant van) de associatieve toegang. Het geheugenadres bestaat steeds uit een *tag*, een lijn en een woord/byte-selectie.

Directe cache (fig. 3.7)

Opbouw: als normaal geheugen; woord = *tag* + data; data = blok uit geheugen

Zoeken: een deel van het adres adresseert binnen de cache. De *tag* wordt dan vergeleken met een ander deel van het adres.

Tag: elke *tag* heeft 1 mogelijke plaats.

N-way set associatieve cache (fig. 3.8)

Opbouw: *N* directe caches op een rij

Zoeken: *Tag* uit adres vergelijken met meerdere *tags* in (cache) geheugen.

Tag: Elke *tag* kan op *N* plaatsen voorkomen, bijv. $N = 2$ of 4 .

Volledig associatieve cache (fig. 3.9)

Opbouw: Evenveel geheugenplaatsen als er door het adres aangevoeren kunnen worden.

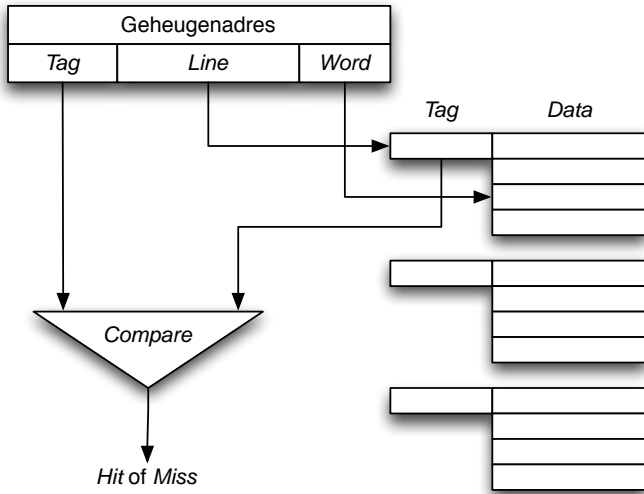
Zoeken: *Tag* en lijn worden vergeleken met die in het geheugen. Er kunnen niet meerdere geheugenadressen op een plaats in de cache terecht komen.

Tag: Elke *tag* kan op alle plaatsen voorkomen. Geschikt voor erg kleine caches.

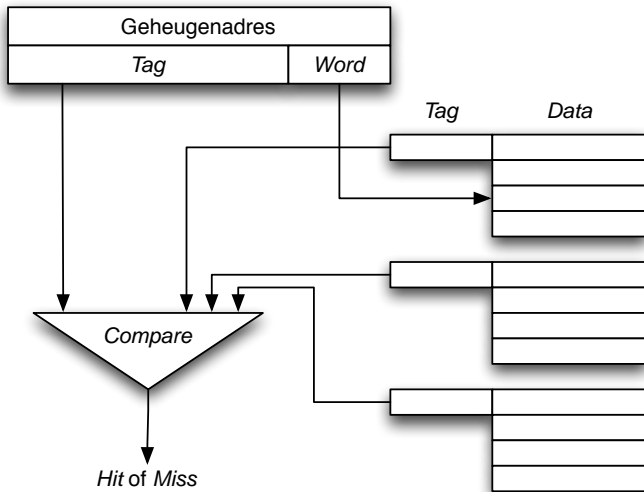
Trashing bij een directe cache is het feit dat een programma herhaaldelijk tussen verschillende blokken wisselt, die op dezelfde lijn in de cache terecht komen (met een andere *tag*). Dat blok moet dan steeds van of naar het geheugen gekopieerd worden. Bij een *N*-way set associatieve cache zijn er meer plaatsen voor blokken die in dezelfde lijn terecht zouden komen en bij een volledig associatieve cache is er altijd plaats.

Lezen

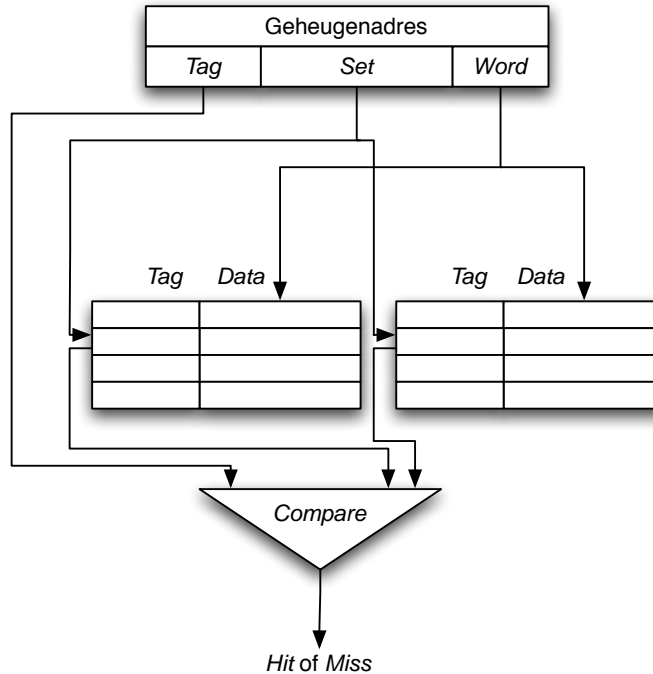
Als een *tag* vergeleken is en er was geen *hit*, dan wordt data uit het interne geheugen gelezen en geplaatst in de cache. Bij directe cache is er maar één mogelijkheid. Als er bij een *N*-way set associatieve cache een ongebruikte plaats in de cache aanwezig is, wordt die overschreven. Anders is er de mogelijkheid om de minst recent gebruikte (*least recently used*, *LRU*), pseudo-LRU of willekeurig een cacheplaats te overschrijven.



Figuur 3.7: Directe toegang (*Direct mapping*)



Figuur 3.8: Volledig associatieve cache (*Fully associative cache*)



Figuur 3.9: Set associatieve cache (*Set associative cache*)

Schrijven

Wanneer zich een *hit* voordoet bij het schrijven zijn er meer mogelijkheden:

- Dóorschrijven (*write-through*), dus zowel schrijven in cache als in het geheugen.
- Alleen in cache schrijven (*copy-back*) en het veld markeren als *dirty*. Het wordt alsnog naar het geheugen geschreven, wanneer de cacheplaats vervangen wordt.

Wanneer er geen *hit* is bij het schrijven zijn er meerdere opties:

- Alleen in het geheugen schrijven (*write-around*), vaak in combinatie met *write-through*.
- Eerst kopiëren vanuit het geheugen naar de cache en daarna in cache schrijven, vaak in combinatie met *copy-back*.

Intern geheugen

Elk geheugen is opgebouwd uit geheugen-IC's en besturingslogica. De geheugen-IC's bestaan uit vele losse geheugencellen. Deze cellen hebben allemaal 3 toegangslijnen: adres- (selectie-), besturing- (controle-) en een datalijn. De selectielijn geeft aan of de cel aangesproken moet worden. Zo niet, dan is de uitgang hoogimpedant (*tri-state*), zodat de uitgangen op één bus kunnen worden aangesloten. Op de controlelijn komt het signaal voor lezen of schrijven. De datalijn werkt in twee richtingen, data in- of uitlezen.

ROM

Een **ROM** (*Read Only Memory*) is bedoeld om data permanent op te slaan, daardoor is het niet vluchtig. Het wordt bijvoorbeeld gebruikt voor: systeemprogramma's (BIOS), functietabellen, etc. Er zijn verschillende types:

- ROM is tijdens fabricage geschreven en kan niet worden gewist.
- **PROM** (*Programmable ROM*) is (eenmalig) te beschrijven met behulp van apparatuur.
- 'Read-mostly' geheugen is redelijk gemakkelijk te wissen met behulp van bijvoorbeeld UV-licht of elektrische stroom; **EPROM** (*Erasable PROM*) en **EEPROM** (*Electrically Erasable PROM*) of Flash, respectievelijk.

RAM

RAM (*Random Access Memory*) zijn de 'normale' geheugens en zijn vluchtig; er is een voeding nodig om de gegevens te bewaren. Het verschil tussen RAM en *erasable* ROM is dat bij RAM een lees- of schrijfbewerking ongeveer evenveel tijd kost, terwijl het herschrijven van *erasable* ROM relatief lang duurt.

Static RAM

De geheugenwerking van SRAM's is gebaseerd op een flipflop bestaande uit vier transistors per bit. SRAM's worden vooral gebruikt voor geheugens waar hoge snelheid vereist is. Voor een SRAM-IC zijn er meestal de volgende in- en uitgangen:

- $A_0..A_{n-1}$; Adresingangen
- $D_0..D_{w-1}$; Bidirectionele data in- en uitgangen
- Controleingangen
 - **CS** (*Chip Select*) wordt gebruikt om een IC te selecteren.
 - **WE** (*Write Enable*) bepaalt of er gelezen of geschreven moet worden.
 - **OE** (*Output Enable*) alleen bij $OE = 1$ kunnen de datauitgangen uitgelezen worden en staan ze dus niet in tri-state.

Dynamic RAM

De geheugenwerking van DRAM's is gebaseerd op het vasthouden van lading op een (zeer kleine) parasitaire capaciteit op de *gate* van een MOSFET. Per bit is er dus één transistor nodig. Deze lading op de condensator moet regelmatig worden ververst.

Aansluitingen van DRAM's zijn complexer dan SRAM's, omdat de data ververst moet worden en door het multiplexen van steeds twee adresingangen op een aansluitpen. DRAM's zijn opgebouwd in een matrix van rijen en kolommen en elk kruispunt van een rij en een kolom bestaat uit w bits, waar w de woordlengte voorstelt. Verder is er een rij-buffer, waarin een complete rij kan worden gebufferd. (Zie tabel 3.1.)

DRAM lezen

Met de helft van de adresingangen wordt een rij geselecteerd, deze rij wordt gekopieerd naar de rij-buffer. Hierbij gaat de informatie in de rij zelf verloren, dus moet de rij terug worden gekopieerd (die rij wordt dan meteen ververst). Met de andere helft van het adres wordt een kolom uit de rijbuffer geselecteerd en deze wordt op de uitgang gezet. Tijdens het 'terugkopieëren' van de rij vanuit de rij-buffer moet de matrix worden voorbereid op het lezen van een nieuwe rij. Dit alles duurt langer dan het selecteren van een kolom uit de rij-buffer. Hierdoor is de cyclustijd van DRAM's groter dan de toegangstijd.

DRAM schrijven

Het schrijven lijkt op het lezen: met de helft van de adresingangen wordt een rij geselecteerd en gekopieerd naar de rij-buffer. Met de andere helft van het adres wordt de kolom geselecteerd en beschreven. Daarna wordt de hele rij-buffer gekopieerd naar de rij, zodat die rij weer ververst is.

DRAM verversen

Elke rij moet binnen een tijdsperiode van enkele tot tientallen ms worden ververst. Een rij wordt, na het aanbieden van een rij-adres, gekopieerd naar de rij-buffer en weer terug gezet. Moderne DRAM's hebben zelf een *refresh-counter* die ervoor zorgt dat alle rijen opeenvolgend worden ververst.

Synchrone geheugens

Synchrone geheugens maken gebruik van een centrale klok. Het voordeel van synchrone geheugens is dat zowel het geheugen als de processor dezelfde tijd-referentie hebben en met elkaar kunnen 'afspreken' wanneer gevraagde data beschikbaar is. Ingangssignalen worden bijvoorbeeld op de actieve flank

Een DRAM-IC heeft in het algemeen de volgende aansluitingen:

$A_0..A_{\frac{n}{2}-1}$	Adresingangen. De rij- en kolomadressen zijn gemulti-plex op dezelfde aansluitpennen.
$D_0..D_{w-1}$ of D en Q	Bidirectionele data-ingangen en -uitgangen als $w > 1$.
RAS#	Gescheiden 1-bits data-ingang en data-uitgang als $w = 1$. 'Row Address Strobe'. Op de neergaande flank van RAS# wordt op de adresingangen het rij-adres bemonsterd.
CAS#	'Column Address Strobe'. Op de neergaande flank van CAS# wordt op de adresingangen het kolom-adres bemonsterd.
WE#	'Write Enable'. Bepaalt of er wordt gelezen dan wel geschreven.
OE#	'Output Enable'. Alleen als data in- en uitgangen niet gescheiden zijn.

Tabel 3.1: Aansluitingen van een DRAM-IC

bemonsterd en uitgangssignalen veranderen op deze actieve flank. Hierdoor hoeven de ingangssignalen niet meer precies op het juiste moment te veranderen, mits ze op de actieve flank maar de juiste waarde hebben. Het lijkt alsof een geheugen beperkt wordt in zijn snelheid door de klok, maar het grote voordeel is dat er een *pipeline* is ontstaan, waardoor blokken data (*bursts*) sneller kunnen worden afgehandeld. Voor het lezen van het eerste woord van een *burst* zijn tenminste twee klokpulsen nodig, maar vervolgens kunnen op elke volgende klokpuls zowel een woord worden gelezen als nieuwe ingangssignalen worden aangeboden. Deze geheugens worden *synchronous flowthrough* genoemd.

Door nog een extra *pipeline stage* toe te voegen in de vorm van een *output register* kan de kloksnelheid verder worden opgevoerd, omdat het feitelijke lezen van de data en het aanbieden van de data op de externe pennen over twee klokperiodes wordt gespreid. Voor het eerste woord van een *burst* zijn dan weliswaar drie klokpulsen nodig, maar de overige woorden van een *burst* worden sneller afgehandeld door de snellere klok. Dergelijke synchrone geheugens worden *synchronous pipelined* genoemd.

Geheugen waarbij een lees- of schrijfactie zowel op de opgaande als op de neergaande flank van de klok worden uitgevoerd, worden aangeduid met **DDR**¹. Deze truc voor het verhogen van de *datarate* wordt in moderne computers toegepast.

¹Double Data Rate

Input/Output

Er zijn veel verschillen in I/O-apparaten, die zijn in te delen in verschillende hoeveelheden data, verschillende snelheden en data in verschillende formaten. Vaak zijn I/O-apparaten langzamer dan de CPU en het geheugen.

I/O module

Om de verschillen tussen I/O-apparaten op te vangen, zit er tussen de I/O-apparaten en de CPU (via bus) een of meerdere I/O-module(s). De taken van een I/O-module zijn:

- Aansturen en timing
- Communicatie met de processor
- Communicatie met het apparaat
- Data bufferen
- Fouten detecteren

De stappen voor het communiceren zijn:

- CPU vraagt de status op van het apparaat
- I/O-module geeft status door
- Als het apparaat klaar staat, vraagt de CPU om een dataverzending
- De I/O-module verkrijgt data van het apparaat of van de CPU
- De I/O-module stuurt de data naar de CPU of naar het apparaat

I/O aansturing

Er zijn verschillende technieken voor I/O-operaties: Geprogrammeerde I/O, I/O aangestuurd door interrupts en DMA¹. Om een I/O-gerelateerde instructie uit te voeren, stuurt de CPU naast een adres, welke de I/O-module of het externe apparaat specificeert, een commando via de databus:

- Aansturen; De CPU vertelt een apparaat wat het moet doen.
- Testen; Een status opvragen.
- Lezen; Data van het apparaat naar de I/O-module sturen.
- Schrijven; Data van de systeembus naar het apparaat sturen.

Adressering

Deze commando's kunnen, net zoals bij het geheugen, uitgevoerd worden op een bepaald I/O-adres. Hiervoor zijn twee manieren: memory-mapped I/O en I/O-mapped (*isolated*) I/O. Bij memory-mapped I/O worden I/O-adressen net zo behandeld als geheugenadressen. Een bepaald (I/O-)adres kan dus gelezen

¹Direct Memory Access

of geschreven worden. In de systeembus zijn er geen aparte lijnen voor I/O. Bij I/O-mapped I/O zijn er op de systeembus twee extra lijnen nodig, input en output. Doordat bij I/O-mapped I/O de adressen voor I/O en geheugen gescheiden zijn, is er een groter gebied aan adressen beschikbaar voor beide.

Geprogrammeerde I/O

Bij geprogrammeerde I/O (*programmed I/O*) stuurt de CPU een I/O-module direct aan. De CPU wacht steeds wanneer het een opdracht heeft gegeven, om vervolgens de status te controleren. Er wordt geen gebruik gemaakt van interrupts.

I/O aangestuurd door interrupts

Bij deze *interrupt driven I/O* stuurt de CPU een commando naar een I/O-module en gaat vervolgens verder met andere taken. Op het moment dat de I/O-module klaar is (deze is immers langzamer), stuurt deze een interrupt naar de CPU. Op dat moment kan de CPU opnieuw iets naar de I/O-module sturen. De CPU hoeft hierbij niet te wachten.

Direct Memory Access (DMA)

Bij DMA bevindt zich een extra module op de systeembus. De CPU laat de DMA-module weten wat er moet gebeuren. Deze module handelt alles wat betreft I/O af en de CPU kan verder gaan met andere dingen. De DMA-module handelt de data-verzending van en naar de I/O-module af en stuurt een interrupt naar de CPU, wanneer de taak voltooid is. De DMA-module zorgt er tevens voor dat de data in het geheugen komt.

Memory Management

Bij een systeem waar meerdere processen tegelijkertijd draaien, is effectief geheugenbeheer (*memory management*) nodig. Zo moet het geheugen opgedeeld worden: een deel voor het besturingssysteem of OS¹ en een deel voor de processen.

Swapping

Als een proces moet wachten op bijvoorbeeld een I/O-apparaat, neemt het, als het in het geheugen blijft staan, alleen maar ruimte in. De CPU kan dan een proces tijdelijk op de harde schijf zetten, om zo een ander proces de kans te

¹Operating System

geven een deel van het geheugen te gebruiken. Dit heet *swapping*. Een harde schijf is weliswaar ook een I/O-apparaat, maar deze is relatief snel.

Partitionering

Een geheugen moet worden ingedeeld in **partities** om verschillende processen in het geheugen te kunnen zetten. Hiervoor zijn verschillende mogelijkheden:

- **Vaste partities met gelijke grootte**
Het is mogelijk dat er veel ruimte niet wordt gebruikt.
- **Vaste partities met ongelijke grootte**
Een proces wordt in de kleinste partitie geplaatst waar het in kan. Er wordt altijd een deel van het geheugen niet gebruikt.
- **Partities met een variabele grootte**
Een proces neemt precies evenveel ruimte in als het nodig heeft. Als een proces uit het geheugen wordt gehaald en een ander proces er in wordt gezet, kunnen er onbruikbare lege ruimtes ontstaan (**fragmentatie**).

Elk proces heeft een **basisadres** en binnen het proces wordt alleen gebruik gemaakt van een **logisch adres** (*offset*), dat ten opzichte van het basisadres geldt. Zodra de CPU een taak uitvoert, wordt het logische adres samen met het basis adres omgerekend naar een **fysisch adres**.

Paging

Bij *paging* wordt het geheugen niet opgedeeld in partities, maar in *frames*, die relatief klein zijn. Een proces wordt verdeeld in *pages*, die elk worden toegewezen aan een *frame* in het geheugen. Er blijft alleen een (kleine) hoeveelheid ruimte over bij de laatste *page*. In het programma bestaat een logisch adres (ook wel virtueel adres) uit een *page*-nummer met een relatief adres. Het besturingssysteem houdt per proces een *page* tabel bij, waarin voor elke *page* een *page*-nummer en de locatie van het *frame* staan.

Paging op verzoek

Met paging op verzoek (*demand paging*) wordt een page pas in het geheugen gebracht op het moment dat deze nodig is. Op het moment dat een page niet in het geheugen staat (*page fault*), moet het worden gelezen vanaf het virtuele geheugen op de harde schijf. De programmeur hoeft niet langer rekening te houden met de grootte van het geheugen en het is mogelijk dat een proces groter is dan het geheugen.

Structuur Page Tabel

Het is mogelijk om de *page* tabellen in het geheugen te bewaren. Echter, bij grote processen wordt er een groot deel van de *page* tabel niet gebruikt en neemt deze onnodige ruimte in. Er kan een deel van de *page* tabel in het geheugen staan en de rest op de harde schijf. *Page* tabellen kunnen ook onderworpen zijn aan *paging*.

Het is ook mogelijk om een twee-niveau principe te gebruiken. Dan bestaat er een *page directory*, waarin de startadressen staan van (delen van) de *page* tabellen. De maximumgrootte van een *page* tabel is dan de grootte van een *page*.

Een andere structuurmogelijkheid is de geïnverteerde *page* tabel. Het *page* nummer (in het virtuele adres) wordt vergeleken met een *hash* tabel, met behulp van een *hashing* functie. Deze *hash* tabel bevat een verwijzing naar de geïnverteerde *page* tabel, waarin de *page* tabel entries staan. Er is dan een entry voor een *page* in het echte geheugen in plaats van één entry per *page* in het virtuele geheugen.

Translation Lookaside Buffer

Om niet te vaak het geheugen te hoeven raadplegen, wordt een **TLB** (*Translation Lookaside Buffer*) gebruikt. Deze TLB fungeert als een cache en bevat de laatst gebruikte *page* tabel entries. Op het moment dat de processor een adres nodig heeft, wordt eerst de TLB geraadpleegd. Als de *page* tabel entry daar niet in staat, wordt het geheugen geraadpleegd en eventueel vervolgens de harde-schijf aangestuurd om zo de entry uit het virtuele geheugen te verkrijgen. De TLB wordt in de laatste twee gevallen bijgewerkt.

Segmentatie

Geheugen is ook nog op een hoger niveau in te delen: **segmentatie** (parallel aan partitionering). Segmentatie is zichtbaar voor de programmeur en heeft als doel het structuur te brengen in programmatuur en data. Zo wordt de logische adresruimte opgedeeld in segmenten van bijvoorbeeld programmacode en data, elk met eigen grootte en eigen protectie. De voordelen hiervan zijn:

- Het is simpeler om grote data structuren te behandelen.
- Programma's kunnen afzonderlijk worden veranderd en opnieuw gecompileerd zonder dat een groep programma's opnieuw gelinkt en geladen moet worden.
- Processen kunnen worden gedeeld.
- Beveiliging kan worden ingesteld.

Computernetwerken

Internet

Het **internet** is een groot, wereldwijd computernetwerk bestaande uit miljarden computers. De opbouw van dit netwerk is te zien als een groot web met aan de randen hiervan zogenaamde eindsystemen of *hosts*. De hosts zijn 'intelligent' en het web wordt 'dommer' naarmate er meer naar het centrum gekeken wordt. Het midden bestaat uit een wirwar van verbindingen (*links*) en knooppunten die hosts met elkaar verbinden.

De hosts zijn veelal 'normale' computers, maar tegenwoordig kunnen het ook mobiele telefoons of zelfs koelkasten zijn. Hosts zijn eventueel onderling doorverbonden in een lokaal netwerk en zijn altijd via een of andere *packet switch* (vaak een router) verbonden met andere netwerken.

In het internet ligt er geen directe kabel tussen elke twee computers, maar worden verbindingen (*links*) gedeeld. Gegevenstransport vindt plaats door kleine pakketjes gegevens over verbindingen te versturen. Aan de rand van een lokaal netwerk bevindt zich een of andere *packet switch* die als taak heeft om pakketjes op de verbinding te plaatsen en tevens de verbinding tussen meerder hosts te delen. Afhankelijke van de benodigde bandbreedte, gemeten in **bps**¹, zijn er verschillende type verbindingen beschikbaar zoals o.a. koperen telefoonkabels, coax- en glasvezelkabels.

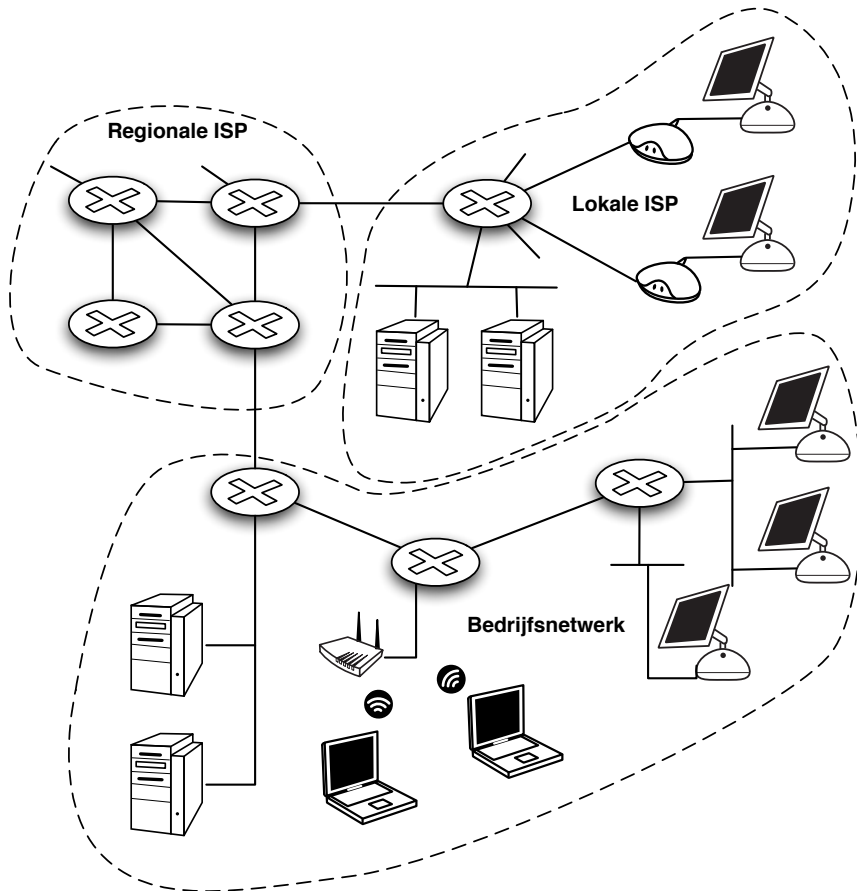
De *packet switch* van het lokale netwerk is via een *link* verbonden met bijvoorbeeld een **ISP**², welke als een soort knooppunt dient waar talloze andere netwerken en ISPs op aan gesloten zitten. Op eenzelfde manier zijn vele andere netwerken en ISPs aan elkaar gekoppeld. Op deze manier ontstaat er een gigantisch netwerk waar aan de randen 'intelligente hosts' zitten en het hart gevormd wordt door 'domme' *packet switches* en kabels. Een internet zou er dus zou uit kunnen zien als in figuur 3.10

Protocollen

Om communicatie tussen meerdere computers mogelijk te maken zijn er allereerst afspraken nodig over hoe de communicatie dient te verlopen. Een **protocol** is (definitie) de verzameling regels die de syntax, semantiek (betekenis) en synchronisatie van de communicatie beschrijven.

¹bits per seconde

²Internet Service Provider



Figuur 3.10: Mogelijke opbouw van een internet

Lagenmodel

Computernetwerken kunnen worden beschreven als een structuur bestaande uit lagen. Elke laag is een zelfstandig onderdeel met eigen taken en verzorgt diensten voor een hogere laag. Het geheel zit zo in elkaar dat elke laag (in theorie) op verschillende manieren gerealiseerd kan worden, zonder dat de overige lagen dit hoeven te weten en er last van ondervinden (encapsulatie van functionaliteit).

Het lagenmodel dat oorspronkelijk voor netwerken gebruikt werd, is het zogenaamde 'Open Systems Interconnection Reference Model' afgekort **OSI-model**. Het OSI-model beschrijft een lagenstructuur bestaande uit 7 lagen van boven naar beneden:

- 7) Applicatielaag
- 6) Presentatielaag
- 5) Sessielaa
- 4) Transportlaag
- 3) Netwerklaag
- 2) Data linklaag
- 1) Fysieke laag

Alle lagen boven de fysieke laag werken op gegevens. Zij verzorgen hun diensten door – van boven naar beneden – het bericht 'in te pakken' (vooraan een header toevoegen). Van beneden naar boven wordt de data uitgepakt en doorgegeven aan een hogerliggende laag. Op deze manier komt de encapsulatie van functionaliteit terug in de encapsulatie van de gegevens. Zie ook figuur 3.11.

De bovenste 3 lagen van het OSI-model houden zich bezig met communicatie tussen processen draaiende op eindsystemen. De lagen verzorgen o.a. sessies, encryptie en encoding. Op dit niveau worden **berichten** uitgewisseld.

De transportlaag regelt communicatie tussen processen die op verschillende eindsystemen draaien. Dit kan het doen met of zonder de garantie dat alle informatie aankomt. De keuze hiervoor hangt af van de toepassing. Een pakket op de transportlaag wordt **segment** genoemd.

De netwerklaag regelt communicatie tussen eindsystemen. Het probeert pakketten via de kortst mogelijke route door het netwerk te leiden. Gedurende het transport passeren de pakketten verschillende type verbindingen (links) en knooppunten. Een pakket op de netwerklaag wordt **datagram** genoemd.

De linklaag regelt het transport van **frames** (naam voor pakketten op linklaagniveau) tussen knooppunten onderling.

De fysieke laag regelt het transport van de bits waaruit de frames bestaan

Algemeen

Wiskunde

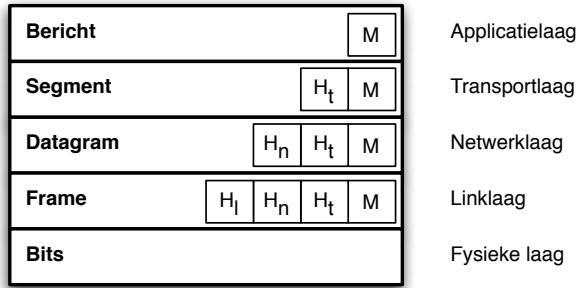
Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica



Figuur 3.11: Encapsulatie van het bericht op de verschillende lagen in het 5-lagige TCP/IP-model

over een medium. Dit omvat zaken als timing, voltages, type medium enz.

In moderne computernetwerken wordt in plaats van het 7-lagige OSI-model vrijwel altijd het 4- of 5-lagige TCP/IP-model gebruikt. Het TCP/IP-model voegt de bovenste drie lagen samen tot de applicatielaag en daarnaast wordt vaak de fysieke laag weggelaten.

Applicatielaag

Het internet is te zien als een systeem voor het uitwisselen van diensten. Deze diensten worden verzorgd door processen die op eindsystemen draaien. Een proces dat een dienst aanbiedt heet in het algemeen een *server* en de afnemer van de dienst een *client*.

De **applicatielaag** is de koppeling tussen processen draaiende op eindsystemen en het netwerk. De laag heeft als doel communicatie tussen clients en servers via het netwerk mogelijk te maken. Hiervoor maakt het gebruik van de transportlaag welke als een soort postbode de gegevens bij de ontvanger probeert af te leveren.

Bij het versturen van een brief bestaat de keuze hem in de brievenbus te gooien of hem aangetekend op te sturen. In het ene geval heb je niet de garantie dat de brief aankomt en in het andere geval wel. De garantie dat de brief aankomt maakt het transport van de brief wel veel duurder. Net zoals een brief op meerdere manieren verzonden kan worden biedt ook de transportlaag verschillende transportdiensten aan. Een transportdienst wordt verzorgd door een zogenaamd transportlaagprotocol. Twee van de beschikbare trans-

portprotocollen zijn TCP en UDP. Het UDP-protocol is vergelijkbaar met de brievenbus uit het voorbeeld van de post: het probeert alle gegevens die het binnenkrijgt bij de afzender aan te laten komen, maar zonder enige garanties over de aankomst. TCP daarentegen is vergelijkbaar met de aangetekende brief en biedt de garantie dat alle gegevens aankomen. De prijs die hiervoor betaald wordt, is dat er ook verkeer (meer bandbreedte, vertraging) nodig is om het aankomen van pakketten te controleren.

Transport

Het meest eenvoudige transportprotocol is **UDP** (*User Datagram Protocol*). Het protocol wordt als onbetrouwbaar beschouwd, omdat het geen enkele garantie biedt omtrent de aankomst van pakketten, de volgorde van aankomst, hoeveel tijd het transport duurt enzovoort. Een andere belangrijke eigenschap is dat het protocol connectieloos is. Dit houdt in dat er geen speciale opstartprocedure ('hand shaking') plaats hoeft te vinden voordat pakketten verstuurd kunnen worden. Daarnaast houdt het in dat er geen toestandsinformatie over de verbinding bijgehouden wordt.

Het andere protocol, **TCP** (*Transmission Control Protocol*), is een betrouwbaar, connectie-georiënteerd protocol. Het garandeert dat alle pakketten die verzonden worden aankomen en zelfs dat dit in de volgorde van verzenden gebeurt. Ook bevat TCP mechanismen om te voorkomen dat de ontvanger overspoeld wordt met (*flow control*) of het netwerk verstopt raakt (*congestion control*). Als laatste biedt TCP net als UDP geen garanties over beschikbare bandbreedte of timing.

De keuze voor een van beide protocollen hangt af van de toepassing. Het probleem is dat het medium waar het transport over plaatsvindt onbetrouwbaar is, waardoor er pakketten verloren kunnen gaan (bijvoorbeeld door overbelasting van het netwerk). In het geval van TCP moeten alle pakketten die verloren zijn gegaan opnieuw verzonden worden. Het gevolg van dit alles is dat het lang kan duren voordat een pakket aankomt en daarnaast wordt er door het opnieuw versturen veel bandbreedte gebruikt. In het geval van UDP worden er zoveel pakketten als mogelijk verzonden, maar hiervan zullen niet alle aankomen. Voordeel is dat de bandbreedte beter benut wordt en dat pakketten sneller arriveren. De toepassing moet het wel toestaan dat informatie verloren gaat.

Voor een toepassing als e-mail wordt TCP gebruikt, omdat het belangrijk is dat alle informatie echt aankomt. Voor een toepassing als internettelefonie is het met name belangrijk dat pakketten zo snel mogelijk aankomen (zo kort mogelijke tijdvertraging, verliezen onder de 3% zijn werkbaar). Hiervoor is

UDP dan het meest geschikt.

Sockets

Terug naar de applicatielaag en de diensten die zij verleent. Allereerst is er een mechanisme nodig om andere computers te kunnen vinden en daarnaast is er nog een ‘postbode’ nodig om de informatie op de plaats van bestemming te doen aankomen. Iedere computer heeft een uniek nummer, een **IP-adres**, waarmee hij gevonden kan worden.

De taak van postbode wordt opgenomen door *sockets*. Een socket vormt de verbinding tussen applicatie- en transportlaag. Het idee is dat een applicatie een TCP of UDP socket aanmaakt en hier informatie naartoe stuurt. De socket probeert via de onderliggende lagen er vervolgens voor te zorgen dat de gegevens bij de socket van de ontvanger aankomen. De socket van de ontvanger geeft de gegevens weer door aan de juiste applicatie.

In het geval van UDP zijn voor het aanmaken van een socket het IP-adres van de ontvanger en een zogenaamd **poortnummer** nodig. Dit poortnummer is vereist, omdat op een computer meerdere applicaties kunnen draaien. Het poortnummer geeft dan aan voor welke applicatie de gegevens bedoeld zijn. Veel standaard internetprotocollen hebben een eigen poortnummer, zo heeft FTP (dat gebruikt wordt voor het versturen van bestanden) poort 21, het emailverzendprotocol SMTP 25 enzovoort.

Voor het aanmaken van een TCP socket zijn naast het IP-adres en het poortnummer van de ontvanger ook die van de verzender nodig. Dit heeft te maken met de procedure die plaatsvindt tijdens het opbouwen van een TCP-verbinding. Meer hierover in de behandeling van de transportlaag op pagina 194.

DNS

Zoals gezegd heeft iedere computer een IP-adres, waarmee deze te vinden is op het internet. Een IP-adres bestaat uit ten minste vier getallen van 0 tot 255 gescheiden door een punt zoals ‘192.168.1.1’. Het werken met IP-adressen is prima, maar voor mensen is het niet aangenaam getallen te moeten onthouden. Om deze reden is er een protocol ontworpen dat een naam aan een IP-adres kan koppelen, zodat deze gebruikt kan worden in plaats van het IP-adres. De naam van dit protocol is **DNS**¹ en heeft dus de taak om een zogenaamde domeinnaam in een IP-adres te vertalen of andersom.

¹Domain Name System

In het meest eenvoudige geval heeft een domeinnaam de vorm “google.com”, waar “.com” een zogenaamde **extensie** is die aangeeft om wat voor een soort site het gaat en is “google” de **hostnaam**. De combinatie van hostnaam en extensie is uniek. Er zijn verscheidene extensies waaronder ‘.com’, bedoeld voor commerciële bedrijven, ‘.org’ voor non-profit organisaties zoals stichtingen en ‘.nl’ voor Nederland.

Een computer zelf heeft altijd een hostnaam. Deze hostnaam is niet uniek en is meestal de naam die gebruikt wordt om een computer in een lokaal netwerk aan te spreken. Om een computer via een naam bereikbaar te maken vanaf het internet moet deze een **domeinnaam** hebben. Het is mogelijk de computer de hostnaam ‘mijndomein’ te geven en de extensie ‘.nl’ te gebruiken. Vaak echter heeft een bedrijf meerdere computers die bereikbaar moeten zijn vanaf het internet. Om dit onder dezelfde domeinnaam mogelijk te maken kan ‘mijndomein.nl’ uitgebreid worden door er een extra naam en punt voor te zetten zoals ‘pc1.mijndomein.nl’. In dit geval is ‘pc1’ de hostnaam en is het geheel een **subdomein** van ‘mijndomein.nl’.

Voor het beschrijven van de werking van DNS gaan we uit van een computer met domeinnaam ‘mijnpc.mijndomein.nl’ en als lokale DNS-server een server met hostname ‘dns.mijndomein.nl’. De gebruiker wil graag de site ‘news.google.com’ bekijken. Hiertoe wordt de naam ‘news.google.com’ naar de lokale DNS-server ‘dns.mijndomein.nl’ gestuurd. Deze vraagt aan één van de hoofd (*root*) DNS-servers van het internet of die ‘news.google.com’ toevallig kent (Dit zou kunnen; om te voorkomen dat de DNS-servers in het internet niet voor elke zoekactie geraadpleegd worden, onthouden DNS-servers de resultaten van recente zoekopdrachten). De root-server kijkt in zijn eigen lijst met domeinen en zegt antwoordt aan de lokale DNS-server “ik ken news.google.com niet, maar ik ken wel een server die .com kent” en geeft vervolgens het IP-adres van de DNS-server die ‘.com’ kent. Vervolgens vraagt de lokale DNS-server aan de DNS-server van het .com-domein of deze ‘news.google.com’ kent. Helaas zal deze antwoorden dat hij ‘news.google.com’ niet kent, maar dat hij wel de DNS-server voor ‘google.com’ kent. Uiteindelijk zoekt de lokale DNS-server contact met de DNS-server van ‘google.com’ om zo het IP-adres van ‘news.google.com’ te achterhalen. Dit is een iteratieve zoekactie.

Een andere manier van zoeken bij DNS is via recursie. De lokale DNS-server doet weer een verzoek bij een van de root-servers voor ‘news.google.com’, maar in plaats van te antwoorden dat hij deze naam niet kent, zal de root-server zelf contact opnemen met de DNS-server voor ‘.com’. De DNS-server voor ‘.com’ kent ‘news.google.com’ niet, maar zal ook weer zelf contact opnemen met de DNS-server voor ‘google.com’. De DNS-server van ‘google.com’

kent 'news.google.com' en geeft dit IP-adres via '.com' en de root-server door aan onze lokale DNS-server. Op hoge niveau's als dat van de '.com' server zou deze methode voor een zeer hoge belasting van de DNS-server zorgen. Om die reden wordt daar alleen iteratie gebruikt.

DNS records

Elke DNS-server bevat een database met daarin een **RR**¹ voor elke hostnaam naar IP-conversie en andere. Een RR heeft de vorm: (*Name, Value, Type, TTL*). Het veld **TTL**² bevat een bepaald tijdsinterval, waarna het record in kwestie niet geldig meer is. Elk record heeft een beperkte levensduur, omdat IP-adressen in het internet kunnen veranderen en om er voor te zorgen dat de database niet te vol raakt. (Zoeken in een grote database duurt lang.)

Er zijn verschillende typen records:

- *Type=A*, wordt gebruikt voor hostnaam → IP-conversie waar *Name* dan de hostnaam bevat en *Value* het IP-adres. Een voorbeeld is: (mijnpc.mijndomein.nl, 1.2.3.4, A)
- *Type=AAAA*, zelfde als *Type=A* maar dan bedoeld voor versie 6 van het IP-protocol dat langere IP-adressen bestaande uit 6 (hexadecimale) getallen van 0 tot 65535 decimaal (zie ook pag. 206).
- *Type=CNAME*, dit maakt het mogelijk aliassen voor een 'echte' (*canonical*) domeinnaam te maken. Stel dat de kanonieke domeinnaam van een computer 'mijnpc.mijndomein.nl' is, dan zou hiervoor een alias 'gavepc.mijndomein.nl' kunnen worden gemaakt. Het veld *Name* bevat de alias en *Value* de domeinnaam. De alias erft alle velden van het echte domein zoals IP-adres, MX-records enzovoort
- *Type=NS*, koppelt een domein ('mijndomein.nl') aan een of meerdere DNS-servers in dat domein ('dns1.mijndomein.nl', 'dns2.mijndomein.nl' enzovoort). De DNS-server is een zogenaamde *authoritative server* voor 'mijndomein.nl' wat inhoudt dat hij hostnamen binnen 'mijndomein.nl' kent en daarover een autoritaire uitspraak kan doen. Het domein staat in het veld *Name* en de bijbehorende DNS-server in *Value*.
- *Type=MX*, maakt het mogelijke een eenvoudige naam aan een mailserver te koppelen. Vaak bestaat een domein uit verschillende servers voor email en HTTP. De echte naam van de mailserver kan dan zijn 'mail.mijndomein.nl'. Om ervoor te zorgen dat mensen ook '@mijndomein.nl' kunnen gebruiken i.p.v. '@mail.mijndomein.nl' bestaan MX-records zoals: (mijndomein.nl, mail.mijndomein.nl, MX)

¹Resource Record

²Time To Live

Een *authoritative server* kan een bedrijfsserver zijn die van het bedrijf alle hostnamen bepaalt en voor alle hostnamen een type A record bevat. (Omgekeerd is het niet zo, dat een type A record op een *authoritative server* duidt: de server kan deze hostname namelijk ook in cache hebben.)

Verder kunnen er voor een hostname (bijvoorbeeld 'google.com') meerdere 'A' en 'MX' meerdere records zijn. De client kiest uit de geretourneerde lijst een willekeurig IP-adres. Dit wordt onder andere gebruikt om de last op veelbezochte domeinen over meerdere servers te verdelen (*round robin DNS*).

HTTP

Het **HTTP** (*HyperText Transfer Protocol*) is het protocol wat dagelijks gebruikt wordt om te browsen over het internet. Momenteel bestaan er twee versies: HTTP/1.0 en HTTP/1.1 die worden beschreven in respectievelijk RFC 1945 en RFC 2616, en er wordt gewerkt aan HTTP/2.0 (RFC 1866). Het protocol draait in de applicatielaag en maakt gebruik van TCP. De belangrijkste verschillen tussen versie 1.0 en 1.1 zijn dat in versie 1.0 slechts n domein per IP adres mogelijk is, en dat er maar n *request-response* per (TCP) verbinding mag zijn. Om die reden is versie 1.0 vrijwel uitgestorven op het internet, en wordt het bijna alleen nog gebruikt door proxy servers (zie pag. 192).

Als een webpagina wordt opgevraagd, verstuurt de browser (bijvoorbeeld Firefox of Netscape) een aanvraag naar de webserver (bijvoorbeeld Apache of IIS). Nadat de TCP handshaking voorbij is, stuurt de browser een aanvraag die er zo uitziet:

HTTP request

- 1 <METHODE> <URI> <HTTP VERSIE> <crLf>
- 2 [*<Headernaam>*: <Waarde> <crLf>]*
- 3 <crLf>

Een tweetal speciale tags uit bovenstaande aanvraag verdienen nog een extra uitleg: <METHODE> en <URI>.

Methode

De methode is één van de volgende (voor HTTP/1.1): OPTIONS, GET, HEAD, POST, PUT, DELETE, TRACE, CONNECT.

Ook kan een zogenaamde "*extension-method*" gebruikt worden. Een *extension-method* is een HTTP methode die door verschillende uitbreidingen op het

HTTP protocol wordt ondersteund. Een voorbeeld is “*HTTP Extensions for Distributed Authoring*” (**WebDAV**) (RFC 2518), die onder andere de methoden “LOCK”, “MOVE” en “COPY” toevoegt.

De meest gebruikte methodes zijn:

GET De GET methode haalt simpelweg de informatie uit de Request-URI op. Een eventuele conditionele GET wordt bereikt door met de aanvraag headers mee te sturen als “If-Modified-Since: Wed, 28 Sep 2005 19:43:31 GMT”, waarop de server twee antwoorden kan geven:

1. Als het document veranderd is sinds de opgegeven datum ziet de response eruit als die van een “gewone” GET met response code 200 (OK).
2. Als het document niet is veranderd komt er een 304 (Not Modified) response.

Voor meer uitleg over HTTP responses, zie verderop. Andere conditionele GET aanvragen zijn “If-Match” (bedoeld om op een efficiënte manier de cache van de client up te daten), “If-None-Match” (tegenovergestelde van If-Match), “If-Range” (bedoeld om delen van een bestand op te halen) en “If-Unmodified-Since” (tegenovergestelde van If-Modified-Since).

POST De POST methode wordt meestal gebruikt om data naar een server te sturen, waar vervolgens iets mee gedaan moet worden. Bijvoorbeeld inloggen op een website, berichten posten op een forum of files uploaden. De functie is natuurlijk afhankelijk van de URI die aangeroepen wordt. Hoe het uploaden van files gaat via HTML, wordt beschreven in RFC 1867, maar vergeet dan niet om de header “Content-Type: multipart/form-data” mee te sturen als client.

HEAD De HEAD methode is vergelijkbaar met de GET methode (kent ook dezelfde syntax en uitbreidingen), alleen wil de client nu alleen de headers ontvangen van de server (de inhoud van de response wordt dus niet meegestuurd door de server).

OPTIONS De OPTIONS methode wordt gebruikt om uit te vinden welke functionaliteit ondersteund wordt door de server. Als met deze methode een “*” wordt meegegeven als URI, gaat de vraag over de server in zijn algemeenheid, terwijl een OPTIONS methode in combinatie met een URI een vraag stelt over de functionaliteit ten opzichte van die URI specifiek. De server reageert met een 200 (OK) response en geeft alle functionaliteit weer in de headers van de response. Een body meesturen mag ook, maar wordt niet beschreven in de HTTP/1.1 specificatie.

URI

Er zijn veel namen voor een **URI**¹. De officiële naam is een URI, maar het is hetzelfde als een URL, URN, UDI of WWW adres. Een URI ziet er als volgt uit:

```
URI = 'http://' host [ ':' poort ] [ absolute_pad [ '?' query ] ]
```

Als de poort niet wordt meegegeven, wordt voor een HTTP aanvraag poort 80 gebruikt. Als het mogelijk is, wordt het gebruik van IP adressen voor de host ontraden (zie RFC 1900). Als het absolute pad naar het bestand wat van de server opgevraagd wordt niets is (de root bijvoorbeeld) moet voor het absolute pad een "/" gebruikt worden (zie het voorbeeld hieronder). In de URI moeten karakters die in de "reserved" of "unsafe" lijst voorkomen (zie RFC 2396) worden vervangen door hun %HEXHEX equivalent. "~" wordt bijvoorbeeld %7E (zie pag. 154 voor ASCII codes). In de hostname wordt tot slot geen onderscheid gemaakt tussen hoofd- en kleine letters. Dus nu.nl en NU.nl zijn equivalenten. (Of het pad na de hostname hoofdlettergevoelig is, hangt van de server af.)

Een URI als http://www.scintilla.utwente.nl wordt door de browser vertaald in een aanvraag die er (bijvoorbeeld) zo uitziet (te versturen nadat er een TCP verbinding naar de server is gemaakt op poort 80):

HTTP request

```
GET / HTTP/1.1
Host: www.scintilla.utwente.nl
User-agent: Mozilla/5.0 (Windows; U; Windows NT 5.1; en-US;
rv:1.8b4) Gecko/20050908 Firefox/1.4
Accept-Charset: ISO-8859-1,utf-8
```

Vaak zal een aanvraag geen body hebben, maar mocht dat wel zo zijn (bijvoorbeeld bij het opsturen van een formulier), moet er een header worden meegegeven die aangeeft waaruit de inhoud en de grootte van de inhoud bestaat, bijvoorbeeld:

HTTP request

```
Content-Type: text/html
Content-Length: 280981
```

¹Uniform Resource Identifier

In HTTP/1.0 is het verplicht om een “Content-Length” in de aanvraag te vermelden. Daarom is het voor compatibiliteit verplicht om in een HTTP/1.1 request een “Content-Length” header mee te sturen, tenzij bekend is dat het een server betreft die HTTP/1.1 snapt. Een server kan reageren met code 400 (Bad request) als hij zelf niet de lengte van de inhoud kan bepalen, of met code 411 (Length required) als hij ècht op zijn strepen gaat staan. Als de header “Content-Length” wordt meegegeven, moet het exact overeenkomen met het aantal OCTETS in de body van de aanvraag.

Query

Je kunt met verschillende methoden gegevens meegeven. De standaard encoding voor (data uit) formulieren is “application/x-www-form-urlencoded”. De data die wordt meegestuurd heeft een tweetal regels:

1. Net als bij URI's worden “reserved” of “unsafe” karakters vervangen door hun %HEXHEX equivalent (~ → %7E), een spatie wordt vervangen door een “+” en geregeindes worden vervangen door een CRLF paar: “%0D%0A” (zie pag. 154 voor meer ASCII codes).
2. Velden en hun waardes worden meegegeven als naam=waarde, en meerdere naam=waarde sets worden gescheiden door een “&”. Eventuele waardes van NULL mogen worden weggelaten.

Als je de aanvraag via GET verstuurt wordt de query gewoon achter de URI geplakt (gescheiden met een “?”). In het geval van POST wordt een aanvraag verstuurd en de query wordt in de message body gestopt, bijvoorbeeld:

```
naam=Borrelmember+Kierewiet&plaats=Enschede&info=123%0D%0A456
```

Het HTTP protocol kan ook binary data transporteren (bijvoorbeeld bij een file upload). Een dergelijk request zou er zo uit kunnen zien als op de volgende pagina.

Je kunt voor “Content-Transfer-Encoding” verschillende waarden gebruiken (base64, 7bit, quoted-printable, binary), mits de encoding die je daar invult overeenkomt met die van je bestand. Zie ook **MIME**¹ RFC 2045.

¹Multipurpose Internet Mail Extensions

HTTP request

```
POST http://www.scintilla.utwente.nl/login/upload.php
HTTP/1.1
User-Agent: Mozilla/5.0 (Windows; U; Windows NT 5.1; en-US;
rv:1.8b4) Gecko/20050908 Firefox/1.4
Content-Type: multipart/form-data; boundary=ABCDEF012345
Content-Length: 520
```

```
--ABCDEF012345
Content-Disposition: form-data; name="DirectoryId"
Content-Type: text/plain; charset=utf-8
```

```
12345
--ABCDEF012345
Content-Disposition: form-data; name="ImageData"
filename="IMG0001.png"
Content-Type: image/png
Content-Transfer-Encoding: base64
```

```
iVBORw0KGgoAAAANSUHEUgAAABAAAAQCAMAAAAoLQ9TAAAAVFBMVEX//
///AAD/CAj/GBj/ISH/KSn/MTH/OTn/QkL/Skr/UlL/Y2P/c3P/e3v/hI
T/jIz/lJT/nJz/paX/ra3/vb3/xsb/zs7/1tb/3t7/5+f/7+//9/doXYB
2AAAAGXRFWHRtb2Z0d2FyZQBHcmFwaGljQ29udmVydGVyNV1I7gAAAIRJ
REFUeJx0z9EOwyAIBdCLtUu1qGvn2jL+/z+HW7IYk/FAuCc8APC3jhG4D
y/F5R8dJMEZsw36zUorjmKQd0tzgDKDNSkwb9vkaHEDJK3TlECzX1aUq8
F9Y4KTJzlsJyNLFcFUIIYPwAW0CIh1bpC7S2521i4dhDp8Ukf41RsAAP/
/AwDsLgWJgUgEywAAAABJRU5ErkJggg==
```

```
--ABCDEF012345--
```

Response

Na een aanvraag volgt normaliter een antwoord: de *Response*. De syntax ziet er zo uit:

HTTP response

- 1 <HTTP VERSIE> <response code> [<bericht>] <crLf>
 - 2 [<Headernaam>: <Waarde> <crLf>]*
 - 3 <crLf>
 - 4 <response inhoud>
-

De response codes (verdeeld in verschillende categorieën) zijn weergegeven in tabel 3.2.

Ook is het hier weer mogelijk een “extension-code” terug te krijgen, vergelijkbaar met de “extension-method” van hiervoor. Een mogelijk antwoord van de server op onze aanvraag van hierboven is (ingekort):

HTTP response

- 1 HTTP/1.1 200 OK
 - 2 Last-Modified: Tue, 04 Oct 2005 11:50:26 GMT
 - 3 Server: Roxen/4.0.158-scintilla
 - 4 Expires: Tue, 04 Oct 2005 11:50:20 GMT
 - 5 Content-Type: text/html
 - 6 Content-Length: 18358
 - 7 Date: Tue, 04 Oct 2005 11:50:26 GMT
-

Net als bij een aanvraag geldt voor een response dat - mits er een inhoud is - er een “Content-Type” en “Content-Length” moet worden meegegeven. Ook voor de rest gelden voor deze twee velden dezelfde regels als bij de aanvraag. Als de “Content-Type” onbekend is voor de server moet “Content-Type: application/octet-stream” worden meegegeven, of moet “Content-Type” worden weggelaten. In het laatste geval moet de client de response alsnog behandelen als application/octet-stream.

HTTPS

Er bestaat een beveiligde (*secure*) versie van HTTP: **HTTPS**. Hierbij wordt de data door SSL/TLS encrypted om de verbinding te beveiligen. HTTPS gebruikt net als HTTP TCP en communiceert standaard over poort 443.

In onderstaande tabel staan de meest voorkomende HTTP response codes. Het HTTP/1.1 protocol kent 40 response codes, die onderverdeeld zijn in 5 categorieën.

1xx	(2)	Informatief	Een aanvraag is ontvangen en verwerking kan verdergaan (niet in HTTP/1.0)
2xx	(7)	Succes	De aanvraag is succesvol ontvangen, verwerkt en geaccepteerd
	200	<i>OK</i>	De aanvraag is succesvol afgehandeld
	202	<i>Accepted</i>	De aanvraag is geaccepteerd, maar nog niet afgehandeld
3xx	(7)	Redirect	Er moet verdere actie ondernomen worden om de aanvraag af te ronden
	301	<i>Moved Permanently</i>	De pagina is permanent verplaatst. De nieuwe URL is bekend
	302	<i>Found</i>	De pagina is tijdelijk verplaatst. De nieuwe URL is bekend.
	304	<i>Not Modified</i>	De opgevraagde pagina is niet gewijzigd
4xx	(18)	Client fout	De aanvraag bevat een fout
	400	<i>Bad request</i>	De browser stuurde een aanvraag die de server niet begreep. Een bekende oorzaak is een HTTP request doen naar een HTTPS server, of in HTTP/1.0 geen "Content-Length"-header meesturen.
	401	<i>Unauthorized</i>	De aanvrager heeft geen of ongeldige authenticatie gegevens meegestuurd
	403	<i>Forbidden</i>	De aanvraag op zich was juist, maar de aanvrager krijgt geen toegang
	404	<i>Not found</i>	Het opgevraagde document kon niet gevonden worden
	405	<i>Method not allowed</i>	De methode die gevraagd wordt om een document op te vragen, is niet toegestaan
5xx	(6)	Server fout	De server kon een geldige aanvraag niet afhandelen
	500	<i>Internal Server Error</i>	De server is tegen een onverwacht en onbekend probleem opgelopen bij de afhandeling van de aanvraag
	501	<i>Not implemented</i>	De server heeft de functionaliteit, nodig om de aanvraag af te handelen, niet ingebouwd
	503	<i>Service Unavailable</i>	De server is tijdelijk niet in staat om de aanvraag af te handelen (meestal bij een overbelasting)
	505	<i>Version not supported</i>	De server ondersteunt de versie van het HTTP protocol uit de aanvraag niet

Tabel 3.2: Meestvoorkomende HTTP response codes

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Proxy

Een **proxy-server** (zie RFC 3040) is een computer of server die het mogelijk maakt dat clients indirect verbinding maken met een andere server. De procedure is als volgt: een client maakt verbinding met een proxy server en vraagt een pagina op. De proxy server vraagt die betreffende pagina dan op en stuurt deze door naar de client. Het voordeel is dat de proxy gebruik kan maken van een cache, waardoor de pagina ook uit de cache kan komen en de pagina niet opnieuw hoeft te worden opgevraagd. Dit laatste soort proxy, “*caching web proxy*” genaamd, is de meest gebruikte applicatie van een proxy.

Veel organisaties, scholen en bedrijven maken gebruik van een “intercepting proxy” om netwerkbeleid af te dwingen. In combinatie met NAT (zie pagina 205) is een organisatie op die manier in staat het netwerkverkeer te reguleren.

FTP

Het **FTP**¹ wordt gebruikt voor het ophalen en versturen van bestanden. Dit alles is ook mogelijk met HTTP, maar FTP heeft meer mogelijkheden en werkt anders. Net zoals HTTP maakt FTP gebruik van het TCP-protocol, maar in plaats van poort 80 gebruikt het de poorten 20 en 21. Het kanaal dat gebruik maakt van poort 20 wordt gebruikt als ‘controlekanaal’ en het andere ‘datakanaal’ wordt gebruikt voor het uitwisselen van gegevens (*out-of-band control*). Stel, een gebruiker wil een bestand genaamd ‘index.html’ van de FTP-server ophalen, dan wordt dit verzoek via het controlekanaal ingediend en wordt het bestand via het andere kanaal naar de computer van de gebruiker gestuurd. Indien de gebruiker meerdere bestanden wil downloaden, dan is voor elk bestand een eigen datakanaal nodig. Het controlekanaal wordt wel gedeeld. Verder houdt de FTP-server toestandsinformatie bij. Ten eerste heeft de server dit nodig om het controlekanaal aan een bepaalde gebruiker te koppelen. Daarnaast moet de server bijvoorbeeld ook weten in welke directory op de server de gebruiker zich bevindt.

Email

Een andere toepassing van internet is email, de mogelijkheid om elektronisch post te versturen. In geval van normale post schrijf je een brief, stop je hem in de brievenbus, wordt de brief op het postkantoor gesorteerd, wordt deze

¹File Transfer Protocol

naar het juiste postkantoor doorgestuurd en uiteindelijk wordt hij door een postbode bezorgd.

De werking van email is vergelijkbaar met normale post. Allereerst schrijf je een email en wanneer deze klaar is, stuurt je email-client (zoals Outlook of Thunderbird) deze op basis van het **SMTP**¹ naar jouw SMTP-server. Dit is veelal de SMTP-server van een internetprovider of van het bedrijf waarvoor je werkt. Een SMTP-server werkt op poort 25 en neemt de taak van postkantoor op zich. Wanneer de email is aangekomen bij de SMTP-server, dan probeert deze de email te bezorgen bij de SMTP-server van degene voor wie de email bestemd is. Als de email bij de SMTP-server is aangekomen, is de laatste stap dat de persoon in kwestie zijn mail ophaalt. Dit kan ondermeer via **POP3**² en **IMAP**³. In geval van POP3 wordt de email naar de computer van de ontvanger verplaatst en is de email over het algemeen slechts vanaf deze computer te lezen. Bij gebruik van IMAP blijft de email op de server staan en kan deze vanaf meerdere plaatsen gelezen worden.

Protocol	Poort	Taak	
Domain name system (DNS)	53	Omzetten van IP-adressen in domeinnamen	UDP
File transfer protocol (FTP)	20 (data), 21 (control)	Versturen van bestanden	TCP
Hypertext transfer protocol (HTTP)	80	Ophalen van websites	TCP
Network news transfer protocol (NNTP)	119	Uitwisselen van nieuwsgroep-berichten	TCP
Telnet	23	Inloggen op andere computers	TCP
Post office protocol (POP3)	110	Ophalen van e-mail	TCP
Secure shell (SSH)	22	Veilig inloggen op andere computers	TCP

Tabel 3.3: Poortnummers van veelgebruikte protocollen

¹Simple Mail Transfer Protocol

²Post Office Protocol v3

³Internet Mail Access Protocol

Transportlaag

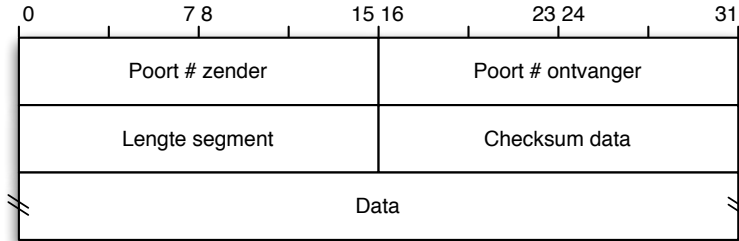
De **transportlaag** is de laag gelegen tussen de applicatie- en netwerklaag. De applicatielaag heeft als taak het verzorgen van communicatie tussen processen op een eindsysteem. De transportlaag regelt de communicatie tussen processen draaiende op verschillende eindsystemen. Pakketten arriveren via een socket bij de transportlaag. Bij aankomst wordt er gekeken van welk transportprotocol UDP of TCP de pakketten gebruik willen maken. Als dit bekend is zullen de segmenten door het gekozen transportprotocol verwerkt worden. In alle gevallen wordt aan de pakketten een zogenaamde header toegevoegd met daarin informatie die van belang is voor het transport. Afhankelijk van het transportprotocol worden er nog andere bewerkingen op het pakket uitgevoerd zoals foutcontroles, maar dit is niet verplicht. De term waarmee een verwerkt applicatielaagpakket wordt aangeduid is **segment**. Na verwerking wordt het segment doorgestuurd naar de netwerklaag welk ervoor zorgt dat het segment bij het juiste eindsysteem aankomt.

UDP

Het **UDP** (*User Datagram Protocol*) is een eenvoudig protocol is dat geen enkele garantie biedt over onder meer de aankomst van segmenten. Vanwege de beperkte functionaliteit is de UDP-header zeer beperkt (dit is ook een van de voordelen van UDP). De header bevat alleen het IP-adres en poortnummer van zender en ontvanger, de grootte van het segment, een checksum om te zien of het segment beschadigd is en als laatste bevat het segment het te verzenden applicatielaagpakket. Na het toevoegen van de header is het segment klaar en wordt het voor verdere verwerking doorgestuurd naar de netwerklaag. Het UDP-protocol is met name geschikt voor tijdkritische toepassingen voor welke het niet belangrijk is dat alle informatie arriveert. Het protocol is hier zo geschikt voor doordat de header klein is (8 bytes) en doordat het vrijwel geen extra verwerkingstappen hoeft te doen welke 'veel' tijd kosten.

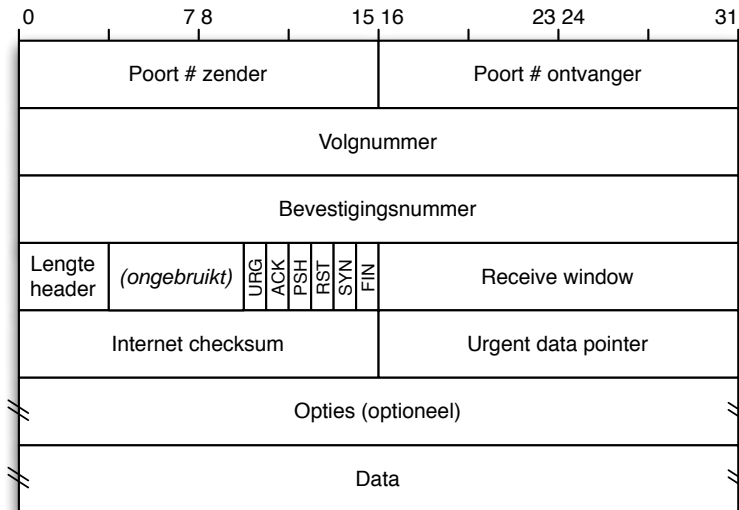
TCP

Zoals gezegd biedt **TCP** in tegenstelling tot UDP een betrouwbare verbinding die garandeert dat segmenten aankomen en zelfs dat dit in de volgorde van verzenden gebeurt. Een TCP-verbinding vindt altijd plaats tussen één zender en één ontvanger (*point-to-point*). In het geval van UDP is het mogelijk om bijvoorbeeld meerdere ontvangers te hebben (*multicast*). Ook is een TCP-verbinding full-duplex, waardoor zendende en ontvangende processen



Figuur 3.12: Opbouw UDP-segment

gelijktijdig tegen elkaar kunnen praten. Als laatste is een TCP-verbinding connectie-georiënteerd, wat inhoudt dat er toestandsinformatie over de verbinding bij wordt gehouden.



Figuur 3.13: Opbouw TCP-segment

Het formaat van een TCP-segment is weergegeven in figuur 3.13. Hierin komen de volgende velden voor:

- Algemeen
- Wiskunde
- Informatica
- Fysica
- Meten
- Signalen
- Elektronica

- Poortnummer zender en ontvanger (elk 16-bit). Zoals gezegd dient een proces een socket aan te maken om via de transportlaag berichten te kunnen versturen. Een TCP-socket wordt gekenmerkt door ondermeer de poortnummers en IP-adressen van zender en ontvanger. Al deze gegevens worden gebruikt om een ontvangen segment door te sluizen naar de juiste socket.
- Volgnummer (32-bit). Bevat de positie van het laatst ontvangen segment in de gegevensstroom uitgedrukt in bytes. Indien de SYN-vlag geactiveerd is, dan bevat dit veld het eerst te gebruiken volgnummer.
- Bevestigingsnummer (32-bit). Bevat de positie die het volgende segment in zal nemen in de gegevensstroom uitgedrukt in bytes.
- Lengte header (4-bit). Lengte van de header in veelvouden van 32-bit. De header heeft een minimale lengte van 20 bytes en kan groter zijn indien opties opgegeven zijn.
- Ongebruikt (6-bit). Dit veld is ongebruikt en bedoeld voor toekomstige toepassingen.
- Vlaggen (6-bit) elk met grootte 1-bit
 - URG (*URGent*): er bevinden zich urgente gegevens in het segment (activeert het urgent data pointer veld).
 - ACK (*ACKnowledge*): geeft aan of het volgnummer geldig is. Wanneer een verbinding is opgebouwd, staat deze vlag altijd aan.
 - PSH (*PuSH*): de ontvanger moet de gegevens onmiddellijk doorsturen naar de applicatielaag.
 - RST (*ReSeT*): deze vlag wordt ingeschakeld wanneer er iets mis is met de verbinding en geeft dan aan dat de verbinding opnieuw opgezet moet worden.
 - SYN (*SYNchronise*): wordt gebruikt tijdens het opzetten van de internetverbinding en om volgnummers met elkaar te synchroniseren.
 - FIN (*FINished*): wordt gebruikt om de TCP-verbinding te beëindigen.
- *Receive window* (16-bit).
- *Checksum* (16-bit). Dit veld bevat de 1-gecomplementeerde *checksum* berekend over het hele segment inclusief de header.
- *Urgent data pointer* (16-bit). Indien de URG-vlag aanstaat, bevat dit veld een pointer (t.o.v. het volgnummer van het segment) naar gegevens in het gegevensveld welke als urgent bestempeld zijn.
- Opties (lengte variabel). Wordt gebruikt om de header met extra opties uit te breiden zoals Maximum Segment Size (MSS).
- Gegevens (lengte variabel). Het te verzenden bericht (of een deel ervan) afkomstig van de applicatielaag.

Tijdens het opstarten van een TCP-verbinding zoekt een host contact met een andere. De contactzoekende host stuurt een segment naar een andere host met daarin de SYN-vlag ingeschakeld (ook wel SYN-segment). Verder plaatst de contactzoekende host een willekeurig volgnummer in het volgnummerveld. De ontvangende host leest het segment en antwoordt dan met een SYNACK-segment om de verbinding op te starten. Het SYNACK-segment heeft de SYN- en ACK-vlaggen ingeschakeld, bevat als bevestigingsnummer het volgnummer uit het SYN-segment opgehoogd met 1 en bevat als volgnummer een willekeurige waarde. Als laatste antwoordt de contactzoekende host op het SYNACK-segment met een segment waarin het ontvangen volgnummer opgehoogd met 1 als bevestigingsnummer dient en verder de SYN-vlag uitgeschakeld is. Als dit achter de rug is, is er sprake van een TCP-verbinding.

Het opzetten van een TCP-verbinding is enigszins gecompliceerder dan beschreven. Onder andere wordt een **MSS**¹ overeengekomen. Het is de maximale grootte van een segment uitgewisseld tussen twee hosts. De waarde wordt met name bepaald door de implementatie van de linklaag (Zo is het aan te raden voor media die relatief foutgevoelig zijn kleinere segmenten te gebruiken dan voor betrouwbare media).

De basis achter de door TCP geleverde betrouwbare dataoverdracht wordt gevormd door volg- (*sequence*) en bevestigingsnummers (*acknowledge*). Elk segment dat verzonden wordt krijgt een volgnummer mee. De ontvanger analyseert welke segmenten hij ontvangt en aan de hand van ontbrekende volgnummers kan hij de zender informeren welke segmenten ontbreken.

Een applicatie schrijft een stroom van data naar een socket. Deze stroom van data moet verdeeld worden over meerdere segmenten, elk met een grootte gelijk aan de MSS. De volgnummers die gebruikt worden, komen overeen met 1 MSS en corresponderen met de positie in bytes welke een segment in de datastroom inneemt. Stel, er is een host A die data wil versturen naar host B en vice-versa. Host A wil een bestand versturen met een grootte van 10000 bytes en verder is MSS gelijk aan 500 bytes. Het eerste segment heeft dan het volgnummer 0 in de TCP-header, het tweede 500, het derde 1000 enzovoort. Host B nummert zijn segmenten op een vergelijkbare manier.

Host A stuurt vervolgens één of meerdere segmenten naar host B. Wanneer host B deze segmenten ontvangt, plaatst hij deze in de TCP-header van terug te sturen segmenten het volgnummer van het volgende segment dat B verwacht. Dit is het nummer van het volgende segment dat nodig is om de te ontvangen datastroom uit te breiden. Bijvoorbeeld: host B heeft seg-

¹Maximum Segment Size

ment 0 en 500 ontvangen. Wanneer nu segment 1000 arriveert wordt 1500 het bevestigingsnummer. Indien 1500 arriveert ipv 1000, dan wordt 1000 het bevestigingsnummer, omdat dit het volgende segment is om de datastroom completer te maken. Verder worden er in een situatie waarin een gat ontdekt is, twee bevestigingen gestuurd. Dit om aan de verzender te laten weten dat er iets mis is gegaan. Wanneer het vervolgens drie keer achtereen misgaat, gaat de verzender ervan uit dat het segment verloren is gegaan, waarna het opnieuw wordt gestuurd. Deze actie heet een *fast retransmit*.

Het alleen bevestigen van reeds binnengekomen segmenten door het versturen van twee bevestigingen heet het versturen van een cumulatieve bevestiging (*acknowledgement* of ACK). Verder specificeert de TCP-specificatie niet wat er gebeurt met ‘verkeerd’ ontvangen segmenten. Het hangt van de TCP-implementatie af of het ‘verkeerde’ segment met nummer 1500 bewaard wordt of niet.

Wanneer het ‘lang’ duurt voordat er een ontvangstbevestiging binnen is gekomen (leidt tot een timeout), verstuurt de zender segmenten opnieuw. De tijdsduur alvorens een timeout optreedt, wordt via een bepaalde formule geschat uit de zogenaamde **RTT**¹, de tijd die het duurt om een segment van de ene host naar de andere te sturen en weer terug. Deze tijd is telkens anders, aangezien de belasting van het internet nooit hetzelfde is en segmenten via verschillende routes kunnen reizen. Het duurt relatief lang voordat een timeout optreedt. Verder kunnen ‘verkeerde’ segmenten weggegooid worden (TCP vereist niet dat ze bewaard worden), waardoor er in feite bandbreedte verspild wordt op het moment dat er op een timeout gewacht wordt. Ter voorkoming van timeouts is afgesproken dat wanneer er driemaal voor hetzelfde segment een bevestiging arriveert (drievoudige ACK), het segment in kwestie verloren is gegaan. De zender verstuurt het segment dan opnieuw. Een andere situatie waarin een segment opnieuw wordt verstuurd, is wanneer het beschadigd is wat optreedt als de checksum in de TCP-header niet overeenkomt met de checksum die over de gegevens is berekend.

TCP flow control

Eén van de extra mogelijkheden van TCP is *flow control*, wat als doel heeft te voorkomen dat de ontvanger overspoeld wordt met gegevens. Hiertoe houdt de zender een buffer genaamd ‘receive window’ bij, waarin hij schat hoeveel ruimte er nog vrij is in de buffer van de ontvanger. De ontvanger stuurt op zijn beurt de grootte van zijn receive window terug naar de zender. De zender

¹round trip time

probeert ervoor te zorgen dat het verschil tussen de laatst verzonden byte en de laatst bevestigde byte kleiner is dan het receive window. Verschillende manieren om dit te implementeren zijn: *alternating bit*, *selective-repeat* en *go-back-N*, maar hier wordt verder niet op in gegaan (zie [3] p. 203 e.v.). Merk op dat de minimale waarde van het receive window altijd 1 moet zijn, omdat er anders geen gegevens verzonden worden.

TCP congestion control

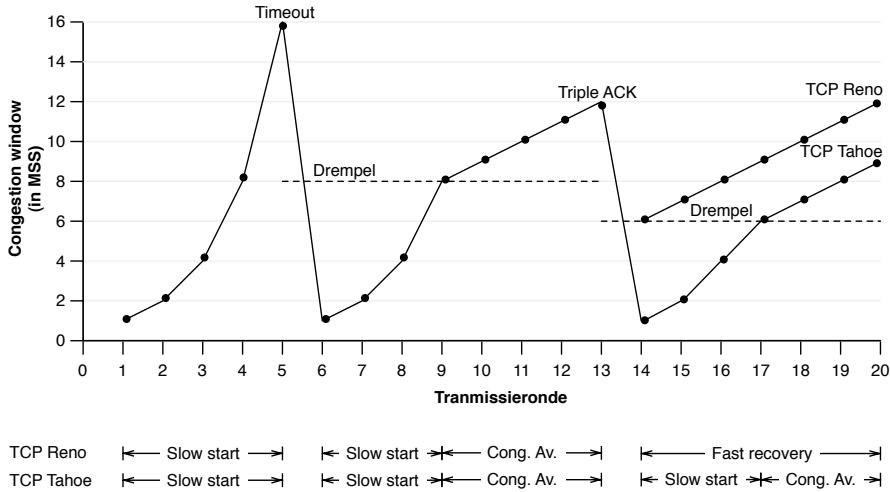
Indien in het internet veel verschillende bronnen tegelijk zo veel gegevens versturen dat het internet deze niet kan verwerken, dan kunnen er opstoppingen ontstaan. Deze opstopping kunnen leiden tot informatieverlies en lange wachtrijen.

In het TCP-protocol is geen speciaal mechanisme opgenomen waarmee netwerkproblemen waargenomen kunnen worden. Om toch problemen te kunnen detecteren gaat TCP af op zaken als timeouts, driedubbele ACKs voor hetzelfde segment en roundtriptijden. Op basis van deze gegevens probeert TCP de verzendsnelheid te reguleren: *congestion control*.

Om het mogelijk te maken de snelheid te begrenzen houden zowel zender als ontvanger een variabele genaamd '*Congestion Window*' (CongWin) bij. Deze variabele bevat het maximaal aantal segmenten dat verzonden mag worden zonder dat er een bevestiging terugkomt. Door de grootte van het congestion window aan te passen is de verzendsnelheid te regelen. De verzendsnelheid is bij benadering CongWin / RTT.

Een van de situaties die kan optreden is een timeout. In het geval er een timeout optreedt, krijgt CongWin altijd de waarde van 1 MSS. In het geval van een driedubbele ACK is de reactie afhankelijk van de gebruikte TCP-versie. In het geval van versie Tahoe wordt het optreden van een drievoudige ACK net als een timeout afgestraft met een CongWin van 1 MSS, maar in het geval van versie Reno wordt CongWin slechts gehalveerd. (Zie figuur 3.14.)

Het verhogen van de snelheid (vergroten van CongWin) is een ingewikkelder proces. Er van uitgaande dat de verbinding net geopend is, heeft CongWin een grootte 1. Wanneer er van het verzonden pakket een bevestiging terug is, wordt CongWin vergroot naar 2. Voor elke nu binnenkomende bevestiging wordt CongWin met 1 opgehoogd. Dit proces gaat dus exponentieel, want als alles goed gaat wordt er eerst 1 segment verstuurd, vervolgens 2, dan 4 enzovoort. Dit proces heet *slow start*.



Figuur 3.14: Verloop CongWin bij verschillende gebeurtenissen onder TCP Tahoe en TCP Reno

Op een bepaald moment kan de snelheid niet (veel verder) verhoogd worden, bijvoorbeeld omdat we in de buurt komen van de maximumsnelheid van de verbinding. Deze situatie kenmerkt zich door het optreden van veel timeouts en dubbele of zelfs driedubbele bevestigingen. Bij het optreden van een fout wordt een zogenaamde drempelwaarde (*threshold*) vastgesteld, welke bij een volgende *slow start*-procedure gebruikt wordt om de exponentiële toename te laten stoppen. De drempelwaarde wordt gelijk aan de helft van de grootte van de laatst goedwerkende CongWin. In het geval de fout een timeout was, wordt CongWin gelijk aan 1 MSS en wordt er opnieuw begonnen met een slow start. De slow start eindigt nu echter op het moment dat CongWin gelijk is aan de drempelwaarde. Vanaf dat punt begint *congestion avoidance* in welke fase CongWin telkens lineair met 1 MSS wordt verhoogd. De afhandeling van een drievoudige ACK is in het geval van TCP-versie Tahoe gelijk aan die van een timeout (CongWin = 1 MSS + slow start). In de nieuwere Reno-variant wordt een drievoudige ACK lichter bestraft. Er wordt gebruik gemaakt van *fast recovery* waarbij CongWin slechts gehalveerd wordt en er direct overgeschakeld wordt op een lineaire toename van CongWin (Direct na het opstarten van de verbinding wordt de drempelwaarde op een grote waarde ingesteld, zodat er geen *congestion avoidance* optreedt).

Netwerklaag

De **netwerklaag** heeft als taak de datagrammen afkomstig van de transportlaag bij de juiste host aan te laten komen. Het protocol dat hiervoor gebruikt wordt, heeft de naam **IP**¹. In dit hoofdstuk wordt allereerst de werking van IP uitgelegd aan de hand van versie 4 van dit protocol (IPv4). Wanneer de basis bekend is, zal er iets dieper op IPv4 in worden gegaan en wordt ook de opvolger IPv6 behandeld.

Elke computer in het internet is via een of andere netwerkadapter aan het internet gekoppeld. De netwerkadapter beschikt altijd over een zogenaamd IP-adres. Dit adres is (in IPv4) 32bit groot en wordt meestal in de vorm 'a.b.c.d' gebruikt, waar de letters a t/m d voor de afzonderlijke bytes staan en elk een waarde bevat tussen 0 en 255. De IP-adressen zijn zo ingedeeld dat elke organisatie of ISP zijn eigen IP-bereik heeft. Een voorbeeld is het bereik van '1.2.3.0' tot '1.2.3.255', waar van alle IP-adressen het begin ('1.2.3') gelijk is. Het deel (gerekend van links naar rechts) van het IP-adres dat voor alle hosts binnen het netwerk hetzelfde is heet wordt het subnetgedeelte genoemd. Het andere deel wat voor elke host anders is (van '.0' tot '.255' in dit geval) heet het hostgedeelte. Er zijn verschillende notaties om aan te geven welk deel het hostgedeelte is. Een van de notaties is '1.2.3.0/24', waarin '/24' de *subnetmask* is welke aangeeft dat de eerste 24-bit gelijk zijn. Een andere notatie voor '/24' subnetmask is om hem te noteren als '255.255.255.0', waarin de eerste 24-bit als enen worden genoteerd (8 enen komt overeen met 255, 24 enen dus met 255.255.255).

Er zijn 2^{32} IP-adressen beschikbaar, maar niet elk IP-adres mag gebruikt worden. Zo zijn sommige IP-adressen slechts bedoeld voor gebruik binnen een lokaal netwerk of binnen een host. Hieronder volgt een lijst van gereserveerde adressen.

IP-adressen voor intern gebruik (binnen een lokaal netwerk, niet op het internet):

- 10.0.0.0 - 10.255.255.255
- 172.16.0.0 - 172.31.255.255
- 192.168.0.0 - 192.168.255.255

IP-adressen voor autoconfiguratie: indien een host niet over een IP-adres beschikt (statisch ofwel dynamisch via DHCP), dan kan een IP-adres uit dit bereik gebruikt worden; afhankelijk van de striktheid van het netwerk kan een host wel of niet het interne netwerk bereiken

- 169.254.0.0 - 169.254.255.255

¹Internet Protocol

Loopback: dit bereik van IP-adressen wordt gebruikt ‘binnen’ een host; veelal wordt het IP-adres ‘127.0.0.1’ gebruikt om de host zelf aan te duiden (localhost)

- 127.0.0.0 - 127.255.255.255

Multicast: één van de mogelijkheden van IP is om een datagram naar meerdere hosts te sturen; dit heet *multicast* en dit bereik van IP-adressen wordt hiervoor gebruikt.

- 224.0.0.0 - 239.255.255.255

Broadcast: wanneer een segment naar dit speciale IP-adres wordt gestuurd dan ontvangen alle hosts in het subnet dit en eventueel een naburig subnet ook; meer hierover in de behandeling van DHCP op pag. 211

- 255.255.255.255

Een belangrijk onderdeel in een netwerk is de zogenaamde **router**, welke een brug vormt tussen het lokale netwerk en het internet. De router werkt op netwerklaagniveau en implementeert daartoe alle onderste lagen van het TCP/IP model tot en met de netwerklaag.

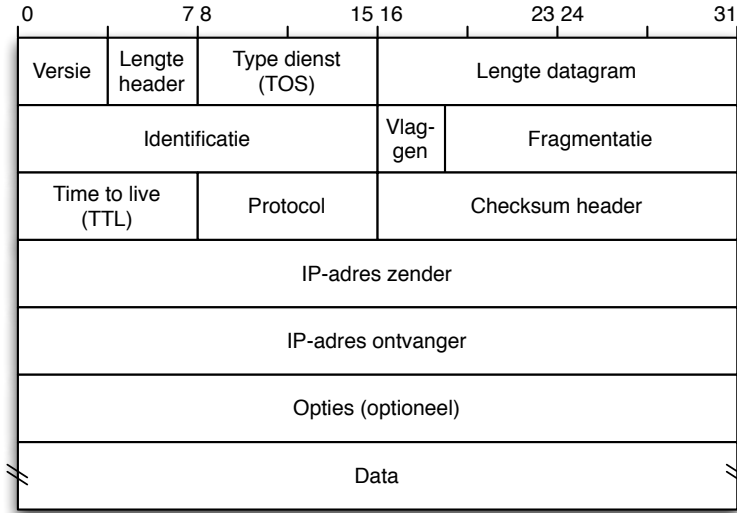
Alle datagrammen die bedoeld zijn voor het internet komen binnen op de router. De router, vaak verbonden met meerdere netwerken, heeft dan als taak deze datagrammen naar een router van een ander netwerk door te sturen, welke zich ‘dichterbij’ de eindbestemming bevindt. Uiteindelijk bereiken datagrammen na talloze routers te hebben gepasseerd de host waar ze voor bedoeld zijn. Het lokale proces, waarbij een router datagrammen naar de juiste verbinding verwijst, heet **forwarding** en het netwerkwijde proces om van A naar B te komen heet **routing**.

Het principe achter *forwarding* is dat elke router een tabel bijhoudt met daarin IP-adressen van naburige subnetten en via welke fysieke verbindingspoort deze subnetten te bereiken zijn. Onder de aanname dat de lijst actueel is, neemt de router het IP-adres van de doelhost en zoekt vervolgens naar de regel waarvan een zo lang mogelijke reeks eerste bits exact overeenkomt met de eerste van het IP-adres (**longest prefix match**). De gedachte is dat de router behorende tot dit subnet van alle andere subnetten in de tabel het dichtst bij de doelhost gelegen is.

IPv4

In figuur 3.15 is de concrete opbouw van een IPv4 datagram weergegeven. Hierin komen de volgende velden voor:

- Versie (4-bit). Dit 4-bit veld geeft aan welke versie van IP gebruikt



Figuur 3.15: Opbouw IPv4 datagram

wordt. Op het moment is versie 4 de standaard, maar in de nabije toekomst zal dit 6 worden. Versie 5 is een testversie, die niet wijd ondersteund is. Verder geeft het versienummer ook aan welke structuur de IP-datagrammen hebben, aangezien deze per versie verschilt.

- Lengte header (4-bit). De grootte van de header van een IP-datagram is variabel. Dit veld vertelt de lengte van de header en geeft daarmee aan waar de gegevens beginnen. De waarde wordt uitgedrukt in woorden van 32-bit. Aangezien de minimale lengte van de header 20 bytes is, is de minimum waarde 5.
- Type dienst (8-bit). Met dit veld kan een wens voor **QoS**¹ worden opgegeven. Nieuwe technieken als Voice-over-IP (VoIP), waarmee over internet gesproken kan worden, kunnen wel van het veld gebruik maken, maar niet alle routers handelen naar het veld.
- Lengte datagram (16-bit). De grootte (header + gegevens) van het datagram in bytes. De minimale lengte is 576.
- Identificatie (16-bit). Afhankelijk van het type linklaag kan een linklaag pakket ('frame') slechts een beperkte hoeveelheid **MTU**² gegevens be-

¹Quality of Service

²Maximum Transmission Unit

vatten. Het IP-protocol maakt het mogelijk om IP-datagrammen op te splitsen (fragmenteren). Als een IP-datagram gesplitst is in kleinere datagrammen, dan moeten deze kleinere allen hetzelfde getal in het veld identificatie hebben.

- Vlaggen (3-bit). Dit veld wordt gebruikt in geval van fragmentatie. De meest significante bit is gereserveerd voor toekomstig gebruik en moet daarom 0 zijn. Het middelste bit geeft aan of een datagram wel of niet gefragmenteerd mag worden. Het minst significante bit geeft vervolgens aan of er na het huidige fragment nog andere fragmenten zijn.
- Fragmentatie (13-bit). Wanneer een datagram gefragmenteerd is, bevat elk fragment in dit veld de positie die hij innam in het oorspronkelijk datagram. De waarde in dit veld is in veelvoud van 8 byte.
- TTL (8-bit). Oorspronkelijk bevatte dit veld de maximale tijd in seconden dat het datagram door het internet mocht zwerven. Het was toegevoegd om in geval van problemen ervoor te zorgen dat datagrammen niet eeuwig blijven bestaan. Tegenwoordig is het een *hop-count* die ingesteld wordt op een maximaal aantal te passeren switches. Iedere *packet switch* zoals een router verlaagt het getal met één. Wanneer TTL nul wordt, wordt het datagram weggegooid.
- Protocol (8-bit). Dit veld vormt de lijm tussen de transport- en netwerklaag. Het getal in dit veld vertelt aan de transportlaag welk transportprotocol het moet gebruiken om de gegevens bij een proces af te leveren. Een waarde van 6 betekent TCP en een waarde van 17 UDP.
- Checksum header (16-bit). Dit is een *checksum* die gebruikt wordt door routers om te kijken of datagrammen beschadigd zijn. Indien beschadigd, wordt het datagram weggegooid. De checksum wordt berekend door elke twee opeenvolgende bytes als een getal te beschouwen en op deze manier alle getallen die te vormen zijn uit de header bij elkaar op tellen via 1-complement notatie. De 1-complement versie van dit getal wordt in dit veld opgeslagen. Routers tellen op eenzelfde manier ook alle bits bij elkaar op en tellen daarbij weer de checksum op. Wanneer het resultaat alleen maar 1'en oplevert is het datagram correct.
- IP-adres zender (32-bit)
- IP-adres ontvanger (32-bit)
- Opties (lengte variabel). Dit veld is optioneel, maar moet wanneer het gebruikt wordt wel 32-bit lang zijn. Het veld wordt nauwelijks gebruikt.
- Gegevens (lengte variabel). Dit veld bevat transportlaag-datagrammen verpakt in UDP of TCP. Het kan ook andere datagrammen bevatten

zoals **ICMP**¹-berichten die gebruikt worden om korte foutberichten te versturen. Een voorbeeld is *'destination host unreachable'* wanneer om één of andere reden de doelhost niet bereikt kan worden.

Network Address Translation (NAT)

In sommige situaties is voor een aantal computers maar één IP-adres beschikbaar (bijvoorbeeld bij internet via ADSL, waarbij een gezin een abonnement met één IP-adres heeft, maar wel meerdere computers bezit). In deze gevallen wordt vaak **NAT**² toegepast.

De router van het lokale netwerk is dan direct verbonden met het internet en heeft daardoor een IP-adres in het internet. De hosts in het lokale netwerk hebben een zogenaamd lokaal IP-adres, waarop ze niet vanaf het internet te bereiken zijn. Stel dat host A een website wil ophalen, dan stuurt de host IP-datagrammen naar de router. Deze onderzoekt op zijn beurt de datagrammen. De router kijkt in de TCP-/UDP-header van het datagram wat de bestemming van het datagram is. Wanneer dit bekend is, vervangt hij het IP-adres van de afzender door dat van zichzelf. Verder onthoudt de router in een tabel, van welke host en port van die host de IP-datagrammen afkomstig waren. De gemodificeerde datagrammen worden door de router het internet ingestuurd en wanneer er datagrammen terugkomen, kijkt de router in de ontvangen datagrammen naar waar ze vandaan kwamen. Op basis van de eerder genoemde tabel bepaalt hij waar de datagrammen heen moeten in het lokale netwerk. Om te zorgen dat de datagrammen bij de lokale host aankomen, vervangt hij het IP-adres van de ontvanger in de TCP-/UDP-header in dat van de lokale host. Zonder verandering zou dit veld namelijk het IP-adres van de router bevatten, aangezien deze voor de zendende host in het internet de eindbestemming is.

NAT is een bruikbare techniek, waarmee een IP-adres gedeeld kan worden. Een van de nadelen is echter dat de gelaagde structuur van het TCP/IP-model in gevaar komt, aangezien een router (een apparaat in de netwerklaag) zich gaat bemoeien met zaken die zich in de transportlaag afspelen (aanpassen TCP-/UDP-header). Daarnaast is het op zich een voordeel dat computers niet direct meer met het internet verbonden zijn (firewall-functie), maar niet voor alle toepassingen is dit ideaal. Zo is het niet zomaar mogelijk om een webserver op te zetten. Om dit nu voor elkaar te krijgen moet poort 80 (HTTP) van de router doorgesluist worden naar de lokale host waarop de webserver draait (een instelling van de router).

¹Internet Control Message Protocol

²Network Address Translation

IPv6

De huidige versie 4 van het IP-protocol heeft tegenwoordig een aantal beperkingen. Het voornaamste probleem is dat het aantal IPv4-adressen beperkt is tot grofweg 4 miljard, terwijl er steeds meer verschillende apparaten op het internet aangesloten worden. Daarnaast is IPv4 niet geschikt voor het realiseren van supersnelle netwerken, aangezien het relatief veel tijd kost om de IPv4-header te verwerken.

Het nieuwe IPv6 probeert de problemen op te lossen. Allereerst hebben IPv6-adressen een lengte van 128bit in plaats van 32bit. De adressen hebben nu een vorm 'a:b:c:d:e:f:g:h/x', waar de letters a t/m h elk 16-bit getallen zijn (hexadecimale notatie). Verder geeft x weer het aantal bits aan dat het subnet vormt. Naast de '/x' notatie is het ook mogelijk de eerste x-bit als enen op te vatten en de subnetmask dan als een soort IP-adres op te vatten. IPv6 voegt de notatie '1234::5678:0:0:0:0/64' toe, welke aangeeft dat alle IP-adressen uit het subnet met '1234:0:0:5678' beginnen. Verder zijn zowel het host- als subnetgedeelte vaak 64bit.

Net zoals bij IPv4 zijn er ook een aantal gereserveerde IP-adressen. Ondermeer wordt '0:0:0:0:0:0:0:1' voor *loopback* gebruikt (vergelijkbaar met het IPv4 adres '127.0.0.1').

De andere grote wijzingen zijn te vinden in de header, welke nu een vaste lengte van 40 bytes heeft. De optie tot fragmentatie is verwijderd om de verwerkingssnelheid te verhogen. Indien een datagram te groot is voor een verbinding, wordt een foutmelding gegeven en is het de taak van de zender het datagram te verkleinen. Verder is de checksum voor de header verwijderd. Reden hiervoor is dat TCP en UDP eenzelfde mechanisme bevatten. Als laatste is ook het veld opties verwijderd.

Het nieuwe formaat van het IPv6 datagram is weergegeven in figuur 3.16. Hierin komen de volgende velden voor:

- Versie (4-bit). Dit 4-bit veld geeft net als in IPv4 het versienummer aan en legt daarmee de structuur voor de IP-header vast, aangezien deze per versie anders is.
- Type verkeer (8-bit). De taak van dit veld is vergelijkbaar met het 'Type dienst'-veld van IPv4.
- Flow label (20-bit). Dit veld is bedoeld voor 'Quality of Service' (QoS), waarmee prioriteit aan verschillende type gegevens gegeven kan worden.
- Lengte payload (16-bit). Aantal bytes dat het datagram lang is exclusief

Algemeen

Wiskunde

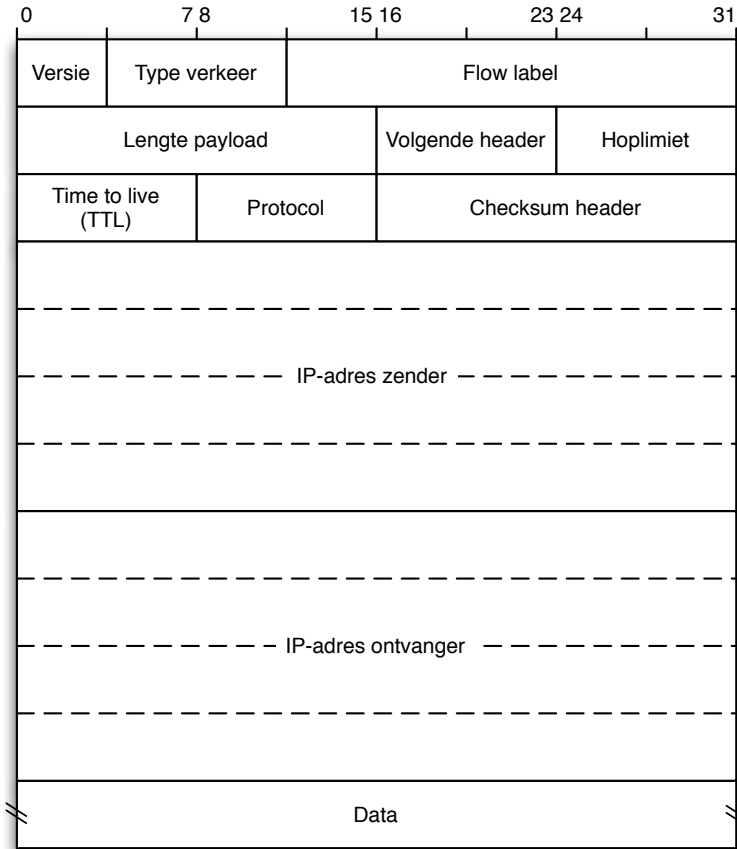
Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica



Figuur 3.16: Opbouw IPv6 datagram

- de 40-byte vaste header.
- Volgende header (8-bit). Dit veld is vergelijkbaar met het veld 'Protocol' uit de IPv4-header, waarmee het transportlaag protocol wordt aangegeven. Het gebruikt ook dezelfde waardes als het oude veld.
- Hoplimiet (8-bit). In IPv4 heette dit veld TTL, wat oorspronkelijk de levensduur van een datagram in seconden bevatte. Aangezien het werd gebruikt als een soort teller is de naam nu gewijzigd in 'hoplimiet'.
- IP-adres zender (128-bit)
- IP-adres ontvanger (128-bit)
- Gegevens (lengte variabel). De te verzenden gegevens die bijvoorbeeld weer in een TCP- of UDP-segment zijn verpakt.

De meeste routers in het internet ondersteunen alleen IPv4. Om IPv6 in te voeren zouden alle routers vervangen moeten worden door types die zowel IPv4 als IPv6 ondersteunen. Dit is echter geen optie. Een van de oplossingen voor dit probleem is **tunneling**, waarbij routers die IPv6 ondersteunen bij ontvangst van een IPv6-datagram dit ook als een IPv6-datagram doorsturen naar de ander. Indien de andere router alleen IPv4 ondersteunt, dan kan de IPv6-router het IPv6-datagram inpakken in een IPv4-datagram en het op die manier toch doorsturen. Wanneer het datagram arriveert bij een router die wel IPv6 ondersteunt, dan kan deze het uitpakken en weer doorsturen als een 'echt' IPv6-datagram.

Linklaag

De **linklaag** of **MAC**¹ is de laag tussen de netwerklaag en de fysieke laag. De netwerklaag heeft als taak het transport van datagrammen tussen hosts te regelen. De reis die een maakt datagram voor hij bij een host arriveert is lang. Uitgaande van een lokaal netwerk komt een datagram allereerst aan bij de router van het lokale netwerk. Deze stuurt het datagram over een verbinding (link) naar een router die zich dichterbij de doelhost bevindt dan de lokale router. Deze stuurt het datagram via een andere link weer door naar een andere router. Dit proces herhaalt zich totdat het datagram de bestemming heeft bereikt. Het is de taak van de linklaag om het transport tussen knooppunten onderling te regelen. Onder knooppunten worden onder meer routers en hosts verstaan.

¹Medium Access Control

Zoals gezegd is de hoofdtak van de linklaag het transporteren van datagrammen tussen twee knooppunten. Afhankelijk van het gebruikte linklaag protocol zijn er nog andere diensten die de laag kan vervullen:

- Betrouwbare dataoverdracht: sommige linklaag protocollen bieden op een manier vergelijkbaar met TCP betrouwbare dataoverdracht. Dit is met name bedoeld voor media waar snel fouten bij optreden zoals draadloze verbindingen.
- *Flow control*: computers, routers en andere knooppunten hebben een beperkte buffercapaciteit. Om te voorkomen dat de ontvanger overspoelt wordt met data, kan de linklaag de optie bieden de verzendsnelheid te beperken.
- Foutdetectie: tijdens het transport van gegevens over een medium kunnen datagrammen beschadigd raken. Aangezien het niet zinvol is beschadigde datagrammen verder te verwerken, bevat de linklaag vaak mechanismes om foute datagrammen te detecteren.
- Foutcorrectie: in plaats van het weggoeien van beschadigde datagrammen, wordt geprobeerd fouten te herstellen op basis van pariteitbits.
- Framing: dit is de mogelijkheid van de linklaag om datagrammen afkomstig van de netwerklaag in een linklaag-jasje te hijsen. Zo'n ingepakt netwerklaagdatagram heet dan op linklaag niveau een 'frame'. Naast het datagram bevat het frame extra velden die bedoeld zijn voor de linklaag.
- Half-duplex en Full-duplex: in geval van half-duplex stuurt een van beide knooppunten gegevens terwijl in geval van full-duplex beide tegelijk kunnen zenden.
- Verbindingstoegang (Link access): in het meest eenvoudige geval is er een verbinding tussen twee knooppunten met aan elk uiteinde een zender en een ontvanger (point-to-point). Afspraken over wie er wanneer gegevens mag versturen hoeven amper gemaakt te worden. Vaak is het echter zo dat een verbinding gedeeld wordt, waardoor er aan elk uiteinde meerdere zenders en ontvangers kunnen zitten. In dat geval zijn er afspraken nodig over hoe het kanaal gedeeld wordt.

Adressering

Moderne computernetwerken maken vrijwel allemaal gebruik van het IP. Naast het IP zijn er echter nog andere (oude) netwerkprotocollen zoals IPX van Novell en AppleTalk van Apple in omloop. De netwerklaag moet gegevens afkomstig van al deze verschillende protocollen kunnen verwerken. Er is een generieke adressering nodig om alle hosts en nodes (aan de uiteinden van de links) te vinden.

Elke netwerkkaart bevat om deze reden een unieke, vaste code ingebouwd in de hardware. Deze code met de naam **MAC-adres**, LAN-adres of fysiek adres wordt uitgegeven door het IEEE. Deze non-profit organisatie zorgt er voor dat elk MAC-adres uniek is. Indien een fabrikant netwerkkaarten wil produceren moet deze bij het IEEE een bereik van adressen aanvragen.

De lengte van een MAC-adres is standaard 48-bit. De drie meest significante bytes zijn gereserveerd voor het IEEE en bevatten onder andere voor welk bedrijf het bereik is bedoeld. De overige drie bytes zijn vrij in te delen door de koper (zo lang er maar geen dubbele MAC-adressen uitgegeven worden). Het standaard 48-bit formaat wordt gebruikt voor verscheidene technologieën waaronder Ethernet, Bluetooth, 802.11x (WLAN), SCSI en andere.

Hoewel er deze eeuw ruim voldoende adressen lijken te zijn, zijn zowel FireWire als IPv6 al overgestapt naar een 64-bit MAC-adres met de naam **EUI-64**. De nieuwe 64-bit standaard is wel compatibel met de oude standaard; om een 48-bits adres te verlengen wordt aan het begin 'FF FE' toegevoegd.¹

De werking van de linklaag wordt nu uitgelegd aan de hand van twee voorbeelden. Als eerst een host die een datagram naar een andere host in hetzelfde subnet wil versturen, als tweede een host die een datagram naar een host op een ander subnet wil versturen. Hier kijken we naar de samenwerking van de netwerk- en linklaag en daarmee de IP- en MAC-adressen. Met behulp van het **ARP** Address Resolution Protocol kan het MAC-adres worden gevonden op basis van het IP-adres. (Met behulp van **RARP**² kan het andersom, bijvoorbeeld voor hosts om hun IP-adres op te halen op basis van hun MAC-adres.)

In een lokaal netwerk met daarin ondermeer host A met IP-adres 1.2.3.4 en host B met IP-adres 1.2.3.5 wil host A een datagram versturen naar host B. Voordat dit datagram verzonden kan worden, moet het MAC-adres van host B achterhaald worden. Hiervoor zoekt host A allereerst in een door de host zelf bijgehouden ARP-tabel met daarin recentelijk opgezochte MAC/IP-adres combinaties. Wanneer het MAC-adres voor host B hierin gevonden wordt, is het zoekproces voltooid en kan het datagram verzonden worden. In het geval host A het MAC-adres niet (meer) weet, stuurt host A een zogenaamde *broadcast*. Dit is een ARP-bericht met in het bestemmingsveld het MAC-adres 'FF FF FF FF FF FF', in het afzenderveld het eigen MAC-adres en in het vervolg van het bericht het gezochte IP-adres. Alle hosts in het netwerk zullen dit bericht ontvangen en lezen, maar alleen de host van wie het IP-adres gelijk is aan het gezochte IP-adres, zal antwoorden. De host stuurt aan de zoekende

¹Naar verluid vanwege een typefout in de specificatie, waar eigenlijk FF FF was bedoeld.

²Reverse Address Resolution Protocol

host een ARP-bericht terug met daarin zijn IP- en MAC-adres. De zoekende host voegt de nieuwe informatie toe aan zijn ARP-tabel en kan vervolgens datagrammen naar de andere host versturen.

De situatie wordt wat ingewikkelder wanneer host A een datagram naar host C wil versturen die zich aan de andere kant van de wereld bevindt. De datagrammen die host A uiteindelijk zal versturen, worden via talloze routers door het internet geleid. Routers zijn aan meerdere netwerken gekoppeld, hebben voor elke verbinding een eigen IP-adres en verder heeft de router zijn eigen MAC-adres. Wanneer host A een ARP-bericht verstuurt om het MAC-adres van host C te achterhalen antwoordt geen enkele host uit het lokale netwerk, omdat geen van alle dit IP-adres heeft. Om toch datagrammen naar host C te versturen, stuurt host A het datagram allereerst naar zijn lokale router die verbonden is met het internet (*gateway*). Host A kent het IP-adres van de router en zoekt dan via ARP het MAC-adres op. Vervolgens stuurt host A via haar linklaag het frame naar de router. De router opent het frame en ziet dan het verzonden datagram. Het ziet dat het datagram bestemd is voor host C en stuurt dit op dezelfde manier als eerder verder in het internet totdat het uiteindelijk bij host C terechtkomt.

DHCP

In een netwerk dat gebruik maakt van het IP-protocol moet elke computer voorzien zijn van een IP-adres. Een mogelijkheid is om handmatig op elke computer een IP-adres in te stellen. Een van de problemen hiervan is echter dat dit met name in grote netwerken veel werk is en ten tweede is het systeem niet flexibel. Daarnaast wil je met name in het geval van een laptop dat deze op verschillende locaties (thuis, werk, . . .) van een netwerk gebruik kan maken zonder de netwerkinstellingen aan te hoeven passen. Om de toewijzing van IP-adressen te vereenvoudigen is het **DHCP**¹ in het leven geroepen.

Om DHCP te kunnen gebruiken is er een DHCP-server nodig die IP-adressen uitdeelt. Verder moet de client ingesteld worden om een IP-adres te verkrijgen via DHCP. Wanneer dit het geval is, kan DHCP op drie manieren gebruikt worden. Allereerst kan de server een lijst bevatten met daarin MAC-adressen gekoppeld met daaraan gekoppeld een vast IP-adres. Iemand moet deze lijst instellen en alleen hosts die in de lijst voorkomen worden toegelaten tot het netwerk. Een tweede manier voor de server is om IP-adressen die in een bepaald gebied ongebruikt zijn uit te reiken. De laatste manier is om dyna-

¹*Dynamic Host Configuration Protocol*

misch IP-adressen aan clients uit te lenen. De idee is dat wanneer een client een IP-adres nodig heeft, de server hem deze voor een bepaalde tijd uitleent (*lease*). Wanneer deze periode verloopt, wordt het IP-adres ingenomen tenzij de client een verzoek indient om het IP-adres langer te mogen gebruiken.

Stel dat een computer via DHCP een IP-adres wil verkrijgen. Deze stuurt dan een UDP segment naar het (broadcast) IP-adres 255.255.255.255 met poortnummer 67. Verder wordt als IP-adres van de afzender 0.0.0.0 in de UDP-header gezet. Vervolgens wordt het pakket via de netwerklaag naar de linklaag gestuurd. Deze ziet dat het datagram bestemd is voor IP-adres 255.255.255.255 en zet in het bestemmingsveld van het frame het broadcast MAC-adres 'FF FF FF FF FF FF'. Wanneer er een DHCP-server aanwezig is, zal deze het frame ontvangen en antwoorden met een voorstel voor IP instellingen. Indien het lokale netwerk geen DHCP-server bevat kan bijvoorbeeld een router, wanneer deze hiervoor is ingesteld, het verzoek doorsturen naar een ander subnet. Het doorgestuurde verzoek wordt wel voorzien van het MAC-adres van de router als afzender.

Bij een of meerdere aanwezige DHCP-servers, ontvangt de client een of meerdere antwoorden. Elk antwoord bevat netwerkinstellingen zoals het voorgestelde IP-adres, DNS-servers, netwerk mask, geldigheidsduur van het IP-adres en meer. De client kiest uit een van de voorstellen en stuurt dan naar een van de servers een request bericht terug met daarin nog een keer alle netwerkinstellingen. De DHCP-server stuurt uiteindelijk een bevestiging (*acknowledgement* of ACK) terug met daarin nog een keer alle netwerkinstellingen om het voorstel goed te keuren en daarmee de transactie af te sluiten.

Fysieke laag

Ethernet of IEEE 802.3 is op het moment het belangrijkste protocol voor gebruik in bedrade LAN-netwerken. Het protocol werkt enerzijds op de linklaag en anderzijds op de fysieke laag. In geval van de linklaag legt Ethernet de structuur voor frames vast en regelt het hoe het kanaal gebruikt dient te worden. Op het niveau van de fysieke laag legt Ethernet vast hoe de signalen eruitzien en wat voor kabels en connectoren er gebruikt dienen te worden.

Werking

De werking van het Ethernet-protocol is gebaseerd op het ALOHA-protocol, dat gebruikt werd voor radiocommunicatie op Hawaïi. Het idee is dat wanneer iemand gegevens wil versturen, hij dat moet doen wanneer hij kan. Als er niemand anders aan het verzenden is, komen alle gegevens die verzonden

zijn aan. In het geval er nog iemand op hetzelfde moment bezig was met verzenden, vindt er een botsing plaats en gaat er informatie verloren. Allebei de zenders merken pas dat er iets mis is gegaan na afloop van het verzenden. Beiden gooien (ieder voor zich) met een bepaalde kans een muntje en op basis van dit resultaat bepalen ze elk of ze direct weer verder gaan zenden of dat ze dit na een korte pauze doen. Uiteindelijk zal elk zijn gegevens kunnen versturen, maar ten gevolge van botsingen en het feit dat er af en toe gewacht moet worden, zal het kanaal niet efficiënt benut zijn.

Een variant op ALOHA is **CSMA/CD**¹, wat vergelijkbaar is met ALOHA, maar veel efficiënter is. Het verschil met ALOHA is dat de zender, alvorens hij begint met zenden, 'luistert' of er al iemand aan het zenden is. Wanneer het kanaal leeg lijkt te zijn, begint hij pas met zenden. Verder kunnen botsingen waargenomen worden. Op het moment dat er een botsing gedetecteerd is, wordt er direct gestopt met zenden. In plaats van een muntje gooien, wordt er een willekeurige tijd gewacht. Na het wachten wordt er gekeken of het kanaal vrij is. Indien dat zo is wordt er nog heel even gewacht om 'zeker' te weten of het echt vrij is, waarna het zenden zal worden hervat. Indien het kanaal niet leeg is, wordt er opnieuw een willekeurige tijd gewacht. Dit gaat door totdat het kanaal leeg is en alle gegevens verzonden zijn.

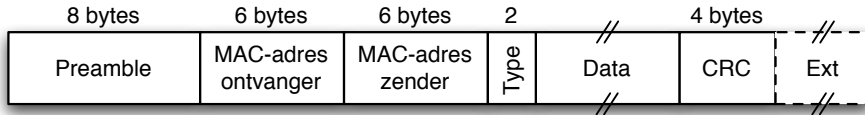
Ethernet is gebaseerd op dit CSMA/CD-protocol. De tijden dat er gewacht moet worden zijn zogenaamde 'bittijden', welke afhangen van de gebruikte Ethernet-variant. Alvorens de zender begint met zenden, wacht hij een **IFG**²: 96 bittijden om te kijken of het kanaal leeg is. In geval van 10Mbit ethernet is dat 9,6 μ s, in geval van 100Mbit ethernet 960ns en voor 1Gbit 96ns. Is het kanaal stil, dan begint hij met zenden, anders wacht hij net zo lang totdat het kanaal 96 bittijden leeg is. Op het moment dat hijzelf of iemand anders een botsing waarneemt, wordt er een 'jam'-signaal verstuurd dat 48 bittijden duurt. Dit signaal vertelt ieder in het netwerk om te stoppen met zenden. Hierna begint het wachtproces. In geval van ALOHA werd er een 'muntje gegooid', maar in geval van Ethernet wordt er een willekeurige wachttijd (in slots van 512 bittijden) gekozen. In eerste instantie wordt er een getal K met een waarde van 0 of 1 gekozen. Er wordt dan $K \times 512$ bittijden gewacht. Als het kanaal leeg is, wordt er net zoals in het begin steeds 96 bittijden gewacht om te kijken of het echt leeg is en dit wordt gedaan totdat dit echt zo is. Indien na het nummertje trekken (en wachten) het kanaal nog steeds bezet is wordt er opnieuw een getal K gekozen, maar nu tussen 0 en 3. Vervolgens wordt er weer $K \times 512$ bittijden gewacht en dit gaat net zo lang door totdat het kanaal

¹Carrier Sense Multiple Access with Collision Detection

²InterFrame Gap

vrij is. Uiteindelijk is K maximaal een getal tussen de 0 en $2^{10} - 1$.

Frames



Figuur 3.17: Opbouw Ethernet frame

Een Ethernet frame ziet er zo uit als in figuur 3.17 is weergegeven. Hierin komen de volgende velden voor:

- *Preamble* (8 bytes). De frames die de zender verstuurt bestaan uit bits. Deze bits worden uiteindelijk door bepaalde spanningsniveaus gerepresenteerd en verder heeft elke bit een bepaalde tijdsduur. De tijd die een bit duurt hangt af van de gebruikte ethernetsnelheid, wat ondermeer 10Mbit, 100Mbit en 1Gbit kan zijn. Deze snelheden kunnen door elkaar gebruikt worden. Wanneer een host gegevens ontvangt, moet deze, om het frame te kunnen ontcijferen, weten hoe lang een bit duurt en zijn klok hierop synchroniseren. Het begin van een ethernet-frame bevat hiertoe zeven bytes met het patroon '10101010' en een *Start-of-frame delimiter* van één byte. Om de ontvanger te laten weten dat de preamble ten einde is bevat deze byte hetzelfde bitpatroon als de rest van het preamble, maar met op het einde twee enen om aan te geven waar het 'echte' frame begint.
- *Destination address* (6 bytes). Dit veld bevat het MAC-adres, met daarin voor wie het frame bestemd is.
- *Source address* (6 bytes). Dit veld bevat het MAC-adres van de zender.
- *Type/Length* (2 bytes). Afhankelijk van de gebruikte Ethernet-specificatie bevat dit veld ofwel een nummer dat het gebruikte netwerklaagprotocol aangeeft ofwel de lengte van het datagedeelte van het frame.
- *Data* (46 tot 1500 bytes). Bevat de te verzenden gegevens. In een IP-gebaseerd netwerk zal hier een IP-datagram in verborgen zitten.
- *CRC checksum* (4 bytes). Ter controle of het frame correct is overgekomen plaatst de zender een checksum. Deze is via het CRC-algoritme berekend over het gehele frame, met uitzondering van de preamble. De ontvangende host doet hetzelfde en als beide waarden overeenkomen is

het frame waarschijnlijk correct overgekomen.

- **Uitbreiding.** Een 1000Mbit frame moet minimaal 520 bytes lang zijn (voor lagere snelheden 64 bytes). Dit komt doordat frames op hoge snelheden maar kort in tijd 'duren'. Hierdoor zijn er situaties mogelijk waarbij collisies niet waargenomen kunnen worden. Om dit te voorkomen is de minimumlengte van een frame vergroot. Dit veld wordt gebruikt om het segment minimaal 520 bytes lang te krijgen.

Zoals gezegd bevat een host een netwerkkaart waarmee hij via een router verbonden is met het internet. Er wordt uitgegaan van een lokaal netwerk, bestaande uit enkele hosts, welke allemaal uitgerust zijn met een netwerkkaart. Een manier om alle hosts met elkaar te verbinden is om vanaf elke computer een kabel naar een zogenaamde *hub* te trekken. Deze hub werkt dan als een stekkerblok en verbindt alle hosts met elkaar. Een voordeel van hubs is dat ze goedkoop en eenvoudig in gebruik zijn. Het nadeel ervan is dat ze erg dom zijn: ze implementeren alleen de fysieke laag van het netwerkmodel. Indien op een poort van een hub iets binnenkomt, dan wordt dit signaal naar alle op de hub aangesloten hosts doorgestuurd. Daardoor treden bij communicatie via een hub collisies op, aangezien de hub alle netwerkinterfaces met elkaar verbindt. De hosts moeten zelf de collisies waarnemen en ze zelf via CSMA/CD afhandelen. Kortom: een hub is functioneel niet efficiënt.

Een efficiënter alternatief voor een hub is de zogenaamde *switch*. Het apparaat lijkt op een hub, maar het verschil is dat een switch naast de fysieke laag ook de linklaag implementeert. Het gevolg is dat een switch CSMA/CD ondersteunt (aangezien dit onderdeel is van de linklaag) en een switch ziet binnenkomende signalen als frames in plaats van bits. Om te voorkomen dat signalen doorgestuurd worden naar alle op de switch aangesloten hosts, houdt de switch een tabel bij met daarin welke host op welke poort aangesloten is. In deze tabel wordt elke host aangeduid met het MAC-adres van de netwerkkaart die zich in de betreffende host bevindt. Deze tabel wordt gevuld op basis van de headers van binnenkomende frames. Hierdoor is een switch zelflerend en ondersteunt hij 'plug & play'.

Wanneer nu een frame binnenkomt bij de switch, analyseert de switch naar welk MAC-adres het frame gestuurd moet worden. Vervolgens zoekt de switch in zijn tabel, op welke poort de host met het betreffende MAC-adres aan is gesloten. Dan stuurt de switch het frame slechts naar deze host door. Hierdoor zijn collisies niet meer nodig (maar buffering in de switch wel).

Als laatste is er nog een *router*. Dit apparaat is vergelijkbaar met een switch,

maar implementeert naast de fysieke- en linklaag ook de netwerklaag. De router heeft als taak segmenten door te sturen naar de juiste host in plaats van frames en bits, wat het geval was bij respectievelijk een switch en een hub.

Uitgaande van een relatief groot kantoor houdt de opbouw van een netwerk veelal in dat alle hosts van een bepaalde afdeling via een hub of switch met elkaar verbonden zijn. Al deze afdelingen zijn dan, eventueel via nog meer hubs of switches, via een router met het internet verbonden.

Ethernetstandaarden

Ethernet is inmiddels een belangrijke netwerkstandaard. Er bestaan talloze verschillende versies met verschillende snelheden en eigenschappen. Alle verschillende technieken hebben een verschillende naam, volgens een bepaalde methode van naamgeving. Het eerste deel van de naam is een getal (bijvoorbeeld 10, 100 of 1000) dat de netwerksnelheid in Mbit/s aangeeft. Het tweede deel van de naam is 'Base' of 'Broad' wat aangeeft welke band de versie gebruikt. Hierna volgt veelal de naam van de techniek. In geval van twisted pair volgt een 'T' en in geval van glasvezel een 'F' (fiber). Achter deze letter komt vaak ook nog een getal zoals '2' wat aangeeft dat de maximale kabellengte ($2 \times 100\text{m} = 200\text{m}$) is.

10Mbit

- 10Base5 (Think Ethernet/Thicknet, Thickwire, Yellow Cable). Dit is de oorspronkelijke 10Mbit-versie van ethernet, welke gebruik maakt van een enkele 50Ω coaxkabel (RG-8). De maximale lengte van de kabel is 500m en de uiteindes moeten afgesloten zijn met een 50Ω afsluitweerstand. In een eenvoudig 10Base5-netwerk ligt er een kabel die alle computers passeert. Aan deze hoofdkabel worden aftakkingen gemaakt door een DIX-connector door de mantel van de kabel heen te prikken en aan deze connector dan een kabel te verbinden welke naar een computer leidt.
- 10Base2 (Thin Ethernet/Thinnet). Net zoals 10Base5 is dit een technologie om via coaxkabel een busnetwerk te maken. Verschillen zitten in het gebruik van een ander type coax (RG-58), een maximale kabellengte van 200m en een ander type connectoren. In plaats van een DIX-connector welke in de kabelmantel geprikt wordt, wordt er gebruik gemaakt van T-connectoren die op de plaats van een aftakking in de kabel gemaakt

zijn. Een T-connector bevat een male **BNC**¹ aansluiting en wordt aangesloten op een female BNC-connector welke zich op een netwerkkaart bevindt. Verder moet ook voor 10Base2 het einde van de kabel afgeschermd worden met een afsluitweerstand van 50Ω.

- 10BaseT. Ethernetvariant die in plaats van coax gebruik maakt van **UTP**² of **STP**³. Deze versie maakt gebruik van kabels van het type CAT-3 of CAT-5. Van de aanwezige 4 aderpennen in beide type kabels gebruikt het er slechts 2, verder is de maximale lengte van een UTP-kabel ongeveer 100m en wordt er gebruik gemaakt van RJ45-connectoren. (Zie pag. 590 voor aansluitschema's.)
- 10BaseFL. Dit is een 10Mbit-versie die gebruik maakt van glasvezelkabels. Bij gebruik in multimode (zonder repeaters) bedraagt de maximale kabellengte 2km. Deze standaard werd voornamelijk gebruikt om stations en *repeaters* met elkaar te verbinden.
- 10BaseFB. Dit is een andere 10Mbit-versie van ethernet over glasvezel, bedoeld voor backbones. In multimode zonder repeaters is maximale kabellengte 2km.
- 10BaseFP. Dit is een 10Mbit-versie gebruikmakend van glasvezel, bedoeld voor toepassingen in relatief kleinschalige sternetwerken. De standaard kan overweg met fiberlengtes tot 500m en werkt zonder repeaters en heet daarom 'passief'.

Fast Ethernet 100Mbit

De 10Mbit-versie van Ethernet is uitgebreid naar 100Mbit (IEEE 802.3u), waarbij de werking hetzelfde is gehouden. Het enige verschil zit in het feit dat bittijden en maximale vertragingen ten gevolge van de hogere snelheid korter zijn geworden. Er zijn verschillende varianten van 100Mbit ethernet, welke verschillende type kabels gebruiken en daardoor bijvoorbeeld grotere afstanden kunnen overbruggen.

- 100BaseTX. Dit is een 100BaseT-variant die werkt met CAT-5 kabels waarvan 2 aderpennen worden gebruikt. De maximale kabellengte bedraagt 100m. Eventueel kan er ook gebruik gemaakt worden van STP kabels van type 1.
- 100BaseT2. Deze 100BaseT-variant maakt 100Mbit ethernet mogelijk over CAT-3 kabels. 100BaseT2 heeft hiervan 2 pennen nodig en kan in full-duplex werken. Deze variant wordt niet gebruikt.
- 100BaseT4. Dit is een 100BaseT-variant welke gebruik maakt van CAT-

¹Bayonet Neill Concellman of British Naval Connector

²Unshielded Twisted Pair

³Shielded Twisted Pair

3 kabels. Hier zijn 4 aderparen nodig in plaats van 2. De werking is beperkt tot half-duplex.

- 100BaseFX. Een 100Mbit-versie die gebruik maakt van glasvezel. De techniek maakt gebruik van twee glasvezels (50/125 μm , 60/125 μm *multi-mode* of *singlemode*) en een golflengte van 1300nm. Eén van de vezels wordt gebruikt voor zenden en de andere voor ontvangen. In halfduplex kan 400m overbrugd worden, in full-duplex 2km. Dit kan zonder gebruik te maken van repeaters.

Gigabit Ethernet

Gigabit is een uitbreiding van Ethernet om snelheden van 1000Mbit ofwel 1Gbit mogelijk te maken. Er is weer geprobeerd de standaard compatibel te houden met de voorgaande standaarden, maar ten gevolge van de hoge snelheid duren bits heel 'kort' en zijn collisies lastig waarneembaar. Om toch tot vergelijkbare eigenschappen te komen bij een kabellengte van 100m moeten frames een minimale lengte van 520 bytes hebben.

- 1000BaseT (IEEE 802.3ab). Dit is een gigabit-versie welke gebruik maakt van standaard CAT-5e of CAT-6 kabels. In tegenstelling tot 10BaseT en 100BaseT worden nu alle 8 de aderparen gebruikt en verder maakt de standaard werking in full-duplex mogelijk.
- 1000BaseCX (copper). Deze gigabit-versie welke, communicatie tot een lengte van 25m mogelijk maakt, gebruikt speciale koperen kabels.
- 1000BaseLX (longwave). Een versie van gigabit ethernet welke gebruik maakt van glasvezel. De standaard maakt in geval van multi-mode gebruik van lange golflengtes van 1300nm. Bij gebruik van 50/125 μm of 62,5/125 μm kunnen afstanden tot 550m overbrugd worden (zonder repeaters). Bij gebruik in single-mode in combinatie met een laser met golflengte van 1310nm kunnen afstanden tot 5km gehaald worden.
- 1000BaseSX (shortwave). Dit is een andere technologie bedoeld voor gigabit ethernet welke gebruik maakt van 850nm lasers en kan in multi-mode afhankelijk of het type glasvezel 50/125 μm of 62,5/125 μm afstanden van respectievelijk 300m of 550m overbruggen.
- 1000BaseLH (long haul). Deze gigabit ethernetstandaard, gebruikmakend van single-mode vezels, is bedoeld voor afstanden tot 100km zonder gebruik te maken van repeaters.

Programmeren

In dit hoofdstuk zal het programmeren in Java, C en C++ globaal worden behandeld. De verschillende elementen van de programmeertalen zullen worden belicht door middel van een korte uitleg en een codevoorbeeld.

Sequentieel programmeren

De structuur en opbouw van programma's in objectgeoriënteerde talen is volstrekt anders dan in sequentiële talen. Dat neemt niet weg dat de daadwerkelijke code sterke overeenkomsten vertoont tussen de twee soorten talen. Daarom worden in deze sectie een aantal begrippen uitgelegd die zowel in sequentiële als in objectgeoriënteerde talen worden gebruikt.

Variabelen

Een **variabele** duidt een plek in het geheugen aan waar gegevens kunnen worden opgeslagen. Een variabele heeft altijd een naam en een type (voor meer over typen zie p. 222). Voordat een variabele gebruikt kan worden moet deze eerst worden gedeclareerd:

C, C++ en Java

```
int mijngeheelgetal;
```

Dit is de **declaratie** van een variabele met de naam 'mijngeheelgetal' van het type 'int'. Om een waarde aan de variabele toe te kennen gebruik je de '=' operator:

C, C++ en Java

```
mijngeheelgetal = 5;
```

De variabele 'mijngeheelgetal' bevat nu de waarde 5. Het is ook mogelijk om een variabele bij declaratie te **initialiseren**:

C, C++ en Java

```
int mijngeheelgetal = 427;
```

Constanten

Een **constante** is vergelijkbaar met een variabele, met als verschil dat een constante een vaste waarde heeft en dus alleen gelezen kan worden.

 C en C++

```
const int MIJNCONSTANTE = 5;
```

 Java

```
final int MIJNCONSTANTE = 5;
```

In dit voorbeeld wordt een constante gedeclareerd van het type `int` met de naam `MIJNCONSTANTE` en wordt er het getal 5 aan toegekend. Het is gebruikelijk om de naam van een constante in hoofdletters te schrijven.

Arrays

Een **array** is een groep gegevens van het zelfde type (denk aan een aantal voetbalscores of een rij letters die samen een woord vormen). Array's kunnen één- of meerdimensionaal zijn. Een array declareer je met behulp van blokhaken:

 C en C++

```
1 int mijnarray[10];
2 int twodarray[10][4];
```

 Java

```
1 int [] mijnarray = new int [10];
2 int [][] twodarray = new int [10][4];
```

In bovenstaand codevoorbeeld worden twee integer arrays gemaakt. Een ééndimensionale array met 10 items en een tweedimensionale array met 10×4 items. Op de volgende wijze kunnen elementen in een array worden gemanipuleerd:

 C, C++ en Java

```
1 mijnarray[0] = 5;      // schrijven naar een array
2 a = mijnarray[4];     // lezen van een array
```

Structures

Een **structure** bestaat uit een combinatie van verschillende variabelen met verschillende typen. Deze variabelen worden de velden van de structure genoemd. Een structure declareer je als volgt:

C (alternatief 1)	C (alternatief 2)
<pre> 1 struct Mijnstruct 2 { 3 int a; 4 double b; 5 char s[25]; 6 } 7 8 struct Mijnstruct test; 9 test.a = 5; 10 test.b = 2.154; 11 test.s = "Hallo"; </pre>	<pre> 1 typedef struct mijnstruct 2 { 3 int a; 4 double b; 5 char s[25]; 6 } Mijnstruct; 7 8 Mijnstruct test; 9 test.a = 5; 10 test.b = 2.154; 11 test.s = "Hallo"; </pre>
C++	
<pre> 1 struct Mijnstruct 2 { 3 int a; 4 double b; 5 char s[25]; 6 } 7 8 Mijnstruct test; 9 test.a = 5; 10 test.b = 2.154; 11 test.s = "Hallo"; </pre>	

In dit codevoorbeeld wordt een structure gedefinieerd genaamd 'Mijnstruct'. Vervolgens wordt een variabele met als type de structure 'Mijnstruct' gedeclareerd en worden er waarden aan de velden van deze variabele toegekend. Let op het verschil tussen de syntaxis van de verschillende talen. In C++ wordt de naam van een structure automatisch een type, terwijl in C hier het sleutelwoord **typedef** voor nodig is. Java kent geen structures.

Typen

Om met gegevens in het geheugen (voor variabelen, attributen en parameters) om te gaan, moeten ze worden aangemerkt als gegevens van een bepaald **type**. Een type beperkt de hoeveelheid verschillende gegevens die in de geheugenplaats mogelijkwijs kunnen worden opgeslagen en legt manieren vast om met de gegevens om te gaan.

In alle drie de programmeertalen bestaan er de zogenaamde **primitieve typen**. Bewerkingen op gegevens van een primitief type kunnen direct door de compiler uitgevoerd worden; deze begrijpt de betekenis van de gegevens zelf. Zie pagina 236 voor een overzicht van de primitieve typen.

In de objectgeoriënteerde talen bestaan er ook typen, waarbij de geheugenplaats wordt gevuld met een object van een klasse, horend bij het type (in Java **referentietype** genoemd). Bij het onderwerp 'Objecten instantiëren' (p. 231) wordt hier verder op ingegaan.

Typecasts

Met een **typecast** is het mogelijk om het type van gegevens om te zetten naar een ander type. Dit maakt het mogelijk om bijvoorbeeld de inhoud van een integer variabele naar een floating-point variable te kopiëren:

C, C++ en Java

```

1 float a;           // declareer een floating point variabele
2 int b = 10;        // declareer en initialiseer een integer
3 a = (float) b;     // kopieer de integer waarde uit b naar a

```

De hierboven beschreven typecast is een zogeheten **expliciete typecast**. Sommige typecasts worden automatisch door de compiler aangenomen (de zogenaamde **impliciete typecast**). Dit zijn typecasts die 'veilig' uitgevoerd kunnen worden, zonder dat er informatie verloren gaat (**coërcie**).

byte → short → int → long → float → double

Functies en methoden

Een **functie** is een stukje code dat wordt aangeduid met een naam en waaraan verschillende **parameters** kunnen worden meegegeven. Deze parameters kunnen in de code gebruikt worden. Nadat de code is uitgevoerd, kan ook een waarde worden teruggegeven. De syntax van een functie is als volgt:

C, C++ en Java

```
1 type mijnFunctie(type parameter1, type parameter2)
2 {
3     ... hier komt de functie implementatie ...
4 }
```

Het type van de functie bepaalt het type van de parameter die wordt teruggegeven door de functie. Om de functie geen waarde te laten teruggeven, gebruik je het type **void**, wat zo iets betekent als: niets. Een functie wordt afgesloten door middel van het sleutelwoord **return**. Return wordt ook gebruikt om de terugkeerwaarde aan te geven, bijvoorbeeld:

C, C++ en Java

```
return a;
```

In dit voorbeeld wordt de inhoud van variabele 'a' teruggegeven.

Pointers

Een *pointer* is een speciaal soort variabele met een geheugenadres er in. Dit kan het geheugenadres van een variabele zijn, een functie of zomaar een stuk geheugen (bijvoorbeeld een buffer). Java kent geen pointers, C++ wel. Een pointer heeft, net als een variabele, een naam en een type. Het type verwijst naar het soort gegevens waar de pointer naar wijst. Een pointer declareer je als volgt:

C en C++

```
1 int *mijnpointer; //Pointer naar integer
2 int **mijnpointer; //Pointer naar integer-pointer
3 int (*mijnFunctiePointer)(int a); //Pointer naar functie
```

Het sterretje geeft aan dat het om een pointer gaat. Een functie-pointer wordt net zo gedeclareerd als een normale functie, maar heeft een sterretje voor de naam met ronde haken er omheen. Om een pointer naar iets te laten wijzen kun je de volgende syntax gebruiken:

C en C++

```
1 mijnpointer = &mijnvariabele; // pointer naar een variabele
2 int *mijnpointer = (int *) 5781; // pointer naar een adres
3 void (*functiePointer)() = mijnFunctie; // functiepointer
```

Let hierbij op de **typecast** (`int *`), waarmee wordt aangegeven dat het getal 5781 een pointer van het type `int` betreft. Op dezelfde manier kunnen pointers van verschillende typen elkaanders adressen kopiëren. Het manipuleren van pointers en de inhoud gaat ook met het sterretje:

C en C++

```
1 int a;           // declaratie van een variabele 'a'
2 int *mijnpointer; // declaratie van een integer pointer
3 mijnpointer = &a; // laat 'mijnpointer' naar 'a' wijzen
4 *mijnpointer = 5; // wijzig de inhoud van variabele 'a'
5                 // via de pointer
```

Voorwaardelijke uitvoering

Vaak is het gewenst dat bepaalde instructies alleen worden uitgevoerd als aan een bepaalde voorwaarde is voldaan. Zo'n voorwaardelijke uitvoering vind je terug in de vorm van een **if**-statement. Een **if**-statement wordt als volgt gebruikt:

C, C++ en Java

```

1 if (a < b) { c = 5; }
2 if (a < b) { c = 5; } else { c = 0; }

```

In regel 1 wordt de code tussen accolades uitgevoerd als de expressie tussen haakjes waar is. In regel 2 wordt ook code uitgevoerd als de expressie niet waar is. Dit gebeurt door middel van het sleutelwoord **else**.

Een andere methode om iets voorwaardelijk uit te voeren is het **switch**-statement. Een **switch**-constructie wordt meestal gebruikt wanneer er meer mogelijkheden zijn dan twee. Deze wordt als volgt gebruikt:

C, C++ en Java

```

1 switch (a)
2 {
3   case 1:  b = 5; break;
4   case 2:  b = 2; break;
5   case 3:  b = 7; break;
6   case 4:  b = 1; break;
7
8   default: b = 0;
9 }

```

In het voorbeeld worden de instructies achter de dubbele punt uitgevoerd als de variabele **a** gelijk is aan het getal achter het sleutelwoord **case**. Zoals te zien is, passen er meerdere instructies achter de dubbele punten. Het sleutelwoord **break** voorkomt dat alle volgende instructies (achter de opvolgende dubbele punten) worden uitgevoerd als er aan een van de voorwaarden is voldaan. Met het sleutelwoord **default** kan worden aangegeven wat er moet gebeuren als aan geen enkele voorwaarde is voldaan; dit is niet verplicht.

Herhalingsopdrachten

Er zijn twee verschillende constructies om code een aantal keren te herhalen. Een van deze constructies is de **while**-lus:

C, C++ en Java

```
while (i < 10) { i++; }
```

De while-lus voert de code tussen accolades uit, totdat aan de voorwaarde tussen haken is voldaan. Deze constructie kent ook nog de **do-while**-lus variant:

C, C++ en Java

```
do { i++; } while (i < 10)
```

Deze variant heeft als kenmerk dat de code eerst wordt uitgevoerd, voordat de voorwaarde wordt geëvalueerd. De code wordt dus in ieder geval één keer doorlopen.

Een tweede constructie is de **for**-lus:

C, C++ en Java

```
for (i = 0; i < 10; i++) { c = c * 2; }
```

Deze for-lus voert de code tussen accolades 10 keer uit. Dit wordt bewerkstelligd door de code tussen haken. 'i = 0' initialiseert variabele i op 0. Iedere keer dat de lus wordt doorlopen, wordt het statement 'i++' uitgevoerd (de variabele wordt met één opgehoogd). De for-lus wordt uitgevoerd totdat niet meer aan de voorwaarde 'i < 10' wordt voldaan.

Om een herhalings-lus vroegtijdig te onderbreken, kan het **break** statement gebruikt worden. Om direct naar de volgende iteratie van een herhalingsopdracht te springen gebruikt men het **continue** statement. Het gebruik van deze statements wordt door sommigen beschouwd als slordig programmeren.

Commentaar

Om overzichtelijk te programmeren worden programma's vaak voorzien van commentaar regels. Deze regels beschrijven wat er precies gebeurt. Commentaar toevoegen is een goede gewoonte, het maakt je programma leesbaar voor jezelf en voor anderen. Java kent twee verschillende manieren om commentaar toe te voegen. Een commentaarregel wordt ingevoegd door twee slashes (//)¹. Dit kan ook achter een instructie, maar hoeft niet:

```
C, C++ en Java
int a; // dit is commentaar over de declaratie van a
```

Om een heel commentaarblok toe te voegen, wordt het commentaar door /* en */ omgeven. Vaak wordt dit als volgt opgemaakt:

```
C, C++ en Java
1 /* Meerdere regels worden
2  * vaak als volgt opgemaakt.
3  * De meeste editors
4  * begrijpen dit ook.
5  */
```

Het programma **Javadoc** kan op basis van commentaarblokken in programma-code documentatie in HTML-formaat genereren. In deze commentaarblokken kunnen speciale tags worden opgenomen om bijvoorbeeld de parameters van een methode toe te lichten:

```
C, C++ en Java
1 /**
2  * Controleert of het mogelijk is om de auto bij de
3  * opgegeven garage in de gewenste kleur te spuiten.
4  * @param kleur De gewenste kleur
5  * @param garage De garage waar de auto gespoten moet worden
6  * @return Of het spuiten in de genoemde garage mogelijk is
7  * @author Piet Jansen
8  */
```

Dit commentaarblok moet boven de te documenteren methode worden gezet.

¹Commentaar d.m.v. twee slashes behoort officieel niet tot de ANSI-C standaard, maar wordt wel algemeen ondersteund.

Objectgeïntereerd programmeren

Objecten

In object georiënteerde talen, zoals C++ en Java, wordt er geprogrammeerd met **objecten**. Objecten zijn een verzameling van **attributen** en **methoden** (analoog aan variabelen en functies). Ieder object wordt beschreven door een **klasse**. In de klasse worden de attributen en methoden gedeclareerd en geïmplementeerd. Met de klasse kunnen vervolgens objecten gemaakt (geïntantieerd) worden met elk een eigen set attributen en methoden.

Java is volledig objectgeoriënteerd. Dit betekent dat alles binnen klassen moet worden geprogrammeerd. C++ is daarentegen niet volledig object georiënteerd en kan worden gezien als een objectuitbreiding van de sequentiële taal C. In C++ is het dus mogelijk om klassen en sequëntiele code (zonder de notie van een object) te combineren. Er zijn enige verschillen tussen sequentiël programmeren in C en in C++. Enkele verschillen hiervan zullen in de voorbeelden worden laten zien.

Klassen

Om een klasse te maken wordt het sleutelwoord **class** gebruikt.

C++ en Java

```

1 class MijnKlasse
2 {
3     ... body van de klasse ...
4 }
```

In de body van de klasse worden vervolgens de attributen en methoden gedeclareerd. In Java worden ze hier ook geïmplementeerd. In C++ vindt dit buiten de body plaats. C++ verwacht dan ook dat de methoden afzonderlijk worden gedeclareerd in de body, terwijl in Java de declaratie samen met de implementatie plaatsvindt. Dit is te zien in het volgende voorbeeld:

C++

```

1 class MijnKlasse
2 {
3     int mijnattribuut; // declareer een attribuut
4     void mijnMethode(); // declareer een methode
5 }
6
7 void MijnKlasse::mijnMethode() // implementatie vd methode
8 {
9     mijnattribuut = 5;
10 }
```

Java

```

1 class MijnKlasse
2 {
3     int mijnattribuut; // declareer een attribuut
4
5     void mijnMethode() // declareer en ...
6     {
7         mijnattribuut = 5; // implementeer de methode
8     }
9 }
```

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Constructors en destructors

Als er een nieuwe instantie van een klasse wordt gemaakt, wordt de **constructor** van het nieuwe object aangeroepen. Dit is een speciale methode, waarin de programmeur het object kan initialiseren. De constructor kan parameters hebben, maar nooit een terugkeerwaarde. In C++ en Java heeft de constructor dezelfde naam als de klasse. De constructor implementeer je als volgt:

```
C++  
1 class MijnKlasse  
2 {  
3     int a;  
4 }  
5  
6 MijnKlasse::MijnKlasse(int waarde)  
7 {  
8     a = 5;  
9 }
```

```
Java  
1 class MijnKlasse  
2 {  
3     int a;  
4  
5     MijnKlasse(int waarde)  
6     {  
7         a = 5;  
8     }  
9 }
```

In de constructor hierboven wordt het attribuut 'a' met de waarde 5 geïntialiseerd. Als tegenhanger van de constructor bestaat er in veel talen ook een **destructor**. C++ objecten beschikken over een destructor, Java objecten niet. De destructor wordt als een constructor gedeclareerd en geïmplementeerd, maar heeft geen parameters. De naam van de destructor is dezelfde als de klassennaam maar nu voorafgegaan door een tilde (~).

Objecten instantiëren

Om in Java een nieuwe instantiatie van een klasse te maken, moet er eerst een attribuut worden gemaakt, met als type de naam van de klasse (dit wordt in Java het **referentietype** genoemd). De nieuwe variabele kan worden gezien als een pointer (zie pag. 224) naar het object in het geheugen. Vervolgens moet een nieuw object worden gemaakt in het geheugen. Dit wordt gedaan met de operator **new**:

```
Java
1 Auto rodeauto;
2 rodeauto = new Auto("blauw");
```

Binnen de haken van **new** staat de constructor van de klasse: 'auto' met één parameter. In C++ bestaan twee manieren om een object te instantiëren: statisch door een variabele van het **objecttype** te declareren of dynamisch door een pointer naar een object te maken en vervolgens deze met de **new** operator te initialiseren:

```
C++
1 Auto rodeauto; // object direct geïnstantieerd
2
3 Auto* blauweauto; // pointer naar object
4 blauweauto = new Auto("blauw"); // nieuw object instantiëren
```

Dynamisch geïnstantieerde objecten zullen ook weer uit het geheugen moeten worden verwijderd. Java doet dit intern met een systeem dat *garbage collection* heet. C++ vereist dat de programmeur hier zelf zorg voor draagt. Dit gaat met de operator **delete**:

```
C++
1 Auto* blauweauto; // pointer naar object
2 blauweauto = new Auto("blauw"); // nieuw object instantiëren
3 delete blauweauto; // object verwijderen uit het geheugen
```

Denk eraan dat wanneer je met pointers of referentietypen werkt, een object niet zomaar kan worden gekopieerd. Immers, dit statement kopieert alleen de referentie naar `rodeauto`. Een wijziging van de attributen van `andereauto` verandert ook de attributen van `rodeauto` en andersom.

```
Java
Auto andereauto = rodeauto;
```

Om daadwerkelijk een tweede object te instantiëren met (initieel) dezelfde eigenschappen als het eerste object, bestaat er in Java voor elk object een methode **clone**. Deze methode retourneert een object met dezelfde eigenschappen. In dit voorbeeld wordt rodeauto gekloond:

```
Java
Auto andereauto = rodeauto.clone();
```

Beveiliging van attributen en methoden

Het is mogelijk om methoden en attributen af te schermen van andere klassen en subklassen. Hiervoor zijn een aantal sleutelwoorden belangrijk: **private**, **protected** en **public**.

Methoden en attributen die **private** zijn gedeclareerd, zijn alleen toegankelijk vanuit de klasse zelf. **Protected** methoden en attributen zijn vanuit de klasse en de subklassen (zie *Overerving en abstracte klassen*) toegankelijk. Methoden en attributen die **public** gedeclareerd zijn, zijn tevens toegankelijk als objectmethoden en attributen.

```
Java
1 class MijnKlasse
2 {
3     private int a; // toegankelijk in de klasse
4
5     public MijnKlasse(int waarde) // overal toegankelijk
6     {
7         a = 5;
8     }
9 }
```

Overerving en abstracte klassen

Het is mogelijk om een klasse te maken op basis van een andere klasse. Dit wordt overerving genoemd. De nieuwe klasse (**subklasse**) erft hierbij alle

attributen en methoden van de oorspronkelijke klasse (**superklasse**). Dit wordt als volgt gedaan:

```
C++
1 class MijnKlasse: public SuperKlasse
2 {
3     ... body van de klasse ...
4 }
```

```
Java
1 class MijnKlasse extends SuperKlasse
2 {
3     ... body van de klasse ...
4 }
```

In dit voorbeeld wordt een nieuwe klasse 'MijnKlasse' gemaakt, die ook alle attributen, constanten en methoden van de klasse 'SuperKlasse' bezit.

Zogeheten **abstracte klassen** maken dankbaar gebruik van dit systeem. Abstracte klassen bevatten methoden die wel gedeclareerd worden, maar die nog niet ingevuld zijn. Dit wordt overgelaten aan de sub-klassen. Omdat abstracte klassen niet compleet zijn, kunnen er dus ook geen objecten van geïnstantieerd worden.

Abstracte methoden declareren is eenvoudig in Java. Dit wordt gedaan met het woord **abstract**:

```
Java
abstract int mijnFunctie(int t, int a);
```

Hierbij wordt de implementatie geheel over gelaten aan de klassen die deze klasse als basis gebruiken (de subklassen). Het is daarom ook onmogelijk om objecten te instantiëren van een klasse met abstracte methoden. De klasse is simpelweg niet compleet. In C++ kunnen abstracte methoden worden gedefinieerd met het sleutelwoord **virtual**:

```
C++
virtual int mijnVirtueleFunctie(int t, int a) = 0;
```

Geërfde methoden en constructors overschrijven

Soms is het nuttig om een bepaalde methode of constructor van een superklasse opnieuw te implementeren of om er iets aan toe te voegen. In het geval van abstracte methoden is dit natuurlijk noodzakelijk. In Java wordt dit gedaan door een methode te schrijven die exact dezelfde naam en parameters heeft als de geërfde methode (dit noemt men een **override**). Om de originele methode uit te voeren kan het woord **super** gebruikt worden:

```
Java
1 int VoorbeeldMethode(int a)
2 {
3     super(a); // aanroepen oorspronkelijke methode
4
5     ... de rest van de methode ...
6 }
```

In C++ kan een functie alleen worden overschreven, wanneer deze in de superklasse is gedefinieerd als **virtual**:

```
C++
virtual void mijnVirtueleFunctie();
```

Om de functie vervolgens te overschrijven dient, net als in Java, een nieuwe functie met dezelfde naam en parameters gedeclareerd te worden.

Statische attributen, methoden en constanten

Java is vrijwel geheel object georiënteerd in tegenstelling tot talen zoals C++ en Delphi. Java biedt daarom geen mogelijkheid om functies en variabelen buiten een klasse te declareren. Ieder object krijgt dus zijn eigen kopie van de methoden en attributen mee. Er bestaan echter constanten, functies en variabelen die eigenlijk niks met een object te maken hebben. Een voorbeeld zou een functie zijn die twee gehele getallen als parameters heeft, deze twee getallen optelt en vervolgens het resultaat terug geeft. Zo'n functie oefent geen invloed uit op de attributen van een object. Daarom is het niet nodig dat ieder object een eigen kopie van deze functie heeft.

Een attribuut of methode die gedeeld wordt door alle instanties (objecten van dezelfde klasse), worden statisch genoemd. Deze worden gedeclareerd met als toevoeging het woord **static**:

C++ en Java

```
1 static int b;           // gedeeld attribuut
2 static MijnFunctie; // gedeelde functie
```

Het gebruiken van statische methoden en attributen gaat in Java op andere wijze dan in C++. In Java wordt aan een statische methode of attribuut gerefereerd met behulp van de klassennaam. In C++ kan dit zowel met de klassennaam als met een objectnaam:

C++

```
1 MijnKlasse mijnobject; // declaratie van object, referentie
2 MijnKlasse::mijnStatischeMethode(); // ... met klassennaam
3 mijnobject.mijnStatischeMethode(); // ... met objectnaam
```

Java

```
1 MijnKlasse.mijnStatischeMethode(); // ... met klassennaam
```

Overloading

Soms is het prettig wanneer er meerdere kopieën van dezelfde methode bestaan, die met verschillende parameters kunnen omgaan. Dit heet **overloading**. In Java en C++ wordt dit gedaan door simpelweg een methode met dezelfde naam te maken, met verschillende parameters. De compiler bepaalt op basis van de parameters die met een aanroep worden meegegeven welke kopie van de functie de programmeur bedoelt. Methoden overladen met verschillende terugkeerwaarden, maar met dezelfde parameters, is in deze talen niet mogelijk.

Typen en operatoren

Primitieve typen in Java

Gehele getallen (integers)

Type	Bereik	Bits
byte	-128...127	8
short	-32768...32767	16
int	-2e9...2e9	32
long	-2e18...2e18	64
boolean	true/false	1

Decimale getallen (floating point)

Type	Bereik	Bits
float	-3.4e38...3.4e38	32
double	-3.4e38...3.4e38	64

Primitieve typen in C en C++

Gehele getallen (integers)

Type	Bereik	Bits
char	-128...127	8
unsigned char	0...255	8
short	-32767...32767	16
unsigned short	0...65535	16
long	-4e9...4e9	32
unsigned long	0...8e9	32
long long	-9e18...9e18	64
unsigned long long	0...2e19	64

Decimale getallen (floating-point)

Type	Bereik	Bits
float	-3.4e38...3.4e38	32
double	-3.4e38...3.4e38	64

Operatoren in Java, C en C++

Arithmetische operatoren

Operator	Functie	Syntax
+	Geeft het resultaat van a plus b	$a + b$
-	Geeft het resultaat van a minus b	$a - b$
*	Geeft het resultaat van a maal b	$a * b$
/	Geeft het resultaat van a gedeeld door b	a / b
%	Geeft de rest van a gedeeld door b	$a \% b$
++	Geeft a terug en verhoogt a vervolgens met n (post-increment)	$a++$
++	Verhoogt a met één en geeft vervolgens a terug (pre-increment)	$++a$
--	Geeft a terug en verlaagt a vervolgens met n (post-decrement)	$a--$
--	Verlaagt a met één en geeft vervolgens a terug (pre-decrement)	$--a$
~	Het 1-complement van a	$\sim a$
-	Het 2-complement van a (negatief)	$-a$

Logische operatoren

Operator	Functie	Syntax
&&	EN: Geeft TRUE, als a en b TRUE zijn	$a \&\& b$
	OR: Geeft TRUE, als a of b TRUE is	$a \ \ b$
!	NOT: Geeft TRUE als a FALSE is	$!a$
==	Geeft TRUE als a gelijk is aan b	$a == b$
>	Geeft TRUE als a groter is dan b	$a > b$
<	Geeft TRUE als a kleiner is dan b	$a < b$
>=	Geeft TRUE als a groter dan of gelijk is aan b	$a >= b$
<=	Geeft TRUE als a kleiner dan of gelijk is aan b	$a <= b$
!=	Geeft TRUE als a ongelijk is aan b	$a != b$

In C en C++ en de meeste andere programmeertalen wordt FALSE voorgesteld door een 0, alle andere waarden zijn TRUE. In Java bestaan alleen de waarden **true** en **false** (genoteerd in kleine letters).

Bitwise operatoren (vergelijkt bits tussen variabelen of getallen)		
Operator	Functie	Syntax
&	EN: Geeft waarde met alle hoge bits die a en b gemeenschappelijk hebben	$a \& b$
	OR: Geeft waarde met alle hoge bits van a en b gecombineerd	$a b$
^	XOR: Geeft waarde met alle hoge bits die of a , of b heeft, maar niet beide	$a \wedge b$
>> (C)	Schuift bits van a , b plaatsen naar rechts (vult op met nullen)	$a \gg b$
>> (Java)	Schuift bits van a , b plaatsen naar rechts (vult op met de waarde van het hoogste bit van a)	$a \gg b$
>>> (Java)	Schuift bits van a , b plaatsen naar rechts (vult op met nullen)	$a \ggg b$
<<	Schuift bits van a , b plaatsen naar links (vult op met nullen)	$a \ll b$

Zie voor meer informatie over binaire operaties pagina 126.

De printf() functie

Om tekst op het scherm te printen, zijn vaak lange en ingewikkelde constructies nodig, die het overzicht in een programma niet ten goede komen. Om dit probleem te omzeilen is een speciale functie geschreven in C: de `printf()` functie. Deze functie zet een regel tekst op het scherm, gebaseerd op een format-string. Een format string is een gewone string die opmaakinformatie vertegenwoordigt. Deze opmaakinformatie wordt vooraf gegaan door een dollarteken(\$). Elk stukje opmaakinformatie voegt gegevens van een bepaald type in. De syntax van de `printf` functie is:

```
C
printf("format-string", param1, param2, ... );
```

Een voorbeeld van het gebruik van `printf()` is het volgende:

```
C++
1 int mijnleeftijd = 18;
2 printf("Ik ben %d jaar. Jij bent %d jaar. \n",
3       mijnleeftijd,21);
```

```
Resultaat
1 Ik ben 18 jaar. Jij bent 26 jaar.
2
```

De twee parameters 'mijnleeftijd' en '26' zijn in de format-string ingevuld op de plekken van de '%d'. Verder wordt het resultaat afgesloten met een *newline* '\n' Iedere opmaakcode voegt de volgende parameter in. Een opmaakcode heeft de volgende syntax (alles tussen blokhaken is optioneel):

```
%[vlaggen][breedte][.precisie][typecast] type
```

Zoals je ziet is het 'type' het enige verplichte onderdeel van de opmaakcode, dit bestaat uit één letter. Het type geeft aan wat voor soort parameter het betreft en hoe deze moet worden afgebeeld.

Typen voor printf()

Type	Betekenis	Voorbeeld
c	Karakter	a
d	Geheel getal met teken	392
i	Geheel getal met teken	392
u	Geheel getal zonder teken	7235
o	Octaal getal met teken	610
x	Hexadecimaal getal zonder teken (kleine letters)	7fa
X	Hexadecimaal getal zonder teken (hoofdletters)	7FA
f	Kommagetal	392.65
e	Kommagetal in wetenschappelijke notatie met kleine e	3.9265e2
E	Kommagetal in wetenschappelijke notatie met grote E	3.9265E2
g	Normale of wetenschappelijke notatie met kleine e (automatisch)	392.65
G	Normale of wetenschappelijke notatie met grote E (automatisch)	392.65
s	String	voorbeeld
p	Pointer	B800:0000

Voor het type komt de typecast. Door de typecast wordt het argument eerst omgezet naar een ander type voordat deze wordt ingevuld.

Typecasts voor printf()

Param. type	Betekenis
h	Typecast naar een short int (voor integers)
l	Typecast naar een long int (voor integers) of een double (voor kommagetallen)
L	Typecast naar een long double (kommagetallen)

De precisie heeft invloed op het aantal afgebeelde karakters en wordt gevormd door een punt ('.') met daarachter een getal. Voor de verschillende typen, heeft de precisie een andere werking. In de volgende tabel is deze werking weergegeven:

Precisie	
Type	Betekenis van het precisiegetal
d, i, o, u, x, X	Het minimum aantal afgebeelde cijfers
e, E, f	Het aantal cijfers achter de komma
g, G	Het maximum aantal afgebeelde significante cijfers
s	Het maximum aantal afgebeelde karakters
c	Geen effect

De breedte heeft, net als de precisie, invloed op het afgebeelde karakters, maar op een andere manier.

Precisie	
Breedte	Betekenis van het precisiegetal
<i>getal</i>	Het minimum aantal afgebeelde cijfers (als het getal korter is, wordt er opgevuld met spaties)
0 <i>getal</i>	Het minimum aantal afgebeelde cijfers (als het getal korter is, wordt er opgevuld met nullen)
*	Het aantal cijfers wordt bepaald door een extra integer parameter, voorafgaand aan de echte parameter

Met de vlaggen kunnen nog enkele zaken met betrekking tot de tekens voor de getallen worden opgegeven:

Vlaggen	
Vlag	Betekenis
-	De gegevens worden links uitgelijnd in plaats van rechts
+	Als het getal positief is, wordt er een '+' voor voorgezet
#	Bij typen o, x en X wordt er respectievelijk 0, 0x, 0X voorgezet Bij typen g, G, e, E en F wordt een decimale punt geforceerd
<i>spatie</i>	Als het getal positief is, wordt er een spatie voorgezet

Een voorbeeld van een volledige opmaakcode is de volgende:

```
C
printf("Dit is een getal: %+10.2e", 380.547);
Resultaat
Dit is een getal: +3.81e2
```

Hoofdstuk 4 Fysica

Inhoudsopgave

Klassieke mechanica	244
Snelheid en versnelling	244
Axioma's van Newton	244
Gravitatiekrachten	245
Impulsmoment	246
Krachtmoment	246
Arbeid	246
Energie	247
Behoudswetten	248
Rotaties	248
Samenvatting	252
Beperkingen	252
Elektrostatica	253
Ladingen	253
Elektrisch veld	254
Divergentie en rotatie	255
Elektrische potentiaal	256
Arbeid en energie	260
Geleiders en Isolatoren	261
Capaciteiten	262
Elektrodynamica	265
Symbolen	265
De Maxwell vergelijkingen	267
Maxwell en randvoorwaarden	267
Behoud van lading, energie en moment	270
Elektromagnetische Golven	271
Potentialen en velden	277
Halfgeleiders	280
Halfgeleiderfysica	281
Diodes	284
Bipolaire junctie transistor	285
MOSFET	291
Fotodiodes	294

De fotodiode	294
De wisselwerking van licht en materie	294
Stroombron	294
De diode als fotocel	294
De fotostroom	297
Optimalisatie van de fotodiode	299
I-V curve van de fotodiode	299
P-V curve van de fotodiode	300
Niet ideale fotodiode	300
Elektrische energietechniek	302
Inleiding	302
Gelijk- en wisselstroomoverdrachten	302
Magnetische circuits	303
Transformatoren	304
Vermogenslektronica	307

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Klassieke mechanica

De klassieke mechanica bestaat uit een verzameling van axioma's, definities en behoudswetten die het mogelijk maakt om de beweging van lichamen te beschrijven. Hieronder vallen de statica en sterkteleer, de kinematica en de dynamica.

Snelheid en versnelling

De beweging van een (puntvormig) lichaam in de driedimensionale Euclidische ruimte kan symbolisch worden weergegeven als de tijdsafhankelijke **positie**(-vector) $\vec{r}(t)$ van dat lichaam. Door de afgeleide van de positie naar de tijd te nemen wordt de **snelheid** \vec{v} gevonden:

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad (4.1)$$

Wanneer de snelheid wordt gedifferentieerd naar de tijd, vinden we de snelheidsverandering per tijdseenheid, oftewel de **versnelling**, symbool \vec{a} :

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad (4.2)$$

Een lichaam dat zich op $t = 0$ in \vec{r}_0 bevindt en beweegt met een snelheid \vec{v}_0 (eenparige beweging) zal zich op tijdstip t bevinden in:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t \quad (4.3)$$

Een lichaam dat zich op $t = 0$ in \vec{r}_0 bevindt en beweegt met een snelheid \vec{v}_0 en een versnelling \vec{a} ondergaat (eenparig versnelde beweging) zal zich op tijdstip t bevinden in:

$$\vec{r}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2} \vec{a} t^2 \quad (4.4)$$

Formules (4.3) en (4.4) zijn eenvoudig te vinden door integratie van (4.1) en (4.2).

Axioma's van Newton

De drie axioma's van Newton¹, omvattende het werk van onder andere Galilei², geven het fundament voor de klassieke mechanica. Het eerste axioma van

¹Isaac Newton (1643 - 1727)

²Galileo Galilei (1564 - 1642)

Newton zegt dat een lichaam geen snelheidsverandering (lengte of richting) ondergaat als er geen kracht op werkt:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \quad (4.5)$$

Het opstellen van het tweede axioma vormde een doorbraak ten opzichte van het gedachtegoed van Aristoteles. Het zegt dat een lichaam slechts een verandering van snelheid ondergaat als op dat lichaam een netto kracht (enkelvoudig of als resultante van meerdere krachten) werkt. In formule:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{dm\vec{v}}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt} = m\vec{a} + \vec{v} \frac{dm}{dt} \quad (4.6)$$

De vector \vec{p} wordt impuls genoemd en sluit goed aan bij onze intuïtieve waarneming dat objecten met grotere massa ook meer kracht vergen om een snelheidsverandering te bewerkstelligen. Merk op dat een versnelling kan worden bereikt door een kracht of door uitwisseling van massa.

Het derde axioma van Newton vertelt ons dat de krachtwerking tussen twee objecten wederkerig is. In formule:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \quad (4.7)$$

De kracht die object j op object i uitoefent (\vec{F}_{ij}) is dus even groot en tegengesteld gericht aan de kracht die object i op object j uitoefent ($-\vec{F}_{ji}$).

Gravitatiekrachten

Een grote bijdrage die Newton aan de klassieke mechanica heeft gegeven, is de formulering van de gravitatiekrachten zoals die optreden tussen twee (of meer) massa's. De onderlinge gravitatiekrachten zijn evenredig met het product van beide massa's en de **gravitatieconstante** G ($6,6710^{-11} \text{ Nm}^2 \text{ kg}^{-2}$) en omgekeerd met de onderlinge afstand tussen de twee massa's. Een elegante formule die zowel richting als grootte aangeeft is:

$$\vec{F}_{ij} = G \frac{m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) = -\vec{F}_{ji} \quad (4.8)$$

Waarbij \vec{r}_i en \vec{r}_j de positievectoren van de (massamiddelpunten) van respectievelijk lichaam i en j zijn en G de gravitatieconstante is. De tweede gelijkheid volgt direct uit het derde axioma van Newton maar ook door het omwisselen van de rollen van massa i en j . Op het aardoppervlak is de zwaartekracht

in goede benadering gelijk aan mg , met m de massa van een object en g de **valversnelling**. Die is, afhankelijk van de plaats op de aarde, tussen de 9,780 en 9,807 m s^{-2} . Op grote hoogte boven het aardoppervlak geldt dit echter niet meer maar zal (4.8) moeten worden gebruikt.

Impulsmoment

Een zeer belangrijke grootheid in de fysica is het **impulsmoment**. Dit heeft niet alleen in de klassieke mechanica betekenis, maar ook in de kwantummechanica. Mathematisch ziet het impulsmoment er als volgt uit:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \quad (4.9)$$

Vanwege het uitproduct staat \vec{L} loodrecht op zowel \vec{r} als \vec{p} . De waarde van \vec{L} reduceert tot nul als \vec{r} en \vec{p} parallel zijn.

Krachtsmoment

Het **krachtsmoment** is gedefinieerd als het uitproduct van een kracht en de positievector waar de kracht op een lichaam aangrijpt.

$$\vec{T} = \vec{r} \times \vec{F} = \frac{\partial \vec{L}}{\partial t} \quad (4.10)$$

De tweede gelijkheid kan eenvoudig worden gevonden door de tijdsafgeleide te nemen van (4.9) en het tweede axioma van Newton te gebruiken.

Arbeid

Er wordt **arbeid** verricht op een object indien er een kracht op werkt en die kracht een verplaatsing bewerkstelligt in de richting van (een component van) die kracht. Deze definitie in formule vorm:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}(\mathbf{x}) \cdot d\vec{r} \quad (4.11)$$

Let op: volgens deze definitie wordt er geen arbeid geleverd op het lichaam indien er geen verplaatsing is of indien de kracht loodrecht op de verplaatsing van het lichaam staat.

Energie

In de mechanica is **energie** een grootheid, die aangeeft hoeveel arbeid er in het verleden op een lichaam is uitgeoefend indien dit lichaam geen verliezen ondervindt. In andere woorden: energie is opgeslagen arbeid.

Kinetische energie

Wanneer er arbeid wordt geleverd op een lichaam is het mogelijk dat dit gaat versnellen. De op het lichaam verrichte arbeid zorgt er dan voor dat het lichaam een zekere **kinetische energie** (verandering) krijgt.

$$E_{\text{kin}} = \int_0^{\vec{r}_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\vec{r}_2} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot d\vec{r} = \int_0^{t_2} \frac{d\vec{p}}{dt} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} dt = \frac{1}{m} \int_0^{\vec{p}_2} \vec{p} \cdot d\vec{p} = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \quad (4.12)$$

Potentiële energie

Naast kinetische energie kan een lichaam ook **potentiële energie** krijgen. Dit kan bijvoorbeeld doordat het lichaam wordt opgeheven in een gravitatieveld, wat leidt tot een potentiële energie:

$$E_{\text{pot}} = \int_0^h \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} = \int_0^h mg dx = mgh \quad (4.13)$$

Maar ook door met een kracht een elastisch element te vervormen kan potentiële energie worden opgeslagen. Een ideale veer gedraagt zich volgens de **wet van Hooke**:

$$F = Kx \quad (4.14)$$

Hierin heet K de **veerconstante** en is de positieve oriëntatie van F zo gedefinieerd dat F de kracht is die op de veer moet worden uitgeoefend om een indrukking x te verkrijgen. In sommige mechanica-tekstboeken wordt deze formulering gecombineerd met actie = -reactie tot reactie = $-Kx$; in dat geval is F de kracht die degene die indrukt ervaart als tegenwerkende kracht.

De opgeslagen energie bij een zekere indrukking x wordt gegeven door:

$$E_{\text{pot}} = \int_0^x \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\vec{r} = \int_0^x F_{\text{ext}} dx' = - \int_0^x F_{\text{int}} dx' = \int_0^x Kx' dx' = \frac{1}{2} Kx^2 \quad (4.15)$$

Mechanische energie

De totale mechanische energie is de som van potentiële en kinetische energie:

$$E_{\text{tot}} = E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}} \quad (4.16)$$

Behoudswetten

Wanneer een verzameling lichamen onderlinge interacties heeft, maar niet onderhevig is aan externe krachten, dan gelden behoudswetten voor de totale impuls, het totale impulsmoment en de totale mechanische energie.

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i \vec{\mathbf{p}}_i \right) = 0 \quad (4.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i \vec{\mathbf{L}}_i \right) = 0 \quad (4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_{\text{tot}} = \frac{\partial}{\partial t} (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = 0 \quad (4.19)$$

Merk op dat de totale impuls ($\vec{\mathbf{p}}_{\text{tot}}$) en het totale impulsmoment ($\vec{\mathbf{L}}_{\text{tot}}$) vectoriële sommen zijn. De behoudswetten kunnen direct worden afgeleid uit de eerdere gegeven definities en axioma's.

Rotaties

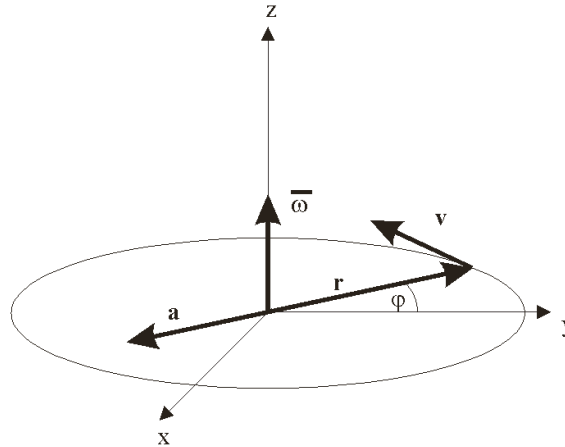
Een belangrijke klasse van bewegingen zijn de rotaties. Alles wat hierboven genoemd is, kan expliciet voor rotaties worden uitgeschreven.

Baansnelheid

Een eenvoudige notatie wordt hierbij verkregen indien de rotatie wordt gedefinieerd door de volgende uitdrukking:

$$\vec{\mathbf{v}} = \vec{\omega} \times \vec{\mathbf{r}} \quad (4.20)$$

Hierbij is $\vec{\mathbf{v}}$ de (baan-)snelheid van het roterend lichaam, $\vec{\mathbf{r}}$ is de positie vector van de rotatie as tot het roterend lichaam en $\vec{\omega}$ is een vector die in grootte overeenkomt met de rotatiesnelheid en in richting loodrecht staat op het vlak van rotatie (zie figuur). Merk op dat de positie niet gegeven is met deze uitdrukking.



Versnelling

Door differentiatie naar de tijd van (4.20) wordt de versnelling gevonden (bij constante $\bar{\omega}$):

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(\bar{\omega} \times \vec{r})}{dt} = \bar{\omega} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \bar{\omega} \times \vec{v} = \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}) \quad (4.21)$$

Impulsmoment

Het impulsmoment van een roterend lichaam vinden we door gebruik te maken van (4.20) en (4.9):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m \{ \vec{r} \times (\bar{\omega} \times \vec{r}) \} = m \{ \bar{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \underbrace{\vec{r}(\bar{\omega} \cdot \vec{r})}_{=0} \} = \bar{\omega} (m\vec{r}^2) \quad (4.22)$$

Merk op dat de laatste stap alleen gemaakt mag worden als er geen sprake is van een precessie beweging ($\bar{\omega}$ en \vec{r} staan loodrecht op elkaar, het inproduct bedraagt dus 0).

Massatraagheidsmoment

Het impulsmoment volgens (4.22) kan ook anders worden geschreven:

$$\vec{L} = m \{ \bar{\omega}(\vec{r} \cdot \vec{r}) - \vec{r}(\bar{\omega} \cdot \vec{r}) \} = \mathbf{I}\bar{\omega} \quad (4.23)$$

De grootheid I is een tensor. Deze reduceert naar een constante maal de eenheidsmatrix indien de rotatie-as recht door een symmetrie as van het lichaam loopt. In dat geval is het **massatraagheidsmoment** van een roterende massa te schrijven als:

$$I = m |\vec{r}|^2 \quad (4.24)$$

Voor een stelsel van roterende massa's of van een verdeelde massa wordt het massatraagheidsmoment respectievelijk gegeven door:

$$I = \sum_i m_i |\vec{r}_i|^2 \quad \text{of} \quad I = \int_V \rho \vec{r}^2 dV \quad (4.25)$$

Waarbij ρ de massadichtheid is (kg m^{-3}) en \vec{r} de positievector van de rotatie-as tot aan het massa-elementje ρdV en waarbij de integraal genomen wordt over het totaal roterend volume V . Voor een roterende bol is $I = 2/5 m R^2$ terwijl voor een cilinder geldt: $I = 1/2 m R^2$.

Kinetische energie

De kinetische co-energie¹ van (een stelsel van) roterende massa('s) vinden we met de eerder gevonden uitdrukkingen voor kinetische co-energie en baan-snelheid (onder dezelfde voorwaarde als de laatste stap van (4.22)):

$$E_{\text{kin}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i \vec{v}_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)^2 = \frac{1}{2} \vec{\omega}^2 \sum_i m_i \vec{r}_i^2 = \frac{1}{2} \omega^2 I \quad (4.26)$$

De laatste uitdrukking geldt ook voor een continue massaverdeling met I zoals gegeven in (4.25).

Coriolisversnelling

De **Coriolisversnelling**² is een rotatie-traagheidseffect dat optreedt wanneer in een roterend systeem de afstand van een massa ten opzichte van de rotatie-as verandert. Deze versnelling wordt gegeven door:

$$\vec{a}_{\text{cor}} = -2\vec{\omega} \times \vec{v}_{//} \quad (4.27)$$

Waarbij $\vec{v}_{//}$ de radiële snelheid is en \vec{a}_{cor} de Coriolisversnelling die gericht is langs de baan. Een voorbeeld waarin Coriolisversnelling optreedt is een schaatser die een pirouette draait en zijn armen intrekt.

¹In de klassieke mechanica is dit *in waarde* gelijk aan de kinetische energie, waar geldt $\vec{p} = m\vec{v}$.

²naar Gustave-Gaspard Coriolis (1792 - 1843)

Analogie translaties en rotaties

Bij beschouwing van rotaties en translaties valt het op dat er een grote analogie is tussen beide, geïllustreerd in onderstaande tabel. Let op: waar massa constant is voor translaties, daar hangt het massastraagheidsmoment van een roterende massa af van de positie en richting van de rotatie-as.

translatie		rotatie	
Massa	m	Massastraagheidsmoment	I
Positie	\mathbf{r}	Hoekvector	$\bar{\varphi}$
Snelheid	$\vec{\mathbf{v}} = \frac{d\vec{\mathbf{r}}}{dt}$	Hoeksnelheid	$\bar{\omega} = \frac{d\bar{\varphi}}{dt}$
Versnelling	$\vec{\mathbf{a}} = \frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2}$	Hoekversnelling	$\vec{\alpha} = \frac{d^2\bar{\varphi}}{dt^2}$
Impuls	$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}$	Impulsmoment	$\vec{\mathbf{L}} = I\bar{\omega}$
Kracht	$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$	Koppel	$\vec{\mathbf{T}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$
Actie= -reactie	$\vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} = -\vec{\mathbf{F}}_{\text{int}}$	Actie= -reactie	$\vec{\mathbf{T}}_{\text{ext}} = -\vec{\mathbf{T}}_{\text{int}}$
Arbeid	$dA = \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$	Arbeid	$dA = \vec{\mathbf{T}} \cdot d\bar{\varphi}$
Kinetische energie	$E_{\text{kin}} = \frac{p^2}{2m}$	Kinetische energie	$E_{\text{kin}} = \frac{L^2}{2I}$
	$dE_{\text{kin}} = \frac{\vec{\mathbf{p}}}{m} \cdot d\vec{\mathbf{p}} - \frac{\vec{\mathbf{p}}^2}{2m^2} dm$		$dE_{\text{kin}} = \frac{\vec{\mathbf{L}}}{I} \cdot d\vec{\mathbf{p}} - \frac{\vec{\mathbf{L}}^2}{2I^2} dI$
	$\stackrel{\dagger}{=} \vec{\mathbf{v}} d\vec{\mathbf{p}} = \vec{\mathbf{p}} d\vec{\mathbf{v}}$		$\stackrel{\dagger}{=} \bar{\omega} d\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{L}} d\bar{\omega}$
	$dE_{\text{pot}} = -\vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{F}}_{\text{ext}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$		$dE_{\text{pot}} = -\vec{\mathbf{T}} \cdot d\bar{\varphi} = \vec{\mathbf{T}}_{\text{ext}} \cdot d\bar{\varphi}$
Kinetische co-energie	$E_{\text{kin}}^* = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetische co-energie	$E_{\text{kin}}^* = \frac{1}{2}I\omega^2$

[†] Alleen bij gelijkblijvende massa.

De kinetische **co-energie** is onder bepaalde omstandigheden *in waarde* gelijk aan de kinetische energie (bij een lineaire constitutieve relatie). In het algemeen geldt dit echter niet, alleen de kinetische energie is dan de behouden grootheid.

Samenvatting

Het bouwwerk van de klassieke mechanica zoals hierboven beschreven kan in een korte tabel worden samengevat.

Axioma's	Definities	Behoudswetten
$\vec{\mathbf{p}} = m\vec{\mathbf{v}}^\dagger$	$\vec{\mathbf{L}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{p}}$	$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i \vec{\mathbf{p}}_i \right) = 0$
$\vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{p}}}{dt}$	$\vec{\mathbf{T}} = \vec{\mathbf{r}} \times \vec{\mathbf{F}} = \frac{d\vec{\mathbf{L}}}{dt}$	$\frac{\partial}{\partial t} \left(\sum_i \vec{\mathbf{L}}_i \right) = 0$
$\vec{\mathbf{F}}_{ij} = -\vec{\mathbf{F}}_{ji}$	$A = \int_{\vec{\mathbf{r}}_1}^{\vec{\mathbf{r}}_2} \vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{r}}) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = dE$	$\frac{\partial}{\partial t} (E_{\text{tot}}) = \frac{\partial}{\partial t} (E_{\text{kin}} + E_{\text{pot}}) = 0$

[†] Geldt alleen in het niet-relativistische geval.

Beperkingen

De klassieke mechanica is "in het dagelijkse leven" goed in staat de verschijnselen zoals wij die waarnemen te beschrijven. Echter, het vindt zijn beperkingen in twee situaties. De ene is wanneer we te maken hebben met zeer kleine impulsen, zoals deze bijvoorbeeld optreden voor atomaire deeltjes. In dit geval moet kwantummechanica worden toegepast. Het andere geval is wanneer er hoge snelheden (relatief ten opzichte van de lichtsnelheid) zijn; dan moet de relativiteitstheorie worden gebruikt.

Elektrostatica

Ladingen

Eigenschappen

In het vakgebied **elektrostatica** wordt bestudeerd wat het effect is van een aantal bronladingen q_1, q_2, q_3, \dots op een zekere testlading Q . Ladingen bezitten de volgende drie eigenschappen:

1. Lading bestaat in twee soorten die positief en negatief zijn genoemd. De beide types neigen ernaar elkaars effect teniet te doen en komen in de natuur in exact gelijke hoeveelheid voor.
2. Lading is behouden:
 - De totale hoeveelheid lading in het universum is constant: *globaal* ladingsbehoud.
 - Als lading op plaats A verdwijnt om op plaats B te verschijnen, moet de lading een ondoorbroken weg van A naar B hebben afgelegd: *lokaal* ladingsbehoud.
3. Lading komt voor in discrete hoeveelheden $n \cdot e | n \in \mathbb{Z}$, waarbij e de lading van het proton representeert. Uitzondering hierop vormen subatomaire deeltjes: quarks die een lading van $\pm \frac{1}{3}$ of $\pm \frac{2}{3}$ kunnen hebben.

Puntladingen

Het belangrijkste gereedschap in de oplossing van een elektrostaticsch vraagstuk is het **superpositiebeginsel**: De totale kracht op de testlading is de (vector-) som van de krachten ten gevolge van alle bronladingen, wanneer telkens alle overige bronnen buiten beschouwing worden gelaten. In principe hangt deze kracht zowel van de relatieve positie als van de beweging van de ladingen af, maar in de elektrostatica worden alleen stilstaande ladingen beschouwd. In deze situatie geldt de **wet van Coulomb**, zoals weergegeven in vergelijking 4.28. Hierin is \vec{F} de kracht in N, ϵ_0 de elektrische **permittiviteit** van het vacuüm in $\frac{C^2}{N \cdot m^2}$, q en Q de bron- en testladingen in Coulomb en r de afstand in meters. \hat{r} is de **afstandsvector** van \vec{r}' (de plaats van q) tot \vec{r} (de plaats van Q), zie ook vergelijking 4.29. r is de grootte en \hat{r} de richting (eenheidsvector) van de afstandsvector. De wet van Coulomb wordt in veel

literatuur gerepresenteerd volgens vergelijking 4.30 of 4.31, respectievelijk in het **Gaussische** en het **Heaviside-Lorentz eenhedenstelsel**. Dit verschil ontstaat doordat in deze stelsels de grondeenheden zo gekozen zijn, dat de elektrische permittiviteit hierin respectievelijk door het getal $\frac{1}{4\pi}$ en het getal 1 wordt gerepresenteerd. Het wegvallen van de eenheid van deze grootheid maakt direct duidelijk dat in dit stelsel grootheden in andere dimensies worden weergegeven dan het SI. Tabel 4.1 op pagina 263 geeft een overzicht van de omrekeningsfactoren. Tabel 4.2 toont een aantal formules in het gaussische stelsel. Het gebruik van deze eenhedenstelsels is vanwege de eenvoudige verschijningsvorm van een aantal elektromagnetische formules binnen dit vakgebied niet verdrongen door het SI. Het heeft echter als nadeel dat in een groot aantal andere formules merkwaardige factoren verschijnen, zoals π in expressies die niets met bollen of cirkels te maken hebben.

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q \cdot Q \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \text{ (SI)} \quad (4.28)$$

$$\hat{\mathbf{r}} = \vec{\mathbf{r}} - \vec{\mathbf{r}}' \quad (4.29)$$

$$\vec{F} = \frac{q \cdot Q \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \text{ (Gaussisch)} \quad (4.30)$$

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi} \frac{q \cdot Q \hat{\mathbf{r}}}{r^2} \text{ (Heaviside-Lorentz)} \quad (4.31)$$

Elektrisch veld

Wanneer er sprake is van een situatie met n bronladingen geldt:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2} = Q \cdot \vec{E} \quad (4.32)$$

$$\text{met } \vec{E}(\vec{\mathbf{r}}) \equiv \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i \hat{\mathbf{r}}_i}{r_i^2} \quad (4.33)$$

Het elektrische veld is een functie van een zeker punt in de ruimte met positievector $\vec{\mathbf{r}}$, maar refereert niet aan een specifieke testlading. $\vec{E}(\vec{\mathbf{r}})$ is de kracht per eenheid lading die uitgeoefend zou worden op een testlading, als deze op de met $\vec{\mathbf{r}}$ aangeduide positie geplaatst zou worden. $\vec{E}(\vec{\mathbf{r}})$ is altijd discontinu op punten waar zich lading bevindt en continu op alle andere plaatsen in de ruimte.

Continue ladingsverdelingen

Wanneer er sprake is van een groot aantal ladingen, is het mogelijk deze te beschouwen als een continue **ladingsverdeling**. Voor lading die gelijkmatig verdeeld is over respectievelijk een willekeurig gebied, een lijn, een oppervlak of een volume, wordt vergelijking 4.32 een integraal, zoals weergegeven in de vergelijkingen 4.34 tot en met 4.37. Soms wordt aan vergelijking 4.37 gerefereerd als de **wet van Coulomb**, omdat het maar een kleine stap is vanaf de originele formule en een ladingsverdeling over een volume de meest algemene en realistische beschrijving geeft. Let op: $\hat{\mathbf{r}}$ is géén constante en kan derhalve niet buiten de integraal gehaald worden. Wanneer men de formules echter omschrijft in carthesische coördinaten, kunnen $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{y}}$ en $\hat{\mathbf{z}}$ wél buiten de integraal worden gebracht.

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dq \quad (4.34)$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_p \frac{\lambda(\vec{\mathbf{r}}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} dl' \quad (4.35)$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{\mathbf{r}}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} da' \quad (4.36)$$

$$\vec{\mathbf{E}}(\vec{\mathbf{r}}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{\mathbf{r}}')}{r^2} \hat{\mathbf{r}} d\tau' \quad (4.37)$$

Divergentie en rotatie

In principe is vergelijking 4.37 een multitoel waarmee alle problemen in de elektrostatica kunnen worden opgelost. Helaas levert dit vaak in eenvoudige situaties al ingewikkelde integralen op. De rest van de theorie binnen dit vakgebied is erop gericht een gereedschapskist te leveren om deze integralen te omzeilen.

Wet van Gauss

In gevallen waarin sferische-, cilindrische- of oppervlaktesymmetrie aanwezig is, levert de **wet van Gauss** verreweg de eenvoudigste manier om elektrische velden te berekenen. De vergelijkingen 4.38 en 4.39 geven respectievelijk de integraal- en de differentiaalvorm van deze differentiaalvergelijking. In

woorden: De hoeveelheid lading binnen een gesloten oppervlak is recht evenredig met de integraal van het elektrisch veld over dat oppervlak en de divergentie van het elektrisch veld op een zeker punt in de ruimte is recht evenredig met de ladingsdichtheid op datzelfde punt. De beide vergelijkingen volgen uit elkaar en zijn tevens direct af te leiden uit de wet van Coulomb.

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{a} = \frac{Q_{in}}{\epsilon_0} \quad (4.38)$$

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{r}) = \frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} \quad (4.39)$$

Afhankelijk van het type symmetrie dient als Gaussisch oppervlak een bol, een oneindig lange cylinder of een oneindig groot vlak gekozen te worden. In gevallen waarin het gebied, waarbinnen de lading verdeeld is, relatief één van de drie symmetrieën benaderd (een lange cylinder, een groot vlak), kan de stelling van Gauss gebruikt worden om het elektrisch veld te benaderen. Middels het substitutiebeginsel kunnen ook velden van ladingsverdelingen, die zijn samengesteld uit afzonderlijk symmetrische delen met de stelling van Gauss worden berekend, ook al is het geheel niet symmetrisch.

Stelling van Stokes

Door middel van de **stelling van Stokes** (eerste is-teken) en de wet van Gauss (tweede is-teken) kan bewezen worden dat voor het elektrisch veld van een puntlading stelling 4.40 geldt: de rotatie van een elektrostatic veld is 0. Het superpositiebeginsel stelt vervolgens dat deze vergelijking voor alle elektrostatic velden geldt.

$$\nabla \times \vec{E} = \oint_P \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (4.40)$$

Elektrische potentiaal

Definitie van de elektrische potentiaal

Het gegeven dat de rotatie van het elektrische veld nul is, betekent dat lijnintegralen onafhankelijk zijn van het gekozen pad. Hierdoor kan de potentiaal $V(\vec{r})$ gedefinieerd worden volgens vergelijking 4.41. Hierin is \vec{O} een punt, waarvoor is afgesproken dat vergelijking 4.42 geldt (conventioneel oneindig

ver verwijderd van elke lading) en $\vec{\varrho}$ een willekeurig genaamde integratievariabele. Verschilpotentialen worden berekend volgens vergelijking 4.43. Uit deze vergelijking volgt via de fundamentele stelling voor gradiënten dat het elektrisch veld een **gradiëntveld**, ofwel een **conservatief veld** moet zijn, volgens vergelijking 4.44. Een meetkundige plaats van gelijke potentiaal wordt **equipotentiaal** genoemd. De eenheid van potentiaal in het SI is $\text{Nm (As)}^{-1} = \text{JC}^{-1} = \text{V}$ (de volt).

$$V(\vec{r}) \equiv - \int_{\vec{O}}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{\varrho}) \cdot d\vec{l} \quad (4.41)$$

$$V(\vec{O}) \equiv 0 \quad (4.42)$$

$$V(\vec{b}) - V(\vec{a}) = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E}(\vec{\varrho}) \cdot d\vec{l} \quad (4.43)$$

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r}) \quad (4.44)$$

Gebruik van de elektrische potentiaal

Het bepalen van $V(\vec{r})$ is een effectieve methode om eenvoudig $\vec{E}(\vec{r})$ te kunnen berekenen. De vergelijkingen 4.45 tot en met 4.51, die alleen geldig zijn als aan vergelijking 4.42 is voldaan, zijn daarbij van belang. In de bepaling van de potentiaal kan bovendien gebruik gemaakt worden van het substitutiebeginsel. Vergelijking 4.51 wordt de **Poissonvergelijking** genoemd. In gevallen waarin $\rho = 0$ geldt, heet de Poissonvergelijking ook wel de **Laplacevergelijking**. In deze gevallen geldt tevens vergelijking 4.52, waarbij R de straal is van een in \vec{r} gecentreerde bol, die tevens het volume vormt waarover geïntegreerd moet worden.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{|\vec{r}|} \quad (4.45)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r}|_i} \quad (4.46)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{1}{|\vec{r}|} dq \quad (4.47)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_P \frac{\lambda(\vec{\varrho})}{|\vec{r}|} dl' \quad (4.48)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{\sigma(\vec{\varrho})}{|\vec{r}|} da' \quad (4.49)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{\varrho})}{|\vec{r}|} d\tau' \quad (4.50)$$

$$-\frac{\rho(\vec{r})}{\epsilon_0} = \nabla^2 V(\vec{r}) \quad (4.51)$$

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi R^2} \oint_{\text{bol}} V(\vec{\varrho}) da' \quad (4.52)$$

Afbeeldingenmethode

Uit de voorgaande vergelijkingen volgt dat waar geen lading is, $V(\vec{r})$ géén (lokale) extrema kan hebben. Het **eerste uniciteitstheorema**, dat hier weer uit volgt, luidt: De oplossing van de Laplacevergelijking in een volume is uniek als de potentiaal gespecificeerd is op het grensvlak van dat volume. Het **tweede uniciteitstheorema** stelt dat van een volume dat omgeven is door geleiders en een gespecificeerde ladingsdichtheid bevat, het elektrische veld volgens de Poissonvergelijking uniek is als de totale lading op elke geleider bekend is.

De uniciteitstheorema's maken het mogelijk gebruik te maken van de **afbeeldingenmethode**: Als een zekere andere ladingsverdeling voor een gedefinieerd volume tot een gelijke grenspotentiaal leidt, is het elektrisch veld binnen dit volume gelijk. Het elektrisch veld buiten dat volume kan en zal uiteraard wel afwijken. Deze methode kan gebruikt worden bij het berekenen van een geïnduceerde **oppervlaktelading** ten gevolge van aanwezige (punt-) ladingen in een geaard object en de krachten op de verschillende ladingen in

deze situatie. De afbeelding wordt in het geval van een gearde plaat gemaakt door de situatie in teken en plaats te spiegelen in deze plaat en de plaat zelf weg te laten. Hierdoor is de vectorsom van het effect van een bronlading en de bijbehorende afbeelding 0 op de plaats van de weggelaten aardplaat en wordt de aardplaat voor het volume aan de bronlading-zijde van de aardplaat vervangen door de afbeelding. In het geval van een gearde bol wordt de afbeelding gemaakt door lading met grootte $q' = -(R/a)q$ op een afstand $b = (R^2/a)$ van het middelpunt van de bol te plaatsen, in de richting van de bronlading. Hierin is R de straal van de bol en a en b de afstanden van de bron- en afbeeldingslading van het middelpunt. Daardoor wordt de potentiaal op de rand van de weggelaten bol 0 en is het veld in het gebied buiten de bol identiek aan dat van de oorspronkelijke situatie. Let op dat de energie van de vervangende ladingsverdeling doorgaans *afwijkt* van die van de oorspronkelijke situatie.

Scheiding van variabelen

De vergelijking van Laplace kan ook worden opgelost door **scheiding van variabelen**. Deze methode berust erop om de partiële differentiaalvergelijking op te lossen in een naar believen gekozen coördinatenstelsel. Daarbij wordt gezocht naar een oplossing in de vorm van een product van functies die elk slechts van één van de coördinaten afhangen. Vervolgens wordt de partiële differentiaalvergelijking geschreven als een stelsel van differentiaalvergelijkingen. De afzonderlijke oplossingen worden vermenigvuldigd, waarna de randvoorwaarden in de formule worden opgenomen om de onbekende constanten te bepalen. Hierbij kan het sommeren van oneindige reeksen noodzakelijk zijn. Voor een uitgebreidere beschrijving van deze methode, zie [4], paragraaf 3.3.

Multipolexpansie

De potentiaal ten gevolge van een enkele lading in de oorsprong, een zogenaamde **monopool**, neemt bij toenemende afstand r af met $1/r$. Dat van een **dipool** (twee gelijke, maar tegengestelde ladingen op een kleine afstand d van elkaar) met $1/r^2$. Bij een **quadrupool** (twee contraparallelle dipolen) neemt de potentiaal af met $1/r^3$ en bij een **octopool** met $1/r^4$. Vergelijking 4.53 geeft de potentiaal rondom een willekeurige ladingsverdeling. In principe is deze vergelijking exact, maar door de oneindige sommatie kan deze alleen op relatief grote afstand met voldoende nauwkeurigheid worden benaderd. P_n is de familie van zogenaamde Legendrepolynomen, waarvan de eerste

5 zijn weergegeven in tabel 2.6 op pagina 70. Als de ladingsverdeling een totale lading $Q \neq 0$ heeft, wordt de expansie voor grote waarden van \vec{r} gedomineerd door de monopoolterm (vergelijking 4.54). Wanneer $Q = 0$ geldt, domineert de dipoolterm (vergelijking 4.55). Hierin is \vec{p} het **dipoolmoment** van de configuratie, gedefiniëerd volgens vergelijking 4.56. Daaruit volgt voor verzamelingen puntladingen vergelijking 4.57 en specifiek voor de meest eenvoudige dipool (twee gelijke tegengestelde ladingen $\pm q$) vergelijking 4.58, waarin \vec{d} de afstandsvector van de negatieve naar de positieve lading is. Let op: een ideale dipool bestaat fysisch niet (daarvoor moet $d \rightarrow 0$ en om toch een dipoolmoment over te houden $q \rightarrow \infty$), dus in de beschreven dipool zijn er ook bijdragen van hogere-orde termen uit vergelijking 4.53. Voor $|\vec{r}| \gg d$ geldt echter $V(\vec{r}) \rightarrow V_{dip}(\vec{r})$. Dipoolmomenten kunnen volgens het **superpositiebeginsel** worden opgeteld. Daaruit volgt bijvoorbeeld direct dat het **dipoolmoment** van een *quadrupool* 0 bedraagt. Het **monopoolmoment** Q hangt niet af van de gekozen oorsprong, het dipoolmoment echter *wel*, tenzij de totale lading 0 bedraagt. De vergelijkingen 4.59 en 4.60 geven het elektrisch veld van een ideale dipool, respectievelijk in sferische coördinaten en coördinaat-onafhankelijk.

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{r^{(n+1)}} \int_V (|\vec{r}'|)^n P_n \cdot \cos(\theta') \rho(\vec{r}') d\tau' \quad (4.53)$$

$$V_{mon}(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r}|} \quad (4.54)$$

$$V_{dip}(\vec{r}) = \frac{\vec{p} \cdot \hat{\vec{r}}}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r}|^2} \quad (4.55)$$

$$\vec{p} \equiv \int_V \vec{r}' \cdot \rho(\vec{r}') d\tau' \quad (4.56)$$

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^n q_i \vec{r}'_i \quad (4.57)$$

$$\vec{p} = q\vec{d} \quad (4.58)$$

$$\vec{E}_{dip}(r, \theta) = \frac{|\vec{p}|}{4\pi\epsilon_0 \cdot r^3} (2 \cos(\theta) \hat{\vec{r}} + \sin(\theta) \hat{\vec{\theta}}) \quad (4.59)$$

$$\vec{E}_{dip}(\vec{r}) = \frac{3(\vec{p} \cdot \hat{\vec{r}}) \hat{\vec{r}} - \vec{p}}{4\pi\epsilon_0 \cdot |\vec{r}|^3} \quad (4.60)$$

Arbeid en energie

De hoeveelheid arbeid die verricht moet worden om een lading van a naar b te verplaatsen, wordt gegeven door vergelijking 4.61 en is padonafhankelijk. Vergelijking 4.62 geeft de hoeveelheid arbeid die moet worden verricht om een lading van oneindig ver naar b te brengen. Met behulp van de vergelijkingen 4.63 en 4.64 kan de totale arbeid berekend worden die nodig is om een configuratie te assembleren en geeft daarmee de **potentiële energie** van de configuratie. Wanneer een van de vergelijkingen 4.65 tot en met 4.68 gebruikt wordt, wordt de energie voor het samenstellen van de puntladingen zelf meegeteld in de berekening. Elektrostatiche energie voldoet *niet* aan het superpositiebeginsel en kan ook niet direct met behulp van de afbeeldingenmethode worden berekend.

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F}(\vec{\varrho}) \cdot d\vec{l}' = -Q \int_a^b \vec{E}(\vec{\varrho}) \cdot d\vec{l}'$$

$$= Q[V(\vec{b}) - V(\vec{a})] \quad (4.61)$$

$$W_b \equiv \lim_{a \rightarrow 0} W_{a \rightarrow b} = Q \cdot V(\vec{b}) \quad (4.62)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i \cdot \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{r_{ij}} \right) \quad (4.63)$$

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\vec{r}_i) \quad (4.64)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_P \lambda(\vec{\varrho}) V(\vec{\varrho}) d\lambda' \quad (4.65)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_S \sigma(\vec{\varrho}) V(\vec{\varrho}) da' \quad (4.66)$$

$$W = \frac{1}{2} \int_V \rho(\vec{\varrho}) V(\vec{\varrho}) d\tau' \quad (4.67)$$

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \int_{\text{Universum}} \vec{E}(\vec{\varrho})^2 d\tau' \quad (4.68)$$

Geleiders en Isolatoren

Isolatoren zijn materialen die geen vrije ladingsdragers bevatten. Dat wil zeggen dat alle elektronen aan een bepaald atoom gebonden zijn. Een geleider heeft daarentegen een of meer vrije ladingsdragers: elektronen of ionen. Een geleider heeft bovendien de volgende vijf eigenschappen:

1. Binnen een geleider geldt $\vec{E} = 0$.
2. Binnen een geleider geldt $\rho = 0$.
3. Eventueel aanwezige lading bevindt zich aan het oppervlak van de geleider.
4. Een geleider is een equipotentiaal.
5. \vec{E} staat vlak buiten een geleider loodrecht op het oppervlak ervan.

$$\vec{E} = (\sigma/\epsilon_0)\hat{n}$$

Hieruit volgt dat de velden binnen en buiten een holle geleider elkaar niet beïnvloeden. Voor deze zogenaamde **kooi van Faraday**, die doorgaans gemaakt wordt, voldoet in praktische situaties vaak ook een niet geheel gesloten geleider, zoals een afscherming van kippengaas. De kracht per eenheid van oppervlak \vec{f} op een geleider in een elektrisch veld ten gevolge van dat elektrische veld bedraagt $\vec{f} = 1/(2\epsilon_0)\sigma^2\hat{n}$. Dit leidt tot een **elektrostatiche druk** $P = \frac{1}{2}\epsilon_0\vec{E}^2$.

Capaciteiten

Omdat geleiders equipotentiaal zijn, kan gesproken worden over het potentiaalverschil tussen de beide geleiders. Wanneer de oppervlakken van beide geleiders geladen worden met een even grote, maar tegengestelde lading Q , is het elektrische veld tussen deze geleiders volgens de wet van Coulomb rechtevenredig met de grootte van Q . Het potentiaalverschil is eveneens rechtevenredig met dit veld, dus $|Q| \propto |\vec{E}| \propto |V|$. Daardoor kan een grootheid, genaamd **capaciteit**, gedefiniëerd worden volgens vergelijking 4.69. De SI-eenheid van capaciteit is coulomb per volt ofwel **farad** (F). Capaciteit is per definitie positief. Wanneer gesproken wordt van de capaciteit van één geleider, wordt als tweede geleider een sferische schil met oneindig grote straal rond deze geleider gekozen. Voor een **vlakkeplaatcondensator** kan vergelijking 4.70 worden afgeleid. Hierin is A de oppervlakte van de beide platen en d de afstand er tussen. De opgeslagen energie in een capaciteit wordt gegeven door vergelijking 4.71.

Dit zijn de zogenaamde **constitutieve relaties** die een vlakkeplaatcondensator of gegeneraliseerde capaciteit beschrijven:

$$C \equiv \frac{Q}{V} \quad (4.69)$$

$$C = \frac{A\epsilon_0}{d} \quad (4.70)$$

$$W = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2} \quad (4.71)$$

Grootheid	SI-eenheid	Factor	Gaussische eenheid
Capaciteit	farad	$\alpha^2 \cdot 10^{11}$	centimeter (cm)
Elek. veld	volt/m	$\alpha^{-1} \cdot 10^{-4}$	statvolt/cm
Energie	joule	10^7	erg
\vec{H}	ampere/m	$4\pi \cdot 10^{-3}$	oersted
Inductie	henry	$\alpha^{-2} \cdot 10^{-11}$	second ² /cm
Kracht	newton	10^5	dyne
Lading	coulomb	$\alpha \cdot 10^9$	esu (statcoulomb)
Lengte	meter(m)	10^2	centimeter
Magn. flux	weber	10^8	maxwell
Magn. veld	tesla	10^4	gauss
Massa	kilogram	10^3	gram
Potentiaal	volt	$\alpha^{-1} \cdot 10^{-3}$	statvolt
Stroomsterkte	ampere	$\alpha \cdot 10^9$	esu/seconde (statampere)
Tijd	seconde	1	seconde
Vermogen	watt	10^7	erg/seconde
Verplaatsing	coulomb/m ²	$4\alpha\pi \cdot 10^5$	statcoulomb/cm ²
Weerstand	ohm	$\alpha^{-2} \cdot 10^{-11}$	seconde/cm

Tabel 4.1: Eenheden in het Gaussische stelsel $\left(\alpha = \frac{c[m/s]}{100.000.000}\right)$

	SI	Gaussisch
Maxwell		
Algemeen	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \left(\vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 4\pi\rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$
In materiaal	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = \rho_f \\ \nabla \times \vec{D} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$	$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{D} = 4\pi\rho_f \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_f + \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{cases}$
\vec{D} en \vec{H}		
Definities	$\begin{cases} \vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} \\ \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} \\ \vec{H} = \vec{B} - 4\pi\vec{M} \end{cases}$
Lineaire media	$\begin{cases} \vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E}; \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{M} = \chi_m \vec{H}; \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \end{cases}$	$\begin{cases} \vec{P} = \chi_e \vec{E}; \vec{D} = \epsilon \vec{E} \\ \vec{M} = \chi_m \vec{H}; \vec{H} = \frac{1}{\mu} \vec{B} \end{cases}$
Lorentz	$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$	$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \frac{\vec{v}}{c} \times \vec{B}\right)$
Energie en Vermogen		
Energie	$U = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \vec{E}^2 + \frac{1}{\mu_0} \vec{B}^2) d\tau U = \frac{1}{8\pi} \int (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) d\tau$	
Poynting vector	$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$	$\vec{S} = \frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})$
Larmor formule	$P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$	$P = \frac{2}{3} \frac{q^2 a^2}{c^3}$

Tabel 4.2: Fundamentele vergelijkingen in het Gaussische stelsel

Elektrodynamica

Als velden te snel veranderen mag de situatie niet meer (quasi-) statisch worden benaderd. Dit is het werkgebied van de elektrodynamica (waar de elektrostatica ophoudt). Meer leesstof is te vinden in [4].

Symbolen

Variabelen

E	elektrische veldvector
D	elektrische verplaatsing
V	elektrische potentiaal
B	magnetische veldvector
H	bijkomende magnetische veldvector
A	magnetische potentiaal
P	elektrische polarisatie
M	magnetische polarisatie
ρ	volume ladingsdichtheid
ρ_f	vrije volume ladingsdichtheid
ρ_b	gebonden volume ladingsdichtheid = $-\nabla \cdot \mathbf{P}$
σ	oppervlakte ladingsdichtheid
σ_f	vrije oppervlakte ladingsdichtheid
q	lading
Q	lading
J	volume stroomdichtheid
\mathbf{J}_f	vrije volume stroomdichtheid
\mathbf{J}_b	gebonden volume stroomdichtheid = $\nabla \times \mathbf{M}$
\mathbf{J}_p	polarisatie volume stroomdichtheid = $\partial \mathbf{P} / \partial t$
K	oppervlakte stroomdichtheid
I	stroom
\mathbf{v}	snelheid (van bijvoorbeeld een lading)
$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$	Maxwell rek tensor
F	kracht
\mathbf{p}_{mech}	mechanische impuls
\mathbf{p}_{em}	elektromagnetische impuls
\wp_{mech}	mechanische impulsdichtheid
\wp_{em}	elektromagnetische impulsdichtheid
S	Pointing vector $\equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})$
ν	frequentie

Algemeen

ω	hoekfrequentie
k	golfgetal
\mathbf{k}	golfvector of propagatievector
$\hat{\mathbf{k}}$	golfeenheidsvector
v	snelheid
λ	golflengte
T	periode
$\hat{\mathbf{n}}$	polarisatie eenheidsvector
θ	polarisatiehoek
δ	fase constante
n	brekingsindex
u	energie per eenheidsvolume
I	intensiteit
P	stralingsdruk

Wiskunde

Informatica

Fysica

Geometrische symbolen

\mathcal{P}	omtrek
S	oppervlakte
\mathcal{V}	volume
\mathbf{r}	vector die een punt vanuit de oorsprong aanwijst
r	afstand tussen twee punten \mathbf{r} en \mathbf{r}'
\vec{r}	vector tussen twee punten \mathbf{r} en \mathbf{r}'
\mathbf{l}	lusvector (wijst met de klokrichting langs de lus)
\mathbf{a}	normaalvector van een grensvlak (van 2 naar 1)
$\hat{\mathbf{n}}$	eenheidsnormaalvector van een grensvlak (van 2 naar 1)
$\hat{\mathbf{x}}$	eenheidsvector in de x-richting
$\hat{\mathbf{y}}$	eenheidsvector in de y-richting
$\hat{\mathbf{z}}$	eenheidsvector in de z-richting

Meten

Signalen

Elektronica

Algemene wiskundige symbolen

δ_{ij}	kronecker delta functie
---------------	-------------------------

De Maxwell vergelijkingen

In de elektrodynamica gaan we steeds uit van de **Maxwell vergelijkingen**, deze zijn hier gegeven voor het meest algemene geval:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{wet van Gauss}) \quad (4.72)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (\text{geen naam}) \quad (4.73)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (\text{wet van Faraday}) \quad (4.74)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (\text{Ampère's wet met Maxwell's correctie})(4.75)$$

Voor de beide bronnen van velden, **ladingsdichtheid** ρ en **stroomdichtheid** \mathbf{J} kunnen we schrijven:

$$\rho = (\rho_f - \nabla \cdot \mathbf{P}) \quad (4.76)$$

$$\mathbf{J} = \left(\mathbf{J}_f + \nabla \times \mathbf{M} + \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} \right) \quad (4.77)$$

Omschrijven naar **elektrische verplaatsing** (\mathbf{D}) en het **bijkomend magnetisch veld** (\mathbf{H}) kan met (4.78) en (4.80).

$$\mathbf{D} \equiv \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (4.78)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E} \quad (4.79)$$

$$\mathbf{H} \equiv \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} - \mathbf{M} \quad (4.80)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \mathbf{B} \quad (4.81)$$

Polarisatie en **magnetisatie** zijn gerelateerd aan de materiaaleigenschappen:

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi_e \mathbf{E} \quad (4.82)$$

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H} \quad (4.83)$$

Daarnaast geldt de (elektromagnetische) **krachtwet**:

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (4.84)$$

Maxwell en randvoorwaarden

In het algemeen zullen \mathbf{E} , \mathbf{B} , \mathbf{D} en \mathbf{H} discontinu zijn op de grens tussen twee verschillende media, of op een oppervlak met een **ladingsdichtheid** σ of **stroombichtheid** \mathbf{K} . De vorm van deze discontinuïteiten volgt uit de **Maxwell vergelijkingen** in integraalvorm (4.85-4.88), waarbij het **Gaussisch pillendoosje** en de **lus van Ampère** (figuur 4.1 en 4.2) worden gebruikt om te bepalen hoe de discontinuïteit moet worden uitgerekend. De formules (4.89-4.92) gelden algemeen.

$$\oint_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} = Q_{f_{\text{enc}}} \quad (4.85)$$

$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = 0 \quad (4.86)$$

$$\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.87)$$

$$\oint_{\mathcal{P}} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = I_{f_{\text{enc}}} + \frac{d}{dt} \int_S \mathbf{D} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.88)$$

$$D_1^\perp - D_2^\perp = \sigma_f \quad (4.89)$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0 \quad (4.90)$$

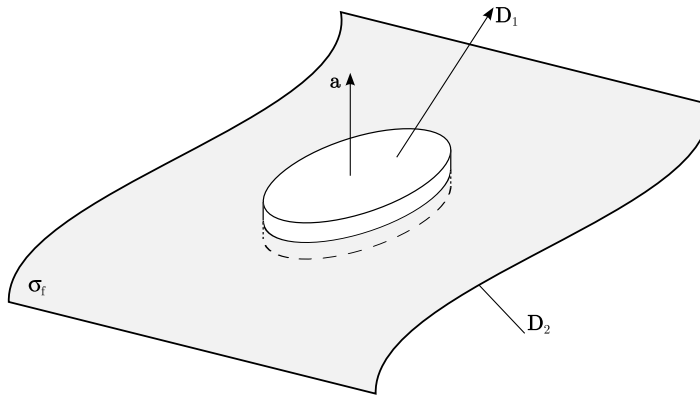
$$\mathbf{E}_1^\parallel - \mathbf{E}_2^\parallel = 0 \quad (4.91)$$

$$\mathbf{H}_1^\parallel - \mathbf{H}_2^\parallel = \mathbf{K}_f \times \hat{\mathbf{n}} \quad (4.92)$$

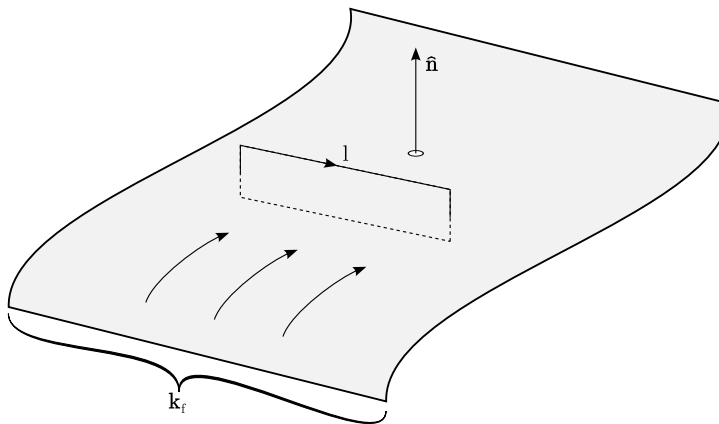
In het geval van lineaire media en geen stromen of ladingen op het grensvlak versimpelen de formules (4.89) en (4.92) tot de relaties (4.93) en (4.94). Deze vergelijkingen worden gebruikt bij het berekenen van reflectie en transmissie van golven aan een oppervlak.

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = 0 \quad (4.93)$$

$$\frac{1}{\mu_1} \mathbf{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \mathbf{B}_2^\parallel = 0 \quad (4.94)$$



Figuur 4.1: Gaussisch pillendoosje geïllustreerd



Figuur 4.2: Lus van Ampère geïllustreerd

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Behoud van lading, energie en moment

Hieronder worden kort de **behouden grootheden** die we in de elektrodynamica tegenkomen weergegeven, te beginnen met het **behoud van lading**. De lading in een volume wordt gegeven door (4.95), de stroom door het grensoppervlak S van \mathcal{V} door (4.96) en hieruit leiden we de **continuïteitsvergelijking** (4.97) af, de wet van lokaal behoud van lading.

$$Q(t) = \int_{\mathcal{V}} \rho(\mathbf{r}, t) d\tau \quad (4.95)$$

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.96)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{J} \quad (4.97)$$

Het **theorema van Poynting** luidt (merk op dat in dit theorema de **energiebehoudswet** is terug te vinden):

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{a} \quad (4.98)$$

De **Poyntingvector** \mathbf{S} is de hoeveelheid energie per tijdseenheid per oppervlakte-eenheid die door de elektromagnetische velden wordt getransporteerd:

$$\mathbf{S} \equiv \frac{1}{\mu_0} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \quad (4.99)$$

Of in differentiaalvorm:

$$\frac{\partial}{\partial t} (u_{\text{mech}} + u_{\text{em}}) = -\nabla \cdot \mathbf{S} \quad (4.100)$$

Behoud van moment leiden we af door de **elektromagnetische kracht** op de lading in een volume \mathcal{V} uit te rekenen (4.101) en dan de klassieke wet van behoud van moment op te stellen.

$$\mathbf{F} = \int_{\mathcal{V}} (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \rho d\tau \quad (4.101)$$

Dit is om te schrijven door de **Maxwell rek tensor** (4.103) in te voeren:

$$\mathbf{F} = \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_{\mathcal{V}} \mathbf{S} d\tau \quad (4.102)$$

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

Elk element T_{ij} van $\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ is gedefiniëerd als:

$$T_{ij} \equiv \epsilon_0 \left(E_i E_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} E^2 \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_i B_j - \frac{1}{2} \delta_{ij} B^2 \right) \quad (4.104)$$

Uiteraard geldt geheel volgens de klassieke mechanica de **tweede wet van Newton**, de wet van behoud van moment.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}_{\text{mech}}}{dt} = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{d}{dt} \int_V \mathbf{S} d\tau + \oint_S \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot d\mathbf{a} \quad (4.105)$$

Hierin is de eerste integraal het moment \mathbf{p}_{em} dat in het elektromagnetische veld zit opgesloten en de tweede integraal het moment dat per tijdseenheid door het oppervlak stroomt. We kunnen deze wet evenals de andere behoudswetten ook in differentiaalvorm schrijven:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\wp_{\text{mech}} + \wp_{\text{em}}) = \nabla \cdot \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \quad (4.106)$$

$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}$ is dus te beschouwen als impulsstroom-dichtheid

Elektromagnetische Golven

Golven in de vrije ruimte

Voordat we beginnen met golven in de vrije ruimte nog enkele definities. Het **golfgetal** k van de golf en de **golflengte** λ zijn als volgt gerelateerd:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} \quad (4.107)$$

Verder zijn de **voortplantingssnelheid** v , de periode T , het golfgetal k en de golflengte λ gerelateerd aan de **frequentie** ν :

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{k v}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} \quad (4.108)$$

Voor de meeste toepassingen is de **hoekfrequentie** ω handiger in gebruik. ω verhoudt zich als volgt tot ν en k :

$$\omega = 2\pi\nu = kv \quad (4.109)$$

Omdat elektromagnetische golven transversaal zijn, definiëren we een polarisatievector $\hat{\mathbf{n}}$ in termen van de polarisatiehoek θ :

$$\hat{\mathbf{n}} = \cos \theta \hat{\mathbf{x}} + \sin \theta \hat{\mathbf{y}} \quad (4.110)$$

Voor het beschrijven van elektromagnetische golven in de vrije ruimte, nemen we de Maxwellvergelijkingen en stellen hierin de brontermen van lading en stroom op nul. In de vrije ruimte is er geen lading of stroom. We kunnen de vergelijkingen nu loskoppelen door de rotatie toe te passen op de laatste twee Maxwellvergelijkingen. Hieruit krijgen we de dan twee tweedeorde differentiaalvergelijkingen in \mathbf{E} en \mathbf{B} :

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad (4.111)$$

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} \quad (4.112)$$

In vacuüm voldoen deze vergelijkingen voor Cartetische coördinaten aan de **driedimensionale golfvergelijking**:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \quad (4.113)$$

Hieruit volgt meteen de **snelheid van elektromagnetische golven in vacuüm** (gelijk aan de **lichtsnelheid** c):

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s} = c \quad (4.114)$$

Omdat elke golf kan worden uitgedrukt in een lineaire combinatie van sinusoidale golven, is de sinusvormige golf een logische vorm voor de studie naar golfverschijnselen. Een golf met één vaste hoekfrequentie ω , heet **monochromatisch**. Een golf die zich slechts in één richting voortplant heet een **vlakke golf**. De meest algemene schrijfwijze voor een monochromatische vlakke elektromagnetische golf is:

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, t) = \tilde{E}_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} \hat{\mathbf{n}} \quad (4.115)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \tilde{E}_0 e^{j(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)} (\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{n}}) = \frac{1}{c} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}} \quad (4.116)$$

Deze complexe golffuncties hebben de **complexe amplitude** (4.117).

$$\tilde{E}_0 \equiv E_0 e^{j\delta} \quad (4.117)$$

Omdat \mathbf{E} en \mathbf{B} transversaal zijn geldt verder:

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (4.118)$$

De werkelijke \mathbf{E} - en \mathbf{B} -velden zijn het reële deel van de vergelijkingen (4.115) en (4.116).

Energie en moment

Uit (4.98-4.100) lezen we impliciet af dat de opgeslagen energie per volumeenheid in de velden gelijk is aan:

$$u = \frac{1}{2} \left(\epsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) \quad (4.119)$$

Uit (4.106) lezen we impliciet af dat:

$$\wp_{\text{em}} = \frac{1}{c^2} \mathbf{S} \quad (4.120)$$

Van de grootheden u , \mathbf{S} en \wp_{em} kunnen we het tijdgemiddelde uitrekenen. Voor monochromatische vlakke golven in de z -richting geldt:

$$\langle u \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 \quad (4.121)$$

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (4.122)$$

$$\langle \wp_{\text{em}} \rangle = \frac{1}{2c} \epsilon_0 E_0^2 \hat{\mathbf{z}} \quad (4.123)$$

Voor het tijdgemiddelde van S , de **intensiteit**, (dus zonder richting) geldt:

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 \quad (4.124)$$

De **stralingsdruk** (gemiddelde kracht per eenheidsopervlakte) op een perfecte reflector is gegeven in (4.125). Dit is twee maal de druk op een perfect lichtabsorberend materiaal.

$$P = 2 \frac{I}{c} \quad (4.125)$$

Golven in materie

In lineaire homogene materialen mogen we het product $\epsilon_0\mu_0$ in (4.111) en (4.112) simpelweg vervangen door het product $\epsilon\mu$. De snelheid door het medium wordt nu gegeven door:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} = \frac{c}{n} \quad (4.126)$$

$$n \equiv \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \quad (4.127)$$

Voor alle vergelijkingen die gelden voor golven in de vrije ruimte mogen we de onderstaande substituties maken (opmerkelijk!):

$$\epsilon_0 \rightarrow \epsilon \quad \mu_0 \rightarrow \mu \quad c \rightarrow v$$

Reflectie en transmissie

Voor het berekenen van de **reflectie** en **transmissie** van golven aan een oppervlak, gebruiken we de randvoorwaardevergelijkingen (4.90, 4.91, 4.93 en 4.94). Stel dat we een inkomende vlakke golf hebben (subscript I), dan zullen er een gereflecteerde (subscript R) en een doorgaande (subscript T) golf zijn (figuur 4.3):

$$\tilde{\mathbf{E}}_I(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0I} e^{j(\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_I(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_I \times \tilde{\mathbf{E}}_I) \quad (4.128)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_R(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0R} e^{j(\mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_R(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_1} (\hat{\mathbf{k}}_R \times \tilde{\mathbf{E}}_R) \quad (4.129)$$

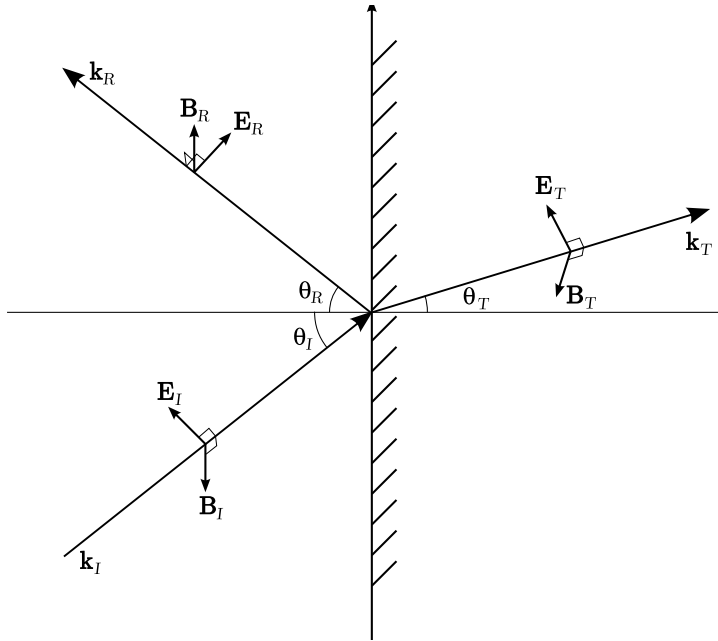
$$\tilde{\mathbf{E}}_T(\mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}_{0T} e^{j(\mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} - \omega t)}, \quad \tilde{\mathbf{B}}_T(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{v_2} (\hat{\mathbf{k}}_T \times \tilde{\mathbf{E}}_T) \quad (4.130)$$

Omdat de hoekfrequentie ω voor alle drie golven hetzelfde is, geldt voor de golfgetallen:

$$k_I = k_R = \frac{v_2}{v_1} k_T = \frac{n_1}{n_2} k_T \quad (4.131)$$

Omdat we in beide media het superpositiebeginsel mogen toepassen, kunnen we in medium 1 de inkomende en gereflecteerde golven optellen. Nu moet er voor het grensvlak aan de randvoorwaardevergelijkingen worden voldaan. Dit betekent dat voor het deel in de exponent geldt:

$$\mathbf{k}_I \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_R \cdot \mathbf{r} = \mathbf{k}_T \cdot \mathbf{r} \quad \text{als } z = 0 \quad (4.132)$$



Figuur 4.3: Vectors bij reflectie en transmissie van een golf

Voor het amplitudedeeel geldt dus:

$$\epsilon_1 (\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R})_z = \epsilon_2 (\tilde{\mathbf{E}}_{0T})_z \quad (4.133)$$

$$(\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R})_z = (\tilde{\mathbf{B}}_{0T})_z \quad (4.134)$$

$$(\tilde{\mathbf{E}}_{0I} + \tilde{\mathbf{E}}_{0R})_{x,y} = (\tilde{\mathbf{E}}_{0T})_{x,y} \quad (4.135)$$

$$\frac{1}{\mu_1} (\tilde{\mathbf{B}}_{0I} + \tilde{\mathbf{B}}_{0R})_{x,y} = \frac{1}{\mu_2} (\tilde{\mathbf{B}}_{0T})_{x,y} \quad (4.136)$$

Waar voor alle vier de vergelijkingen geldt dat:

$$\tilde{\mathbf{B}}_0 = \frac{1}{v} \hat{\mathbf{k}} \times \tilde{\mathbf{E}}_0 \quad (4.137)$$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Uit vergelijking (4.132) volgen de drie **wetten van Snellius**:

Eerste wet:

De inkomende, gereflecteerde en doorgaande golfvectoren vormen een vlak van inval, dat ook de normaalvector van het grensvlak bevat.

Tweede wet:

De invalshoek is gelijk aan de reflectiehoek.

$$\theta_I = \theta_R \tag{4.138}$$

Derde wet:

De invalshoek en de transmissiehoek zijn als volgt aan elkaar gerelateerd:

$$\frac{\sin \theta_T}{\sin \theta_I} = \frac{n_1}{n_2} \tag{4.139}$$

Uit de vergelijkingen (4.133-4.137) volgen de formules voor de transmissie- en reflectieveldsterktes. Merk op dat deze formules verschillend zijn voor verschillende polarisaties van de golf. We geven ze hier voor golven met **polarisatie** parallel aan het vlak van inval (4.140-4.143) en loodrecht op het vlak van inval (4.145-4.148). Voor de parallelle polarisatie treedt een interessant fenomeen op voor een bepaalde invalshoek (de **Brewsterhoek** θ_B), waarbij de reflectie volledig uitgedoofd wordt. Vergelijking (4.144) geeft de formule voor deze hoek.

$$\alpha \equiv \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} \tag{4.140}$$

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} \tag{4.141}$$

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0I} \tag{4.142}$$

$$\tilde{E}_{0T} = \left(\frac{2}{\alpha + \beta} \right) \tilde{E}_{0I} \tag{4.143}$$

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(n_1/n_2)^2 - \beta^2} \tag{4.144}$$

Loodrecht op het vlak van inval:

$$\alpha \equiv 1 \quad (4.145)$$

$$\beta \equiv \frac{\mu_1 \tan \theta_I}{\mu_2 \tan \theta_T} \quad (4.146)$$

$$\tilde{E}_{0R} = \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0I} \quad (4.147)$$

$$\tilde{E}_{0r} = \left(\frac{2}{1 + \beta} \right) \tilde{E}_{0I} \quad (4.148)$$

Een golf met een andere dan parallelle of loodrechte polarisatie kunnen we altijd ontbinden in twee golven, waarvan de ene parallelle en de ander loodrechte polarisatie heeft. Hierdoor kunnen van deze golven gemakkelijk de reflectie en transmissie worden berekend.

Door middel van de intensiteiten van de inkomende, gereflecteerde en doorgaande golven kunnen we ook de reflectie- en transmissiecoëfficiënten berekenen. Deze zijn gedefinieerd als:

$$R \equiv \frac{I_R}{I_I} \quad (4.149)$$

$$T \equiv \frac{I_T}{I_I} \quad (4.150)$$

Potentialen en velden

Potentiaalrepresentatie van Maxwell

Omdat de divergentie van \mathbf{B} nul is, kunnen we een **magnetische potentiaal** \mathbf{A} schrijven als:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (4.151)$$

Als de rotatie van een grootheid nul is, kunnen we deze grootheid gelijkstellen aan de gradient van een scalar. Het \mathbf{E} -veld kan nu geschreven worden als functie van het scalarpotentiaal V en vectorpotentiaal \mathbf{A} :

$$\mathbf{E} = -\nabla V - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (4.152)$$

Maxwell kunnen we nu schrijven in twee vergelijkingen waarin nog maar vier onbekenden voorkomen, in plaats van zes in de traditionele vergelijkingen:

$$\nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot \mathbf{A}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (4.153)$$

$$\left(\nabla^2 \mathbf{A} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2}\right) - \nabla \left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t}\right) = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4.154)$$

Aanpassingstransformaties

Bovenstaande twee vergelijkingen leggen de potentialen niet uniek vast. Hierdoor blijven er nog vrijheden over, die uit te buiten zijn met **aanpassingstransformaties** (*gauge transformations*).

Voor de **Coulomb-aanpassing** wordt opgelegd dat:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (4.155)$$

Hieruit volgt dan:

$$\nabla^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (4.156)$$

$$\nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} = -\mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \nabla \left(\frac{\partial V}{\partial t}\right) \quad (4.157)$$

De potentiaal V is nu makkelijk te bepalen. E is dat echter niet, omdat daarvoor ook \mathbf{A} bepaald moet worden.

Voor de **Lorentz-aanpassing** wordt opgelegd dat:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial V}{\partial t} \quad (4.158)$$

Hieruit volgen dan:

$$\square^2 V = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (4.159)$$

$$\square^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J} \quad (4.160)$$

Waarin \square^2 de **d'Alembertiaan** is:

$$\square^2 \equiv \nabla^2 - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad (4.161)$$

Deze aanpassing levert een mooie gelijke behandeling op van beide potentialen. De d'Alembertiaan is de natuurlijke generalisatie van de Laplaciaan. In de Lorentz aanpassing voldoen V en \mathbf{A} aan de **inhomogene golfvergelijking**, met een bronterm aan de rechterkant in plaats van nul. Nu kunnen we alle elektrodynamische problemen reduceren tot het oplossen van deze vergelijkingen voor gedefinieerde bronnen. Merk de overeenkomst met de Poissonvergelijkingen op.

Vertraagde potentialen

Omdat in de elektrodynamica alle informatie met de lichtsnelheid reist, mogen we niet meer zomaar de statische formules toepassen. Als een bron niet statisch is, verliet de informatie de bron op tijdstip t_r , dat we definiëren volgens:

$$t_r \equiv t - \frac{\mathcal{r}}{c} \quad (4.162)$$

De vertraging over de afstand \mathcal{r} is \mathcal{r}/c . Hiermee kunnen we de oplossing van de **Poissonvergelijkingen** voor de **vertraagde potentialen** veralgemeniseren:

$$V(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{r}} d\tau' \quad (4.163)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{r}} d\tau' \quad (4.164)$$

Omdat de d'Alembertiaan \square^2 bevat is de theorie tijd-inversie invariant. Hierdoor zijn ook de toekomstige-tijd (t_i) potentialen op te schrijven. Deze komen in de praktijk echter niet voor.

$$t_i \equiv t + \frac{\mathcal{r}}{c} \quad (4.165)$$

$$V_i(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t_i)}{\mathcal{r}} d\tau' \quad (4.166)$$

$$\mathbf{A}_i(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_i)}{\mathcal{r}} d\tau' \quad (4.167)$$

Jefimenko's vergelijkingen

De (causale) veralgemenisering van de **wetten van Coulomb** en van **Biot-Savart** zijn pas vrij recent (1966) gepubliceerd door Oleg Jefimenko. Deze vergelijkingen geven een sterk argument voor de geldigheid van de quasi-statische benadering.

De berekening start met de definities van (4.151) en (4.152). Daaruit volgen dan **Jefimenko's vergelijkingen**:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left[\frac{\rho(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{r}^2} \hat{\mathbf{r}} + \frac{\dot{\rho}(\mathbf{r}', t_r)}{c\mathcal{r}} \hat{\mathbf{r}} - \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t_r)}{c^2\mathcal{r}} \right] d\tau' \quad (4.168)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t_r)}{\mathcal{r}^2} + \frac{\dot{\mathbf{j}}(\mathbf{r}', t_r)}{c\mathcal{r}} \right] \times \hat{\mathbf{r}} d\tau' \quad (4.169)$$

Halfgeleiders

Veel gebruikte eenheden

$$\text{Centimeter (cm)} = 10^{-2} \text{ m}$$

$$\text{\AA} \text{ngstrom (\AA)} = 10^{-10} \text{ m}$$

$$\text{Coulomb (C)} = \text{A s}$$

$$\text{Farad (F)} = \text{A s V}^{-1}$$

$$\text{Joule (J)} = \text{Nm} = \text{kg m}^2 \text{ s}^{-2}$$

$$\text{Elektronvolt (eV)} = 1,60210 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

Natuurconstanten

$$\text{Elementaire lading: } q = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\text{Constante van Boltzmann: } k = 8,617385 \cdot 10^{-5} \text{ eV K}^{-1}$$

$$\text{Thermische spanning (kamertemperatuur): } V_{th} = kT/q = 0,025 \text{ V}$$

$$\text{Diëlektrische constante vacuüm (permittiviteit) } \epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-14} \text{ F cm}^{-1}$$

Parameters van silicium

$$\text{Relatieve diëlektrische constante silicium: } \epsilon_{r,Si} = 11,7$$

$$\text{Relatieve diëlektrische constante silicium dioxide: } \epsilon_{r,SiO_2} = 3,9$$

$$\text{Intrinsieke concentratie in Si bij kamertemperatuur: } n_i = \sqrt{2} \times 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

$$\text{Elektronendiffusieconstante: } D_n = 30 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Gatendiffusieconstante: } D_p = 10 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Elektronenmobiliteit: } \mu_n = 1200 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Gatenmobiliteit: } \mu_h = 350 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$$

$$\text{Diffusielengte ladingsdragers: } L_n = L_p = 30 \text{ }\mu\text{m}$$

In Amerikaanse literatuur wordt de relatieve diëlektrische constante ϵ_r vaak aangeduid met k .

Halfgeleidermateriaal

Silicium (Si) is een halfgeleider met een kristalrooster. Om de geleidingseigenschappen van een halfgeleider te manipuleren, voeg je er atomen aan toe die meer of minder elektronen in de buitenste schil hebben. Dit proces heet **doting**.

Materialen met een elektronenoverschot noemen we n-type (negatief) of **donoren**, in het geval van Si zijn dit fosfor (P) en arsenicum (As). Materialen met een elektronentekort noemen we p-type (positief) of **acceptoren**, in het geval van Si zijn dit boor (B), aluminium (Al) en indium (In). **Intrinsieke halfgeleiders** zijn van monokristallijn materiaal zonder dotering, **extrinsieke halfgeleiders** zijn wel gedoteerd.

Halfgeleiderfysica

Drift en diffusie

In een homogeen gedoteerde halfgeleider wordt de geleidbaarheid in een elektrisch veld gegeven door vergelijking (4.170), mits er geen andere drijvende krachten aanwezig zijn (magnetisch veld, temperatuurgradiënt).

$$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p) \quad (4.170)$$

Drift is het verschijnsel dat ladingsdragers zich onder invloed van een elektrisch veld verplaatsen, zodat ze elektrische energie verliezen (elektronen tegen de richting van het elektrisch veld in, gaten met het veld mee, elektronen van een lager naar een hoger potentiaal, gaten van een hoger naar een lager potentiaal).

De evenredigheidconstante die de veldsterkte en de gemiddelde snelheid van een ladingsdrager v_c verbindt, is de **mobiliteit** μ_c (c van *carrier*, n of p):

$$v_c = \mu_c \cdot \varepsilon \quad (4.171)$$

In het geval dat er een concentratiegradiënt is, ontstaat er een **diffusiestroom** die deze gradiënt probeert op te heffen. Dit kan zijn in het geval van niet-homogene doping, maar ook als de gradiënt ontstaat als gevolg van de door het elektrische veld veroorzaakte driftstroom.

De grootte van de diffusiestroom wordt gegeven door (dit is een geval van de eerste **wet van Fick**):

$$J = -D_c \frac{\partial c}{\partial x} \quad (4.172)$$

J is een flux (in cm^{-2}), c is de concentratie van de ladingsdrager. D_c is de **diffusiviteit** van de ladingsdrager. Merk op dat bovenstaande vergelijking één-dimensionale diffusie beschrijft.

De elektronen- en gatenstroom (t.g.v. drift én diffusie) worden gegeven door:

$$j_n = qn\mu_n\varepsilon + qD_n \frac{dn}{dx} \quad (4.173)$$

$$j_p = qp\mu_p\varepsilon - qD_p \frac{dp}{dx} \quad (4.174)$$

Hierin zijn D_n en D_p de diffusieconstanten van respectievelijk elektronen en gaten. Deze hangen af van de temperatuur en van de mobiliteit van de ladingsdragers (μ), via de **Einstein-relatie**:

$$D = V_{th}\mu \quad (4.175)$$

De diffusieweglengthe is de gemiddelde lengte die een elektron aflegt voordat het recombineert met een gat. Deze hangt samen met de gemiddelde levensduur:

$$L_n = \sqrt{D_n\tau_n} \quad (4.176)$$

Elektronenergieën

Elektronen kunnen zich in verschillende banen rond de atoomkern bevinden. Als ze dichtbij de kern zijn is er veel energie nodig om het elektron naar buiten (vacuüm) te verplaatsen; ze hebben een grote negatieve energie. Verder weg van de kern hebben ze een minder negatieve energie, tot aan 0 in het vacuüm. Voor een enkel elektron zijn er een beperkt aantal energieniveau's waarop het zich kan bevinden (postulaat van Planck¹).

Vanwege het **Pauli-principe** (alle elektronen moeten zich op een uniek energieniveau bevinden) ontstaat er een groot aantal energieniveau's (toestanden) waarin een elektron zich kan bevinden. De dichtheid van energietoestanden wordt gegeven door:

$$g(E) = \frac{8\pi m \sqrt{2mE}}{h^3} \approx 10^{47} \sqrt{E} \quad (4.177)$$

Hierbij is m de massa van een elektron en E de energie.

De statistische verdeling van elektronen over de energietoestanden wordt gegeven door de **Fermi-Dirac² statistiek**:

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{\frac{E-E_F}{kT}}} \quad (4.178)$$

Dit kan vereenvoudigd worden tot de **Maxwell-Boltzmann³ statistiek** voor

¹Max Planck (1858-1947)

²naar Enrico Fermi (1901-1954) en Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)

³naar James Clerk Maxwell (1831-1879) en Ludwig Eduard Boltzmann (1844-1906)

niet-gedegeneerde halfgeleiders ($|E - E_F| > 3kT$):

$$f(E) = e^{-\frac{E-E_F}{kT}} \text{ indien } E > E_F \quad (4.179)$$

$$1 - f(E) = e^{-\frac{E-E_F}{kT}} \text{ indien } E < E_F \quad (4.180)$$

Hier is E_F de **Fermi-energie**, dit is een referentie-energie waarbij de kans een elektron aan te treffen gelijk is aan 0,5.

De concentraties van elektronen (n) en gaten (p) worden respectievelijk gegeven door (integratie van respectievelijk $g(E)f(E)$ en $g(E)(1 - f(E))$):

$$n = N_C e^{\frac{E_F - E_C}{kT}} = n_i e^{\frac{E_F - E_{Fi}}{kT}} \quad (4.181)$$

$$p = N_V e^{\frac{E_V - E_F}{kT}} = n_i e^{\frac{E_{Fi} - E_F}{kT}} \quad (4.182)$$

Hierbij zijn N_C en N_V de effectieve toestandsdichtheden in de geleidingsband en de valentieband en E_C en E_V de bijbehorende energieën. E_{Fi} is het intrinsieke Fermi-niveau, n_i is de intrinsieke hoeveelheid elektronen. De totale hoeveelheid¹ gaten en elektronen wordt gegeven door de “**mass-action law**”:

$$np = n_i^2 \quad (4.183)$$

Bij kamertemperatuur is het aantal ladingsdragers normaliter gelijk aan het aantal donoren (N_D) of acceptoren (N_A) in de halfgeleider:

$$n = N_D \text{ en } p = N_A \quad (4.184)$$

Vaak wordt gebruikt gemaakt van het potentiaalverschil (Ψ) in plaats van het energieverval:

$$n(x) = n_i e^{\frac{\Psi(x)}{V_{th}}} \quad (4.185)$$

$$p(x) = n_i e^{-\frac{\Psi(x)}{V_{th}}} \quad (4.186)$$

$$\Psi(x) = \frac{E_F - E_{Fi}}{q} \quad (4.187)$$

$$V_{th} = \frac{kT}{q} \quad (4.188)$$

¹merk op dat ‘hoeveelheid’, ‘aantal’ en ‘concentratie’ door elkaar worden gebruikt, waar het natuurlijk gaat om de concentratie [cm^{-3}]

Diodes

Indien een p-type en een n-type stuk halfgeleider met elkaar in contact gebracht worden hebben we een pn-overgang ofwel een **diode**. Door het verschil in Fermi-niveau ontstaat een spanningsval over de junctie de zogenaamde **ingebouwde potentiaal** (ϕ_{bi}):

$$\phi_{bi} = \frac{1}{q} (E_F(n) - E_F(p)) = \frac{kT}{q} \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2} = V_{th} \ln \frac{N_D N_A}{n_i^2} \quad (4.189)$$

Er zal een migratie op gang komen van elektronen naar het p-gebied en gaten naar het n-gebied waardoor een elektrisch veld ontstaat. Daardoor ontstaat een driftstroom die tegengesteld is aan de diffusiestroom. Er ontstaat rondom de junctie een **ruimteladingsgebied** waar de ladingsdragers zijn weggediffundeerd en geladen doteringsatomen zijn achtergebleven.

De hoeveelheid lading (ρ) in deze **depletielaag** is gerelateerd aan het elektrische veld (ε) en de ingebouwde potentiaal via de **wet van Poisson**¹:

$$-\frac{d^2 V(x)}{dx^2} = \frac{d\varepsilon(x)}{dx} = \frac{\rho(x)}{\varepsilon_s} \quad (4.190)$$

De breedte van het ruimteladingsgebied rondom de pn-overgang wordt gegeven door:

$$W = (x_{dn} + x_{dp}) = \sqrt{\frac{2\varepsilon_s}{q} \frac{N_A + N_D}{N_A N_D} (\phi_{bi} - V_D)} \quad (4.191)$$

Hierin wordt de factor $\frac{N_A + N_D}{N_A N_D}$ de **effectieve dotering** genoemd.

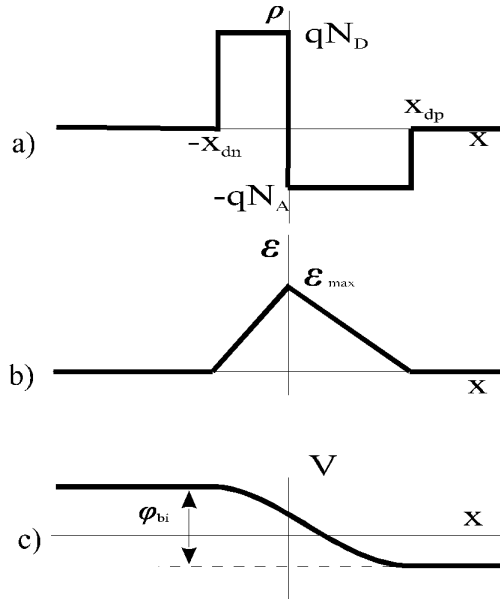
De stroom die gaat lopen door een lange diode als over de junctie een spanning V_A wordt aangelegd is:

$$I_{totaal} = A (j_n + j_p) = A q n_i^2 \left(\frac{1}{N_A} \frac{D_n}{L_n} + \frac{1}{N_D} \frac{D_p}{L_p} \right) \left(e^{\frac{V_A}{V_{th}}} - 1 \right) \quad (4.192)$$

De stroom(dichtheid) door niet-homogeen gedoteerde diodes kan worden uitgedrukt met behulp van het **Gummelgetal** (G). Dit is de integraal van de doping genormaliseerd op de diffusieconstante.

$$j = -q \frac{n_i^2}{G} \left[e^{\frac{V_A}{V_{th}}} - 1 \right] \quad (4.193)$$

¹naar Siméon Denis Poisson (1781 - 1840)



Figuur 4.4: Schematische weergave van de lading in het ruimteladingsgebied (a), het elektrische veld (b), en de resulterende ingebouwde potentiaal (c).

Het Gummelgetal wordt hierbij gegeven door:

$$G = \int_0^L \frac{N(x)}{D(x)} dx \quad (4.194)$$

In het geval van homogeen gedoteerde diodes is dit:

$$G = \frac{N_D L}{D_p} \quad (4.195)$$

Randvoorwaarde is dat de neutrale gebieden zo smal zijn dat er geen recombinatie optreedt, maar dat recombinatie alleen optreedt aan de metaalcontacten.

Bipolaire junctie transistor

Een bipolaire transistor bestaat uit twee pn-overgangen. In het geval van een npn-transistor is de middelste laag, de **basis**, een lichtgedoteerde dunne p-laag tussen n-lagen. De **emitter** is relatief hoog gedoteerd en de **collector** is, zeker in de buurt van de junctie, laag gedoteerd. Voor een pnp-transistor geldt het omgekeerde.

In voorwaarts is de emitter-basis junctie in doorlaat belast. De elektronen kunnen dan de basis allemaal oversteken, omdat dit een zeer dunne laag is. Naast de elektronenstroom is er een gatenstroom, veroorzaakt door de spanning op het basiscontact.

De basis- en collector- stroomdichtheid zijn een functie van de aangelegde basis-emitter spanning en de doping (via het Gummel-getal):

$$j_{\text{basis}} = \frac{qn_i^2}{G_E} \left(e^{\frac{V_{BE}}{V_{th}}} - 1 \right) \quad (4.196)$$

$$j_{\text{collector}} = \frac{qn_i^2}{G_B} \left(e^{\frac{V_{EB}}{V_{th}}} - 1 \right) \quad (4.197)$$

De verhouding tussen de emitter- en de basisstroom wordt uitgedrukt in de **stroomversterkingsfactor** (β_F , α_{FE} of h_{FE}). Een andere veelgebruikte benchmark is de **emitter efficiency** (α_F of γ_F).

$$I_E = -(I_B + I_C) \quad (4.198)$$

$$\beta_F = \frac{I_C}{I_B} = \frac{G_E}{G_B} \quad (4.199)$$

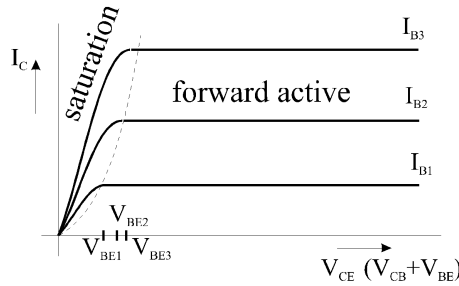
$$\alpha_F = \frac{I_C}{I_E} = \frac{\beta_F}{\beta_F + 1} \quad (4.200)$$

Er zijn vier werkgebieden voor een bipolaire transistor:

1. Doorlaat richting actief (**forward**)
2. Sper richting actief (collector werkt als emitter en andersom) (**reverse**)
3. Afsnijgebied (beide juncties staan in sper (**cut-off afsnijgebied**))
4. Verzadiging (beide juncties staan in doorlaat) (**saturation**)

Early effect

Door een te lage basisdotering en/of een te hoge collectorspanning wordt het ruimteladingsgebied aan de basiskant van de basis-collector overgang zo groot



Figuur 4.5: BJT in verzadiging en doorlaat

dat het smaller worden van de neutrale basis significant wordt. Daardoor wordt de collectorstroom afhankelijk van de V_{CE} . De mate waarin dit optreedt is uit te drukken in de **Early-spanning**, die te vinden is door de helling van de I_C - V_{CE} curve te extrapoleren tot $I_C=0$.

Kirk effect

Bij zeer hoge collectorstromen wordt de elektronenconcentratie die nodig is om de stroom te leveren, groter dan de hoeveelheid aanwezige doperingsatomen in de basis-collector ruimteladingslaag. Het aantal gaten zal dan stijgen om te compenseren voor het overschot aan elektronen. Daardoor zakt de stroomversterking in.

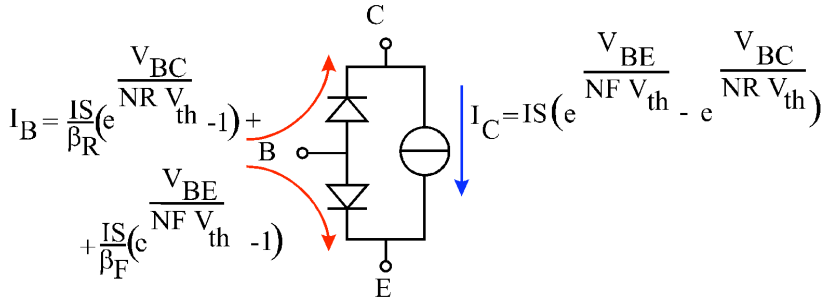
Ebers-Moll model

Het **Ebers-Moll model** geeft een model voor de BJT in alle werkingsgebieden (zie figuur 4.6):

$$I_C = IS \left(e^{\frac{V_{BE}}{NFV_{th}}} - e^{\frac{V_{BC}}{NRV_{th}}} \right) \quad (4.201)$$

$$I_B = \frac{IS}{\beta F} \left(e^{\frac{V_{BE}}{NFV_{th}}} - 1 \right) + \frac{IS}{\beta R} \left(e^{\frac{V_{BC}}{NRV_{th}}} - 1 \right) \quad (4.202)$$

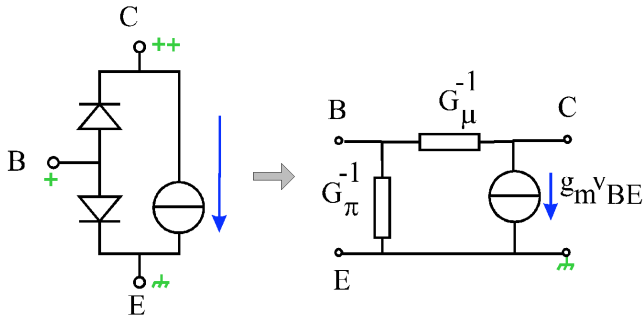
Hier symboliseert IS de elektronen injectie in de basis, NF en NR zijn fitparameters voor het in model brengen van niet-ideaal gedrag.



Figuur 4.6: Equivalent circuitmodel geldig voor alle werkingsgebieden.

Kleinsignaalvervangschema

In het **KSVS**¹ wordt de emitter-basis overgang vervangen door een weerstand (g_{π}^{-1}) die afhankelijk is van de basisstroom. De basis-collector junctie wordt vervangen door een grote weerstand (g_{μ}^{-1}). Dit model geldt voor lage frequenties (ladingsofslag wordt verwaarloosd).



Figuur 4.7: NPN transistor in actieve toestand en het “hybride- π -equivalente” circuit model.

$$i_B = g_{\pi} v_{BE} + g_{\mu} v_{BC} \tag{4.203}$$

$$i_C = g_m v_{BE} + g_0 v_{BC} \tag{4.204}$$

¹kleinsignaalvervangschema

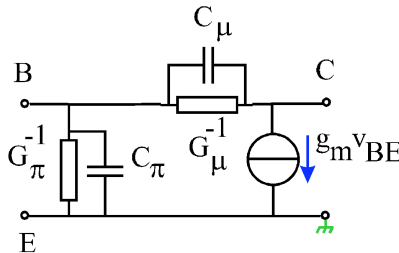
Hier is g_m de **transconductantie**, g_0 is de term die het Early effect modelleert. Voor de geleiding worden hoofdletter en kleine letter g door elkaar gebruikt:

$$g_m = \beta_F g_\pi = \frac{I_C}{V_{th}} \quad (4.205)$$

$$G_\pi = g_\pi = \frac{dI_B}{dV_{BE}} = \frac{I_B}{V_{th}} \quad (4.206)$$

$$G_\mu = g_\mu = \left. \frac{dI_{CBp}}{dV_{BC}} \right|_{V_{CB} \leq 0} = \frac{dI_S}{dV_{BC}} = \frac{1}{\beta_R} \frac{dI_S}{dV_{BC}} \quad (4.207)$$

Voor hogere frequenties moet de ladingsopslag wel worden meegenomen. Hiertoe wordt het schema uitgebreid met twee capaciteiten.

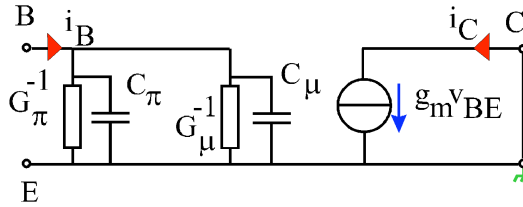


Figuur 4.8: Kleinsignaalvervangingschema van een npn transistor in actieve toestand uitgebreid met collector- en basiscapaciteiten, ook toepasbaar voor hogere frequenties.

Daarnaast kan het Early-effect worden gemodelleerd door een extra weerstand tussen de collector en de emitter.

Afsnijfrequentie

De afsnijfrequentie (f_T) van een bipolaire transistor waarbij de emitter aan aarde ligt (GES configuratie) is gedefinieerd als de frequentie waarbij de kleinsignaalstroomversterking gelijk is aan 1, wanneer de uitgang van de transistor is gearde voor AC-signalen. Het kleinsignaalvervangingschema ziet er dan uit als in figuur 4.9.



Figuur 4.9: Vervangschema van de bipolaire transistor in de GES configuratie met kortgesloten collector om de afsnijffrequentie te bepalen.

$$\left| \frac{i_C}{i_B} \right| = \frac{g_m v_{BE}}{\left((G_\pi + G_\mu)^2 + \omega^2 (C_\pi + C_\mu)^2 \right)^{0,5} v_{BE}} \approx \frac{g_m}{\omega (C_\pi + C_\mu)} \quad (4.208)$$

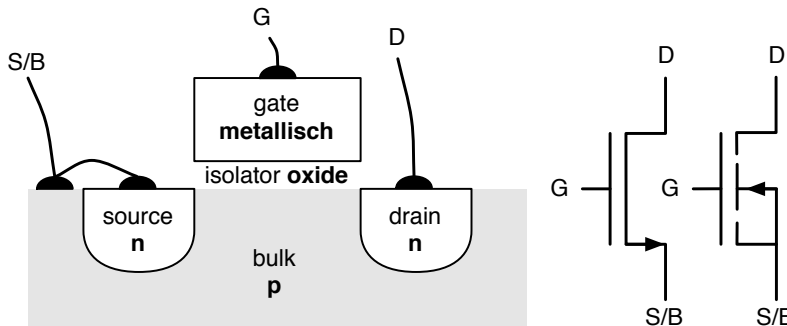
$$f_T = \frac{g_m}{2\pi (C_\pi + C_\mu)} \quad (4.209)$$

In de vergelijkingen is τ_{base} de **oversteektijd** van de basis. De snelheid van de transistor wordt bepaald door de lengte van de basis en de diffusieconstante:

$$\tau_{base} = \frac{L_B^2}{L_p^2} \tau_p = \frac{L_B^2}{D_p} = \frac{L_B^2}{V_{th} \mu_p} \quad (4.210)$$

MOSFET

De **MOSFET** (Metal-Oxide-Semiconductor Field-Effect Transistor) heeft 4 terminals, *bulk*, *source*, *drain* en *gate*, schematisch aangegeven in figuur 4.10. Bij een n-kanaals MOSFET (nMOS) is het substraat p-type Si en de source en drain gebieden n-type gedoteerd. Bij een pMOS is dit geïnverteerd.



Figuur 4.10: Opbouw N-type (N-kanaal, P-substraat) MOS transistor (vlr. het nieuwe en het oude symbool)

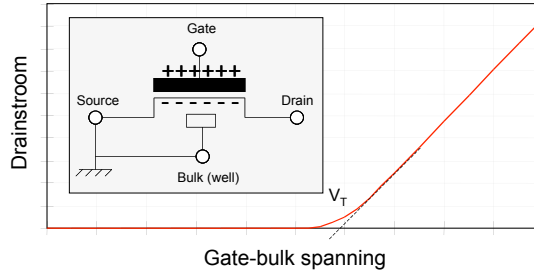
De *gate*-elektrode was vroeger een metaal, vandaar de naam, maar tegenwoordig meestal van zeer hooggedoteerd polykristallijn Si. De *gate* is door een dun isolerend *gate*-dielectricum gescheiden van het Si. Door een spanning aan te leggen tussen de *gate* en het substraat worden ladingsdragers in het Si onder de *gate* aangetrokken of afgestoten, het zogenaamde veld effect. Door daarnaast een spanning aan te leggen tussen de *source* (bron) en *drain* (put) kan een kanaal vormen die zorgt voor een drainstroom.

De drempelspanning (V_T) is die spanning waarbij het grensvlak Si-SiO₂ geïnverteerd is:

$$V_T = V_{FB} + (2\phi_b + V_{SB}) + \frac{\sqrt{2\varepsilon_s q N_A (2\phi_b + V_{SB})}}{C_{ox}} \quad (4.211)$$

Waarbij V_{FB} de **vlakke-bandspanning** is, ϕ_b de **ingebouwde potentiaal** en C_{ox} de oxidecapaciteit. V_{SB} is de spanning tussen de source en de bulk, in veel gevallen is deze term gelijk aan nul.

De drempelspanning V_T kan worden bepaald uit de $I_D - U_{GS}$ grafiek door in het punt van de maximale transconductantie ($g_m = dI_d/dV_g$) de helling te extrapoleren naar nul. (Zie figuur 4.11.)



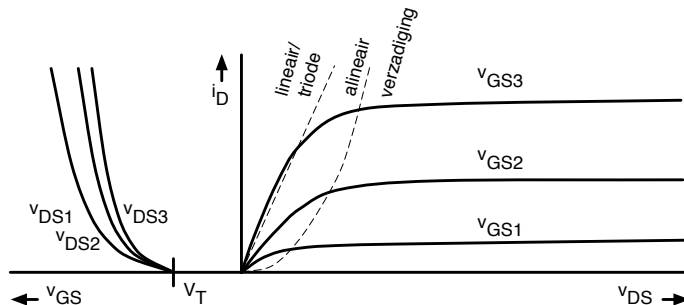
Figuur 4.11: In het lineaire gebied zijn de *source* en de *bulk* geard en is de drainspanning klein (rond 0,1V). Met de gatespanning wordt de transistor geopend; de drempelspanning V_T hangt af van de gebruikte drainspanning.

Volgens het *square law model* waarbij een uniforme ladingsverdeling in het kanaal wordt verondersteld, geldt voor de drainstroom van lange transistoren:

$$I_D = \begin{cases} 0 & \text{als } V_{GB} < V_T \\ \frac{W}{L} \mu_n C_{ox} \left(V_{GB} - V_T - \frac{V_{DS}}{2} \right) V_{DS} & \text{als } V_{GB} > V_T \text{ en } V_{DS} < V_{Dsat} \\ \frac{1}{2} \frac{W}{L} \mu_n C_{ox} (V_{GB} - V_T)^2 & \text{als } V_{GB} > V_T \text{ en } V_{DS} > V_{Dsat} \end{cases} \quad (4.212)$$

(zwakke inversie)
(lineair/triode gebied)
(verzadiging)

Waarbij $V_{Dsat} = V_{GB} - V_T$. Hier zijn V_{GB} en V_{DS} respectievelijk de spanning tussen de *gate* en de *bulk*, en de *drain* en *source*. In de literatuur wordt de *bulk* ook vaak substraat genoemd met als afkorting V_{GS} . Zie figuur 4.12.



Figuur 4.12: De **stuurkarakteristiek** (links) en de **uitgangskarakteristiek** (rechts) van de MOS transistor.

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Een meer algemene beschrijving voor niet uniforme ladingsverdelingen wordt gegeven door de *gradual channel approximation*, voor lange transistoren geldt in sterke inversie en zwakke inversie respectievelijk:

$$I_D = \mu_n C_{ox} \frac{W}{L} \left[\left(V_{GS} - 2\phi_b - \frac{V_{DS}}{2} \right) V_{DS} - \frac{2\gamma}{3} \left\{ \left(V_{GS} + 2\phi_b + V_{DS} \right)^{1.5} - \left(V_{SB} + 2\phi_b \right)^{1.5} \right\} \right] \quad (4.213)$$

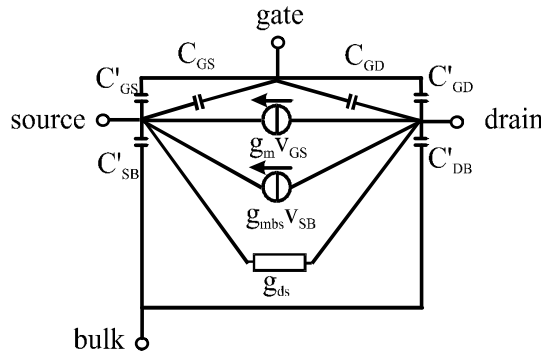
$$I_D = \frac{W}{L} \mu_n \int_0^L V_{th} \frac{dQ_n}{dx} dx = \mu_n V_{th} \frac{W}{L} Q_n = \mu_n V_{th}^2 \frac{W}{L} C_{dep} e^{\frac{V_{GS} - \alpha\phi_b}{mV_{th}}} \quad (4.214)$$

Waarbij Q_n de inversielading per oppervlakte-eenheid is. α en m zijn modelparameters. γ is de *bodyfactor* of *bulkfactor*:

$$\gamma = \frac{\sqrt{2\epsilon q N_A}}{C_{ox}} \quad (4.215)$$

Bij transistoren met een kort kanaal treden diverse korte-kanaals-effecten op, waardoor deze formules dienen te worden aangepast.

Het KSVS van een N-MOSFET wordt gegeven door:



Figuur 4.13: nMOS model

In het kleinsignaalmodel wordt de drainstroom gegeven door:

$$i_D = g_m v_{GS} + g_{ds} v_{DS} + g_{mbs} v_{BS} \quad (4.216)$$

Fotodiodes

De fotodiode

De **fotodiode** is een van de vele benamingen voor de halfgeleiderconstructie, die als een elektrische stroombron kan functioneren als er licht op valt. Andere namen zijn **fotocel**, **zonnecel**, **fotovoltaïsch element** en **zonnecelbatterij**. De fabricage van de fotodiode veel lijkt op de fabricage van geïntegreerde schakelingen (IC's).

De wisselwerking van licht en materie

Als een elektromagnetische golf, wat licht in feite is, op materie valt kan er een aantal dingen gebeuren:

- Het licht kan **verstrooid** worden, d.w.z. dat het licht alleen van richting verandert ten gevolge van de interactie met het kristal rooster.
- Er kan **absorptie** optreden. Dit houdt in dat de energie van een **lichtquant** of **foton** ($h\nu$, met h de **constante van Planck**¹ en ν de frequentie van het betreffende licht in s^{-1}) gelijk aan of groter is dan het energiever-schil tussen twee energieniveaus. De elektronen vallen vaak na enige tijd weer terug, onder het uitzenden van licht, naar de plaats waar ze een gat hebben achtergelaten. Indien het terugvallen via vele kleine tussenstapjes gebeurt, zal er geen zichtbaar licht uitgezonden worden. Er wordt echter wel energie afgegeven, waardoor de materie warmer wordt. Dit verschijnsel noemt men **dissipatieve absorptie**.

Stroombron

De elektronen in de aangeslagen energieniveaus en de achtergebleven gaten zijn niet plaatsgebonden. Ze kunnen samen wegdiffrunderen naar plaatsen waar geen licht op de materie is gevallen. Vanwege de coulombse wisselwerking blijven ze echter bij elkaar, waardoor de nettostroom nul is. Voor een stroombron is het echter nodig dat de elektronen en de gaten elk een andere kant opgaan. Dit kan men bewerkstelligen door de elektron- gatparen op en rondom een zogenaamde pn-overgang te laten ontstaan. Dat wil zeggen door een p-n-overgang met licht te beschijnen.

¹Max Karl Ernst Ludwig Planck (1858-1947)

De diode als fotocel

De diode bestaat uit een pn-overgang (**junction**) tussen p-type silicium (Si) en n-type Si. In zuiver (dat wil zeggen intrinsiek) Si vindt geleiding plaats door elektronen en gaten. Het aantal vrije elektronen n_i is gelijk aan het aantal vrije gaten p_i :

$$p_i = N_V \cdot e^{-\frac{E_V - E_F}{kT}} = n_i = N_C \cdot e^{-\frac{E_F - E_C}{kT}} \quad (4.217)$$

Verklaring van de symbolen in vergelijking 4.217

- k = de constante van Boltzmann
- E_F = het Fermi energieniveau
- E_C = het energieniveau van de geleidingsband
- E_V = het energieniveau van de valentieband
- N_C = de effectieve toestandsdichtheid bij het E_C niveau
- N_V = de effectieve toestandsdichtheid bij het E_V niveau
- T = de absolute temperatuur

Bij kamertemperatuur is $n_i = p_i \approx 1,5 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3}$ en het **pn-product** constant: $p \cdot n = n_i^2 = p_i^2 \approx 2 \cdot 10^{20} \text{cm}^{-3}$. **Dotering** met Fosforatomen (P, vijfwaardig, **donor**) in een concentratie $N_D = 1,2 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$ veroorzaakt een concentratie vrije elektronen n_n (**n-type materiaal**) die gelijk aan $1,2 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}$ is. Het aantal gaten moet nu gelijk aan het pn-product gedeeld door n_n zijn, omdat het pn-product constant is. We vinden dus voor de gatenconcentratie $p_n = 1,67 \cdot 10^2 \text{cm}^{-3}$. Door deze dotering wordt de geleiding ten opzichte van intrinsiek Si dus verhoogd met een factor

$$\frac{1,2 \cdot 10^{18} \text{cm}^{-3}}{2 \cdot 1,45 \cdot 10^{10} \text{cm}^{-3}} = 4,1 \cdot 10^7$$

Dotering met Booratomen (B, driewaardig, **acceptor**) brengt eveneens een verhoging van de geleiding tot stand, maar nu via gatengeleiding (**p-type materiaal**). Contactering van p- en n-type materiaal zorgt voor een zodanige ladingsverplaatsing, dat de **Ferminiveaus** in p-type Si en in n-type Si gelijk worden. Er ontstaat een overgangslaag (met een dikte in de orde grootte $1 \mu\text{m}$), waarin n-type overgaat in p-type met **concentratiegradiënten**. Door dit concentratieverschil gaan elektronen van het n-type materiaal naar het p-type (idem voor gaten van het p-type naar het n-type).

De ladingsstromen die ontstaan ten gevolge van deze concentratieverschillen, maken het neutrale n-type materiaal positief en het oorspronkelijk neutrale p-type materiaal negatief. Hierdoor wordt in het overgangsgebied

een inwendige potentiaal ϕ_{bi} opgebouwd ter grootte van:

$$\phi_{bi} = \phi_n - \phi_p = \frac{k \cdot T}{q} \cdot \ln \left(\frac{N_A \cdot N_D}{n_i^2} \right) \quad (4.218)$$

Verklaring van de symbolen in vergelijking 4.218:

- ϕ_{bi} = inwendige potentiaal
- N_A = de dotering (concentratie) van acceptors
- N_D = de dotering van donors
- q = de lading van het elektron

In het overgangsgebied wordt een elektrische veldsterkte \vec{E} opgebouwd:

$$\vec{E} = -\nabla(\phi_{bi}) = -\frac{\partial \phi_{bi}}{\partial x} \hat{x} \quad (4.219)$$

Daarbij is x de lengte van het overgangsgebied.

Zonder aangelegde spanning heerst er een dynamisch evenwicht van **diffusiestroom** en **veldstroom** (driftstroom), zowel voor de gaten (j_p) als voor de elektronen (j_n):

$$j_p = p \cdot \mu_p \cdot q \cdot \frac{\partial \phi_{bi}}{\partial x} - D_p \cdot q \cdot \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \quad (4.220)$$

$$j_n = n \cdot \mu_n \cdot q \cdot \frac{\partial \phi_{bi}}{\partial x} + D_n \cdot q \cdot \frac{\partial n}{\partial x} = 0 \quad (4.221)$$

Verklaring van de symbolen in de vergelijkingen 4.220 en 4.221:

- p = de concentratie van gaten
- n = de concentratie van elektronen
- μ_p = de mobiliteit van gaten
- μ_n = de mobiliteit van elektronen
- D_p = de diffusiviteit van gaten
- D_n = de diffusiviteit van elektronen

In deze formules treden de waarden op in de orde van grootte van:

$$D_p \cdot q \cdot \frac{\partial p}{\partial x} \cong 12,3 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \cdot \frac{10^{18}}{10^{-4}} \approx 2 \cdot 10^4 \text{ A/cm}^2 \quad (4.222)$$

Bij uitwendig aangelegde spanningen (positief voor p-type materiaal) treden stromen op in de orde van grootte van 1 A/cm². Concentraties van meerderheidsladingsdragers (n en p) worden hierdoor dus nauwelijks beïnvloed. Concentraties van minderheidsladingsdragers daarentegen (dat wil zeggen n_p = de concentratie van elektronen in het p-type materiaal en p_n = de concentratie van gaten in het n-type materiaal) worden daardoor *wel* beïnvloed. Er wordt een concentratie (dat wil zeggen n_{p0} en p_{n0}) opgewekt op de randen van het overgangsgebied. De concentraties op de randen worden respectievelijk:

$$n_{pV} = n_{p0} \cdot e^{\frac{q \cdot V}{k \cdot T}} \quad (4.223)$$

$$p_{nV} = p_{n0} \cdot e^{\frac{q \cdot V}{k \cdot T}} \quad (4.224)$$

De stijging van de gaten- en elektronenconcentraties op de randen van het overgangsgebied veroorzaken diffusie van gaten in het n-type gebied (dat wil zeggen een diffusiestroom j_p). De gaten recombineren hier vervolgens (evenals de elektronen in het p-type gebied, j_n).

Voor de totale stroom j door de diode valt vergelijking 4.225 af te leiden, de zogenaamde **Shockley-formule**:

$$\begin{aligned} j &= j_n + j_p \\ &= q \cdot n_i^2 \cdot \left[\frac{1}{N_A} \cdot \frac{D_n}{L_n} + \frac{1}{N_D} \cdot \frac{D_p}{L_p} \right] \cdot \left[e^{\frac{q \cdot V}{k \cdot T}} - 1 \right] \\ &= j_s \cdot \left[e^{\frac{q \cdot V}{k \cdot T}} - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.225)$$

Daarbij zijn L_p en L_n de **diffusielengten** voor gaten en elektronen. Bij elke verhoging van V met 60 millivolt neemt j toe met een factor 10. De minderheidsladingsdragers bepalen de stroomsterkte. Het lichtgedoteerde gebied bepaalt de doorlaatstroom. Hoe groter de doteringen, hoe kleiner j bij gegeven V .

De fotostroom

Indien de pn-junctie wordt belicht en we nemen aan dat het p-type materiaal aan de bovenkant zit, zal het licht eerst door het p-gebied dringen, omdat de pn-junctie niet aan het oppervlak van de fotodiode ligt. Indien een lichtquant een energie $h\nu$ heeft die gelijk aan of groter dan de **bandgap** E_g is, zal er een elektron-gatpaar gecreëerd worden. Dat wil zeggen: een elektron wordt uit de **valentieband** in de **geleidingsband** gebracht (er vindt absorptie plaats).

Door de hoge diffusiegradiënt in het p-type gebied is een \vec{E} -veld ontstaan, dat verdere diffusie tegengaat. Het gat van het gegenereerde elektron-gatpaar zal nu naar het oppervlak worden gedreven en het elektron in de richting van de pn-overgang.

Wanneer de **absorptiecoëfficiënt** α erg groot is, zullen maar weinig quanten de junctie bereiken; de meeste elektron-gatparen worden immers in het p-type gebied gecreëerd. Deze neemt bij kleinere golflengtes (hogere foto-energieën) sterk toe. Zo sterk zelfs dat bijvoorbeeld blauw licht bij Si al volledig geabsorbeerd wordt aan het oppervlak en de pn-overgang niet bereikt.

Wanneer een lichtquant dan toch het overgangsgebied bereikt, wordt het gecreëerde elektron-gatpaar gescheiden ten gevolge van het sterke elektrische veld in de overgangslaag ($\approx 5 \cdot 10^5$ V/m). De fotostroom I_L heeft een richting die tegengesteld is aan de doorlaatrichting van de diode.

De veldsterkte in de overgangslaag is zo hoog, dat de **driftsnelheid** v_d niet meer afhankelijk is van de veldsterkte E (de relatie $v_d = \mu \cdot E$ gaat dus niet meer op), maar zijn maximale waarde bereikt vanwege de demping van de elektronenbeweging door de wisselwerking met het kristalrooster. Hierdoor is de waarde van de fotostroom onafhankelijk van aangelegde spanning.

Indien een elektron-gatpaar voorbij de junctie wordt gecreëerd, dus in het n-type gebied, zullen de beide ladingsdragers samen wegdiffrunderen van de plek waar ze gegenereerd zijn. Wanneer ze toch bij de rand van de pn-overgang komen, worden ze alsnog gescheiden door het elektrisch veld en dragen ze bij tot de stroom. Dit effect draagt het meest bij tot de stroomopwekking.

Voor de fotostroom kunnen we de volgende formule afleiden:

$$I_L = \frac{\eta \cdot q \cdot A \cdot I_{\text{illum}}}{h\nu} \quad (4.226)$$

Verklaring van de symbolen in de vergelijking 4.226:

- A = het oppervlak van de fotodiode
- η = het rendement
- q = de lading van het elektron
- I_{illum} = de verlichtingssterkte
- $h\nu$ = de energie van een lichtquant.

De eigenschappen van de fotostroom zijn:

- Het is een stroom van minderheidsladingsdragers.
- De fotostroom loopt tegengesteld aan de door de uitwendige spanning $V (> 0)$ veroorzaakte stromen en heeft dus dezelfde richting als de spstroom.

- De fotostroom is onafhankelijk van de aangelegde spanning.
- De fotostroom is lineair afhankelijk van de lichtintensiteit.

De silicium fotodiode is het meest gevoelig voor rood licht (golflengte: $0.8 \mu\text{m}$, foto-energie: $1,6 \text{ eV}$). Dit is jammer, want het zonlicht is rijker aan groen en blauw licht.

Optimalisatie van de fotodiode

De belangrijkste factor voor het rendement van de fotodiode is de levensduur van de elektron-gatparen. Hoe langer deze tijd, des te meer kans dat de ze in een elektrisch veld worden gescheiden en bijdragen tot de fotostroom. Deze levensduur hangt onder andere af van de verontreinigingen in het kristal. Door speciale temperatuurbehandelingen zou men de levensduur van de elektron-gatparen met een factor honderd kunnen verlengen.

Door het bedekken van de fotodiode met een laagje siliciumoxide kan men de recombinatie van gaten aan het oppervlak tegengaan. Ook moet men zorgen dat het metaal-p-contact zo klein mogelijk is om recombinatie aan het oppervlak te voorkomen. Het elektrische veld neemt in de buurt van het oppervlak af. Hierdoor hebben aan het oppervlak gegenereerde elektron-gatparen een kleinere kans om gescheiden te worden. Een remedie zou zijn het weer wegeetsen van de borium toplaag. De borium toplaag mag niet te dun worden, want dan stijgt de serieweerstand, wat een te hoge energiedissipatie tot gevolg heeft.

Een andere manier om het rendement te verbeteren, is een hoge fosforconcentratie diep in het Si substraat aan te brengen. Het elektrische veld dat hiermee samenhangt trekt de elektronen dieper het kristal in en stuurt de gaten naar de $p - n$ overgang. Bij voorkeur zou dit concentratieverloop op een diepte van 10 a $20 \mu\text{m}$ moeten komen te liggen.

Verder kan men het rendement nog iets verhogen door het verminderen van de reflectie coëfficiënt R_m . Deze hangt af van de plotselinge overgang in brekingsindex tussen lucht en silicium. Er wordt een transparante laag op het silicium aangebracht, met een zodanige brekingsindex n dat R_m minimaal wordt. De dikte d van deze laag moet zo gekozen worden dat juist een gunstige interferentie ontstaat, $d = \lambda/(4 \cdot n)$. Met meerdere lagen is de reflectie van een breder spectrum te onderdrukken. SiO_2 is wat dat betreft niet de meest ideale bedekking. SiO , Si_3N_4 en Al_2O_3 zijn gunstiger, vooral waar het de blauw-gevoeligheid betreft.

Indien de zonnecel volgens de beste technieken gemaakt wordt, kan een rendement van ongeveer 22% gehaald worden.

I-V curve van de fotodiode

Een fotodiode gedraagt zich als een diode met een stroombron parallel aan de diode. De stroom I_L ten gevolge van de geabsorbeerde fotonen loopt in dezelfde richting als de sperstroom. De stroom-spanning relatie wordt beschreven door de volgende formule:

$$I = I_0 \cdot \left(e^{\frac{q \cdot V}{k \cdot T}} - 1 \right) - I_L \quad (4.227)$$

P-V curve van de fotodiode

De $P - V$ curve, oftewel de vermogenskarakteristiek, geeft het geleverde vermogen P als functie van de spanning V over de fotodiode. Het grootste vermogen (P_{max}) dat de fotodiode kan leveren bij een bepaalde I_L wordt beschreven door:

$$P_{max} = -I_o^2 \cdot V_{MP}^2 \cdot \frac{q}{k \cdot T} \cdot e^{\frac{q \cdot V_{MP}}{k \cdot T}} \quad (4.228)$$

V_{MP} is de spanning waarbij de afgeleide van P naar V gelijk aan nul is.

Het rendement η van de fotodiode kan als volgt geschreven worden:

$$\eta = \frac{P_{MAX}}{P_{IN}} = CF \cdot \frac{V_{OC} \cdot I_{SC}}{P_{IN}} \quad (4.229)$$

Waarbij P_{IN} het aangeboden vermogen in licht is. De constante CF , de curve factor, is als volgt gedefinieerd:

$$CF = \frac{\text{max vermogen}}{\text{ideaal vermogen}} = \frac{V_{MP} \cdot I_{MP}}{V_{OC} \cdot I_{SC}} \quad (4.230)$$

I_{MP} is de stroom waarbij de afgeleide van P naar V gelijk aan nul is. De kortsluitstroom I_{SC} en de open klemspanning V_{OC} worden bepaald als:

$$I_{SC} = -I_L \quad (4.231)$$

$$V_{OC} = \frac{k \cdot T}{q} \cdot \ln \left(1 + \frac{I_L}{I_0} \right) \quad (4.232)$$

Niet ideale fotodiode

Er is een parallelschakeling van een intrinsieke diode en een stroombron I_L . In werkelijkheid bestaat ook een serie- en parallelweerstand. De serieweerstand R_S is het gevolg van de contactweerstand tussen het aluminium en het p^+ diffusiegebied en het p^+ gebied zelf, terwijl de parallelle weerstand R_P optreedt ten gevolge van de aanwezigheid van recombinatie centra in het depletiegebied van de $p^+ - n$ overgang. Deze twee weerstanden hebben een nadelige invloed op de werking van de fotodiode. Ten gevolge van de aanwezigheid van deze twee weerstanden wordt de stroom-spanning relatie als volgt herschrijven:

$$I = I_0 \cdot \left(e^{\frac{q \cdot (V - I \cdot R_S)}{k \cdot T}} - 1 \right) - I_L + \frac{V - I \cdot R_S}{R_P} \quad (4.233)$$

Elektrische energietechniek

Inleiding

In de elektrische energietechniek gaat het onder meer om het overdragen van energie tussen twee systemen. Voorbeelden zijn de energieoverdracht tussen een elektriciteitsnet en een belasting of de energieoverdracht tussen twee elektriciteitsnetten.

De hier gebruikte conventies zijn (op basis van **NEN 3570**):

1. Gelijkspanning en gelijkstroom worden genoteerd in hoofdletters, dus U_x en I_x respectievelijk.
2. De momentane (ook wel: momentele) waarden van wisselspanningen en wisselstromen worden genoteerd in kleine letters, dus u_x en i_x respectievelijk.
3. Complexe grootheden worden onderstreept.
4. Wisselspanningen zijn sinusvormig volgens:

$$u_x = \hat{u} \sin(\omega t + \theta) = U \sqrt{2} \sin(\omega t) \quad (4.234)$$

$$\text{met } U = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad (4.235)$$

U is de effectieve (of RMS-) waarde van de spanning en θ de fase. Hetzelfde principe geldt voor wisselstromen.

5. Soms worden spanningen en stromen met behulp van complexe grootheden genoteerd. Er geldt dan:

$$u = \Re(\underline{u}) = \Re(\hat{u}e^{j\omega t}) = \Re(\hat{u}e^{\theta}e^{j\omega t}) \quad (4.236)$$

Hetzelfde principe geldt voor wisselstromen.

6. Belastingen van systemen worden weergegeven als een weerstand met daaraan parallel een afvlakcondensator. Dit wordt generaliseerd tot een gelijkstroombron.

Gelijk- en wisselstroomoverdrachten

Bij **gelijkstroomoverdrachten** zijn de volgende begrippen van belang:

- Het overgedragen vermogen $P = UI$ [W]

- Het rendement $\eta = \frac{P_{\text{opgenomen, belasting}}}{P_{\text{afgegeven, bron}}}$

Bij **wisselstroomoverdrachten** zijn de volgende begrippen van belang (φ is het faseverschil tussen de spanning over en de stroom door de belasting):

- Het **momentane vermogen** $p = ui$ [W]
- Het **gemiddelde vermogen** $P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = UI \cos \varphi$ [W]
- Het **blindvermogen** $Q = UI \sin \varphi$ [var]
- Het **schijnbare vermogen** $S = UI$ [VA]
- Het **complexe schijnbare vermogen** $\underline{S} = P + jQ = \underline{UI}^* = UIe^{j\varphi}$
- De **arbeidsfactor** $\lambda = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI} = \cos \varphi$
- Het rendement $\eta = \frac{P_{\text{opgenomen, belasting}}}{P_{\text{afgegeven, bron}}}$

Het verband tussen wisselspanningen en wisselstromen in een bepaald netwerk is grafisch weer te geven met behulp van fasordiagrammen. In het complexe domein geldt voor de spanning over een spoel en condensator de volgende vergelijkingen (ω is de hoekfrequentie van de spanning/stroom):

$$\underline{U}_L = j\omega L I_L \quad (4.237)$$

$$\underline{U}_C = \frac{1}{j\omega C} I_C \quad (4.238)$$

Driefasenschakelingen

Een speciale vorm van wisselspanningssystemen zijn **driefasensystemen**. Hierbij bestaat de voeding uit drie wisselspanningsbronnen die elk een onderling faseverschil van $2/3 \pi$ hebben:

$$\underline{U}_a = U \quad (4.239)$$

$$\underline{U}_b = Ue^{-j\frac{2}{3}\pi} \quad (4.240)$$

$$\underline{U}_c = Ue^{j\frac{2}{3}\pi} \quad (4.241)$$

Magnetische circuits

Magnetische circuits komen in de energietechniek veel voor in de vorm van transformatoren, draaistroommachines en diverse soorten elektromechanische omzeters. Het is daarom wenselijk om deze circuits om te zetten naar equivalente circuits die met behulp van de reguliere netwerkanalyse bestuurd kunnen worden.

Hier zullen alle elementen als ideaal worden beschouwd. Voor de beschrijving van niet-ideale elementen wordt naar de (vak-)literatuur verwezen ([5] vormt een goede inleiding tot de energietechniek).

De bron in een magnetisch circuit is in het algemeen een N aantal wikkelingen om een deel van het circuit, waardoor een stroom I loopt. Hierdoor wordt de **magnetomotorische kracht** F_m [A] gerealiseerd:

$$F_m = NI \quad (4.242)$$

Deze magnetomotorische kracht is analoog aan een spanningsbron in het elektrische domein.

Het magnetische circuit heeft een **magnetische reluctantie (magnetische weerstand)** R_m [A/Wb], die afhankelijk is van de permeabiliteit $\mu = \mu_0\mu_r$, de dwarsdoorsnede A en de gemiddelde lengte l_{av} :

$$R_m = \frac{l_{av}}{\mu A} \quad (4.243)$$

De magnetomotorische kracht veroorzaakt in het magnetische circuit een **magnetische flux** Φ [Wb] (analoog aan stroom in het elektrische domein):

$$\Phi = \frac{F_m}{R_m} \quad \text{(Wet van Hopkinson)} \quad (4.244)$$

Deze analogie wordt gebruikt om schakelingen met transformatoren door te rekenen. In verband hiermee is het nuttig te weten dat de spanning over een spoel met kern gegeven wordt door:

$$u = Ri + \frac{d\psi}{dt} \quad (4.245)$$

Hierin is R de Ohmse weerstand van de (draad van de) spoel, i de stroom door de spoel en ψ de gekoppelde flux. Voor de **gekoppelde flux** geldt:

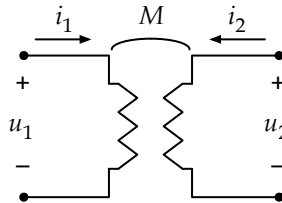
$$\psi = N\Phi = NBA = Li \quad (4.246)$$

B is hierbij de fluxdichtheid en $L = N^2/R_m$ de zelfinductie van de spoel.

Transformatoren

Transformatoren worden veel gebruikt bij energieoverdrachten. Het is nuttig om van transformatoren een **vervangingschema** op te stellen, zodat de reguliere netwerkanalyse toegepast kan worden. Hier zullen enkele veelvoorkomende vervangingschema's gegeven worden.

De ideale transformator



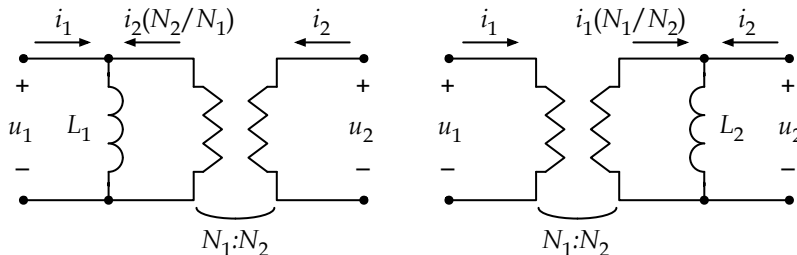
Figuur 4.14: Een model voor een ideale transformator.

In figuur 4.14 is een schema van een ideale transformator weergegeven. Dit vervangingschema is alleen bruikbaar voor globale berekeningen. De spanningen en stromen in dit vervangingschema worden gegeven door de volgende vergelijkingen:

$$\frac{u_1}{u_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (4.247)$$

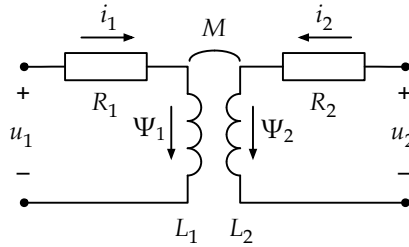
$$\frac{i_1}{i_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad (4.248)$$

Het is gebruikelijk om het inductieve karakter van de transformator in rekening te brengen. Dit is gedaan in het vervangingschema in figuur 4.15. In de figuur zijn tevens de belangrijkste grootheden aangegeven.



Figuur 4.15: Een model voor een transformator met inductief karakter.

Transformator als twee gekoppelde spoelen



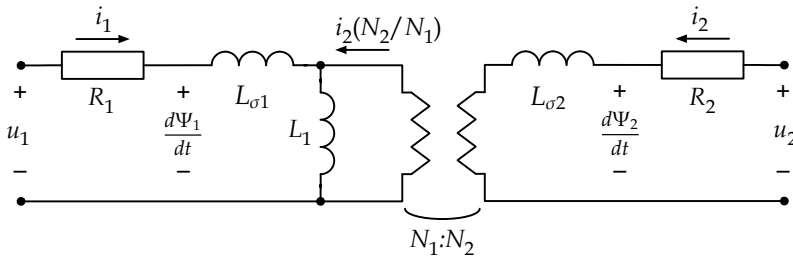
Figuur 4.16: Een transformator als twee gekoppelde spoelen.

In figuur 4.16 is het vervangingsschema van een transformator als twee gekoppelde spoelen weergegeven. Beide spoelen voeren een flux ψ . De uitgangsspanningen kunnen worden beschreven met deze uitdrukkingen:

$$u_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \tag{4.249}$$

$$u_2 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \tag{4.250}$$

Niet-ideale transformatoren



Figuur 4.17: Een model voor een niet-ideale transformator

In figuur 4.17 zijn de spreidingsfluxen in het vervangingsschema opgenomen middels een tweetal spoelen L_{σ} . Tevens zijn de belangrijkste grootheden weergegeven. Er geldt:

$$\psi_1 = L_{\sigma 1} i_1 + L_{1m} i_1 + M i_2 \tag{4.251}$$

$$\psi_2 = L_{\sigma 2} i_2 + L_{2m} i_2 + M i_1 \tag{4.252}$$

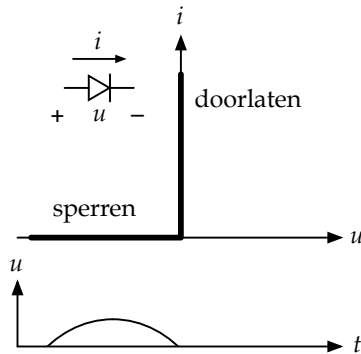
Het is mogelijk om de componenten naar inzicht naar de primaire danwel secundaire zijde van de transformator te transformeren. Daarvoor wordt verwezen naar [5].

Vermogenselektronica

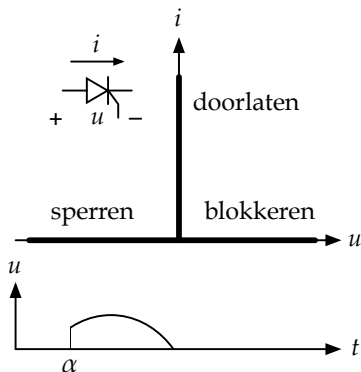
Vermogenselektronica wordt vooral gevonden in voedingssystemen en aandrijvingen. Deze paragraaf behandelt enkele veelvoorkomende componenten die worden gebruikt in gelijkrichters. Tevens behandelt deze paragraaf enige elementaire theorie die bij vermogensoverdrachten wordt toegepast.

Gelijkrichtercomponenten

De twee belangrijkste componenten in gelijkrichters zijn de **diode** en de **thyristor**. In figuur 4.18 en figuur 4.19 zijn van beide het netwerksymbool en de geïdealiseerde overdracht weergegeven.



Figuur 4.18: Symbool, karakteristiek en overdracht van een diode.



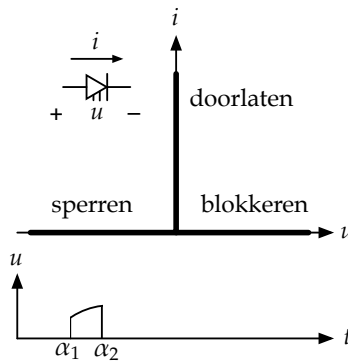
Figuur 4.19: Symbool, karakteristiek en overdracht van een thyristor.

De thyristor is in feite een schakelbare diode. Zodra op de sturingang een stroompuls wordt gezet, wordt de thyristor “ontstoken”. Vanaf dat moment gedraagt de thyristor zich als diode. Het moment waarop de thyristor wordt ontstoken, wordt de ontstekehoek genoemd. Deze hoek α is een hoek binnen het bereik $(0, 2\pi]$, wat overeenkomt met een periode van de spanning in het circuit.

Schakelcomponenten

Het komt vaak voor dat (hoge) vermogens geschakeld moeten worden. Vaak is een normale schakelaar niet bruikbaar, omdat er bijeffecten optreden die fataal voor de componenten kunnen zijn. De belangrijkste **schakelende componenten** zijn de **GTO**¹, de **MOSFET**², de **BJT**³ en de **IGBT**⁴.

Een GTO is hetzelfde als een normale thyristor, met als enige verschil dat de GTO met een stroompuls aan de sturende ingang ook weer uitgeschakeld kan worden. In figuur 4.20 is het symbool voor de GTO weergegeven, alsmede de geïdealiseerde karakteristiek en de overdracht bij een aangeboden sinus.



Figuur 4.20: Symbool, karakteristiek en overdracht van een GTO.

De MOSFET en de BJT zijn bekende schakelende componenten, maar niet altijd bruikbaar in de vermogenselektronica. Een MOSFET heeft bij grote spanningen relatief grote geleidingsverliezen, terwijl een BJT een relatief groot stuurvermogen vraagt.

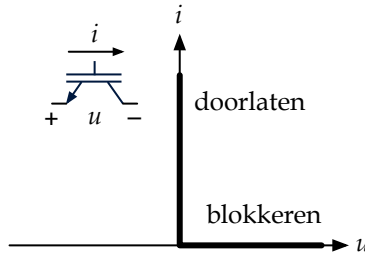
¹Gate Turn-off-thyristor

²Metal Oxide Semiconductor Field Effect Transistor

³Bipolar Junction Transistor

⁴Insulated Gate Bipolar Transistor

De IGBT is een schakelend component die de voordelen van de MOSFET en de BJT combineert. De IGBT wordt daarom ook veel gebruikt. In figuur 4.21 is de symbolische weergave van een IGBT en de geïdealiseerde karakteristiek weergegeven.



Figuur 4.21: Symbool en karakteristiek van een IGBT.

Volt-seconde-integraal

Vermogensoverdrachten in bijvoorbeeld spanningsnetten vinden in het algemeen plaats middels kabels met inductieve eigenschappen. In stationair bedrijf moet de gemiddelde energie in deze spoel gelijk zijn aan nul. Met andere woorden: de toename van de flux in een periode moet gelijk zijn aan nul. Deze eis wordt mathematisch beschreven door de “volt-seconde-integraal”:

$$i(t_2) = i(t_1) + \frac{1}{L} \int_{t_1}^{t_2} u_L dt = 0 \quad \text{met } t_2 = t_1 + T \quad (4.253)$$

Als de volt-seconde-integraal niet gelijk is aan nul, zal de vermogensoverdracht ongewenste gevolgen hebben: de energie in de spoel neemt dan ongeremd toe.

Hoofdstuk 5 Meten

Inhoudsopgave

Grootheden, eenheden en standaarden	311
Eenheden	311
Standaarden	318
Grootheden en parameters	319
Meetonzekerheid	326
Meetfouten en foutverdelingen	326
Systeemspecificaties	330
Foutreductie	332
Meten van diverse grootheden	338
Elektrische grootheden	338
Magnetische grootheden	344
Thermische grootheden	347
Optische grootheden	351
Mechanische grootheden	354

Grootheden, eenheden en standaarden

Eenheden

Een **grootheid** is een kwantificeerbare (en daarmee meetbare) eigenschap van een object of een verschijnsel. Dit houdt in dat aan de grootheid naast een soort aanduiding (de **dimensie** of de **eenheid**) ook een getal kan worden toegekend. Een meetresultaat kan dus worden beschreven met de vergelijking

$$X = \{X\} \cdot [X] \quad (5.1)$$

met X de grootheid, $\{X\}$ de getalwaarde en $[X]$ de eenheid.

Meten impliceert een afspraak omtrent soorten van grootheden, standaardgrootheden en hun eenheden. Er zijn dus minstens evenveel eenheden als grootheden, maar aangezien de keuze van de eenheid in principe willekeurig is, kunnen er per grootheid verschillende eenheden optreden.

De fysische relaties tussen de grootheden worden uitgedrukt in de **definiërende vergelijkingen**:

$$X = c \cdot P^p \cdot Q^q \cdot R^r \dots \quad (5.2)$$

Hierin is c een getalsfactor, X, P, Q, R, \dots zijn grootheden, en p, q, r, \dots getallen.

Een groothedenvergelijking is te splitsen in een getalwaardenvergelijking en een eenhedenvergelijking:

$$\{X\} = c \cdot \{P\}^p \cdot \{Q\}^q \cdot \{R\}^r \dots \quad (5.3)$$

$$[X] = c \cdot [P]^p \cdot [Q]^q \cdot [R]^r \dots \quad (5.4)$$

Men streeft op praktische gronden naar beperking van het aantal standaarden en het aantal eenheden. In een consistent (= coherent) eenhedenstelsel zijn de eenheden van de verschillende grootheden zo gekozen, dat de getalsfactor gelijk is aan 1. Het is mogelijk om een stelsel op te bouwen met minder grondeenheden, bijvoorbeeld alleen lengte en tijd, in plaats van lengte, tijd en massa. Via de vergelijkingen $F = c_1 \cdot m \cdot a$ en $F = c_2 \cdot m_1 \cdot m_2 \cdot r^{-2}$ liggen de dimensies voor massa en kracht vast: zijn c_1 en c_2 dimensieloos, dan is in dat stelsel $[m] = [l]^3 \cdot [t]^{-2}$ en $[F] = [l]^4 \cdot [t]^{-4}$.

Het blijkt mogelijk het gebied van de mechanische, elektrische en magnetische eenheden op te bouwen met vier grond- of basiseenheden. Hiervoor

kiest men de *tijd* en de mechanische eenheden *lengte* en *massa* waaraan toegevoegd één elektrische eenheid, waarvoor men sinds 1960 de *elektrische stroom* kiest.

Uit deze definitie volgt voor de **magnetische permeabiliteit** van het vacuüm $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ kg m s}^{-2} \text{ A}^{-2}$. De andere eenheden kunnen hieruit door definiërende vergelijkingen worden afgeleid.

Het internationaal stelsel van eenheden **SI**¹ is het coherent eenhedenstelsel, gebaseerd op de vier genoemde eenheden, waaraan toegevoegd de *kelvin* (K), eenheid van thermodynamische temperatuur, de *candela* (cd), eenheid van lichtsterkte, en de *mol* (mol), eenheid van hoeveelheid stof.

De definities van de zeven grondeenheden zijn (zie tabel 5.1):

- de **meter** is de lengte van de weg die het licht in vacuüm aflegt in een tijd van (1/299.792.458) seconde {17e CGPM (1983), Rés.1}
- het **kilogram** is de eenheid van massa; het is gelijk aan de massa van het internationale prototype van het kilogram bewaard bij het BIPM²
- de **seconde** is de tijdsduur van 9.192.631.770 perioden van de straling overeenkomend met de overgang tussen de twee hyperfijn-niveaus van de grondtoestand van het atoom cesium 133
- de **ampère**³ is de constante stroom die, indien hij wordt onderhouden in twee evenwijdige rechtlijnige en oneindig lange geleiders van te verwaarlozen cirkelvormige doorsnede die geplaatst zijn in het luchtledige op een onderlinge afstand van 1 meter, tussen deze twee geleiders een kracht veroorzaakt gelijk aan 2×10^{-7} newton voor iedere meter lengte
- de **kelvin**⁴, eenheid van thermodynamische temperatuur, is het 1/273,16 gedeelte van de thermodynamische temperatuur van het tripelpunt van water
- de **mol** is de hoeveelheid stof van een systeem dat evenveel elementaire entiteiten bevat als er atomen zijn in 0,012 kilogram koolstof 12 (bij gebruikmaking van de mol moeten de elementaire entiteiten worden gespecificeerd; deze kunnen atomen, moleculen, ionen, elektronen, andere deeltjes of bepaalde groeperingen van dergelijke deeltjes zijn)

¹Système International d'Unités

²Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres

³naar André-Marie Ampère (1775-1836)

⁴naar William Thomson, eerste baron van Kelvin

- de **candela** is de lichtsterkte, in een gegeven richting, van een bron die een monochromatische straling met een frequentie van $540 \cdot 10^{12}$ hertz uitzendt en waarvan de stralingssterkte in die richting $1/683$ watt per steradiaal is

Aan de zeven grondeenheden zijn nog de volgende geometrische eenheden toegevoegd:

- de **radiaal** is de hoek tussen twee stralen van een cirkel, die op de omtrek een boog afsnijden waarvan de lengte gelijk is aan de straal
- de **steradiaal** is de ruimtehoek die, wanneer zijn top samenvalt met middelpunt van een bol, op die bol een oppervlakte uitsnijdt gelijk aan die van een vierkant met de straal van de bol als zijde.

In het **metrieke stelsel** worden veelvoudigen of delen van maten uitsluitend uitgedrukt in tientallen. Zij worden aangeduid met voorvoegsels, ontleend aan Griekse (positieve machten van 10) en Latijnse (negatieve machten) benamingen (pagina 3).

Sommige afgeleide grootheden hebben speciale namen en symbolen gekregen. Alle 22 afgeleide grootheden met SI-benamingen staan in tabel 5.2 en figuur 5.1.

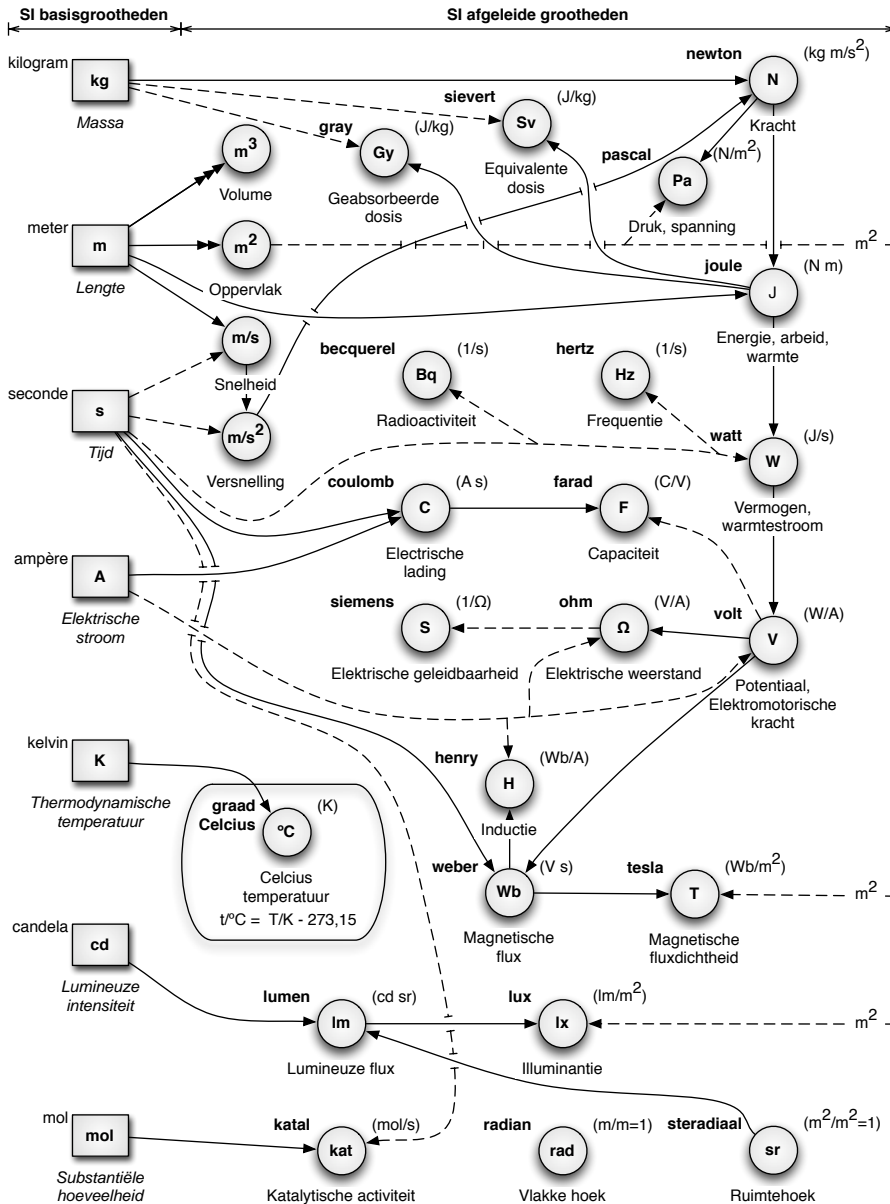
In tabel 5.3 op pagina 316 staan niet-SI grootheden met hun omrekeningsfactor naar SI-grootheden.

basisgrootheid	symbool	SI grondeenheid	naam
lengte	l, s	m	meter
massa	m	kg	kilogram
tijd	t	s	seconde
elektrische stroom	I	A	ampère
thermodynamische temp.	T	K	kelvin
lichtsterkte	I_r	cd	candela
hoeveelheid stof	n	mol	mol
vlakke hoek	α, φ	rad	radiaal
ruimtehoek	Ω	sr	steradiaal

Tabel 5.1: SI-basisgrootheden. Notatie-afspraken: symbolen voor grootheden *cursief*, voor eenheden recht

Tabel 5.2: afgeleide grootheden. Notatie-afpraak: namen van eenheden voluit geschreven beginnen met kleine letters, ook indien afgeleid van persoonsnamen.

afgeleide groetheid	naam	symbool	afgeleide SI-eenheid	in basiseenheden
vlakke hoek	radiaal	rad	-	$m \cdot m^{-1} = 1$
ruimtehoek	sterdiaal	sr	-	$m^2 \cdot m^{-2} = 1$
frequentie	hertz	Hz	-	s^{-1}
kracht	newton	N	-	$m \cdot kg \cdot s^{-2}$
druk, spanning	pascal	Pa	$N \cdot m^{-2}$	$m^{-1} \cdot kg \cdot s^{-2}$
energie, arbeid	joule	J	$N \cdot m$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2}$
vermogen	watt	W	$J \cdot s^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3}$
elektrische lading	coulomb	C	-	$s \cdot A$
elektrische spanning, potentiaal	volt	V	$W \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-1}$
capaciteit	farad	F	$C \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^4 \cdot A^2$
elektrische weerstand	ohm	Ω	$V \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-3} \cdot A^{-2}$
elektrische geleidbaarheid	siemens	S	$A \cdot V^{-1}$	$m^{-2} \cdot kg^{-1} \cdot s^3 \cdot A^2$
magnetische flux	weber	Wb	$V \cdot s$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
magnetische fluxdichtheid	tesla	T	$Wb \cdot m^{-2}$	$kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-1}$
(zelf)inductie	henry	H	$Wb \cdot A^{-1}$	$m^2 \cdot kg \cdot s^{-2} \cdot A^{-2}$
Celsius temperatuur	graad Celsius	$^{\circ}C$	-	K
lumineuze flux	lumen	lm	$cd \cdot sr$	$m^2 \cdot m^{-2} \cdot cd = cd$
illuminantie	lux	lx	$lm \cdot m^{-2}$	$m^2 \cdot m^{-4} \cdot cd = m^{-2} \cdot cd$
activiteit (van een radionuclide)	becquerel	Bq	-	s^{-1}
geabsorbeerde radioactieve dosis	gray	Gy	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-2}$
radioactieve dosisequivalent	sievert	Sv	$J \cdot kg^{-1}$	$m^2 \cdot s^{-2}$
catalytische activiteit	katal	kat	-	$s^{-1} \cdot mol$



Figuur 5.1: Schematische weergave van SI-eenheden en onderlinge verbanden (een doorgetrokken streep geeft vermenigvuldiging aan, een gestippelde een deling)

- Algemeen
- Wiskunde
- Informatica
- Fysica
- Meten
- Signalen
- Elektronica

Tabel 5.3: Andere grootheden met omrekeningsfactor naar SI. Verklaring status: b = blijvend erkend, d = per definitie, v = verboden te gebruiken.

	eenheid	status	symbool	in SI-eenheden
Algemeen	acre	v	ac	$4,046856 \cdot 10^3 \text{ m}^2$
	ångström	dv	Å	10^{-10} m
Wiskunde	are	d	a	10^2 m^2
	astronomische eenheid	bv	AE (AU)	$1,49600 \cdot 10^{11} \text{ m}$
	atmosfeer	dv	atm	$1,01325 \cdot 10^5 \text{ Pa}$
	atomaire massa-eenheid	b	u, dalton	$1,66054 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
	→ komt overeen met			931,49 MeV
Informatica	bar	bd	bar	10^5 Pa
	barn	dv	b	10^{-28} m^2
	British Thermal Unit (ISO)	dv	BTU	$1,055056 \cdot 10^3 \text{ J}$
	calorie	v	cal	4,184 J
	centimeter kwikdruk	v	cm Hg	$1,333 \cdot 10^3 \text{ Pa}$
Fysica	centimeter waterdruk	v	cm H ₂ O	$9,80665 \cdot 10^1 \text{ Pa}$
	chain	v	ch	$2,01168 \cdot 10^1 \text{ m}$
	curie	dv	Ci	$3,7 \cdot 10^{10} \text{ Bq}$
	dag	bd	d	$8,6400 \cdot 10^4 \text{ s}$
	dioptrie	bd	dpt	m^{-1}
	duitse hardheid	d	D°	10 mg CaO per liter
	dyne	dv	dyn	10^{-5} N
	elektronvolt	b	eV	$1,6021765 \cdot 10^{-19} \text{ J}$
	→ komt overeen met			$1,78268 \cdot 10^{-36} \text{ kg}$
	equivalent	dv	eq	mol
Meten	erg	dv	erg	10^{-7} J
	furlong	v	fur	$2,01168 \cdot 10^2 \text{ m}$
	gal	dv	Gal	10^{-2} Nkg^{-1}
	gallon (imperieel)	v	pt	$4,546 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$
	gauss	dv	G	10^{-4} T
	gon (decimale graad)	d	g, gon	0,01 v/e rechte hoek
	graad Celsius	d	°C	K (0°C = 273,15 K)
	graad Fahrenheit	v	°F	$5,556 \cdot 10^{-1} \text{ K}$ (0°F = 255,37 K)
	graad (hoek)	b	°	$1,745 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$
	Signalen	grammatoom		grat
grammolekuul			grol, gmol	mol molekulen
inch		dv	in, ″	$2,540 \cdot 10^{-2} \text{ m}$

eenheid	status	symbool	in SI-eenheden
jaar		a, j	$3,153600 \cdot 10^7$ s
karaat	bd	ct	$2 \cdot 10^{-4}$ kg
kilogramkracht	v	kgf	9,80665N
kilowattuur	d	kWh	$3,6 \cdot 10^6$ J
knoop	v		0,514 ms ⁻¹
lichtjaar	v		$9,461 \cdot 10^{15}$ m
liter	bd	l	10 ⁻³ m ³
maxwell	dv		10 ⁻⁸ Wb
micron	dv	μ	10 ⁻⁶ m
minuut (hoek)	b		$2,909 \cdot 10^{-4}$ rad
minuut (tijd)	bd	min,′	60 s
mijl (land)	v	min	$1,6093 \cdot 10^3$ m
mijl (zee)	v		$1,8532 \cdot 10^3$ m
normaliteit a	dv	aN	mol l ⁻¹
oersted		Oe	$\frac{1000}{4\pi} = 7,958 \cdot 10^1$ Am ⁻¹
ons	dv		10 ⁻¹ kg
ounce	v	oz (av)	$2,835 \cdot 10^{-2}$ kg
paardekracht	v	pk	$7,355 \cdot 10^2$ W
parsec	v	pc	$3,08572 \cdot 10^{16}$ m
pint (imperieel)	v	pt	$5,68261 \cdot 10^{-4}$ m ³
poise	dv	P	10 ⁻¹ kg m ⁻¹ s ⁻¹
pond	dv		$5 \cdot 10^{-1}$ kg
rad	dv	rd	10 ⁻² Gy= 10 ⁻² J kg ⁻¹
registerton	v		2,83 m ³
rem	dv		10 ⁻² Sv
rod	v	rd	5.0929 m
röntgen	v	R	$2,58 \cdot 10^{-4}$ C kg ⁻¹
rutherford	d	Rd	10 ⁶ Bq
seconde (hoek)	b	″	$4,84 \cdot 10^{-6}$ rad
stokes	dv	St	10 ⁻⁴ m ² s ⁻¹
tex	d	tex	10 ⁻⁶ kg m ⁻¹
ton	bd	t	10 ³ kg
torr (mm kwikdruk)	v	Torr	$1,33322 \cdot 10^2$ Pa
uur	bd	h, u	$3,6 \cdot 10^3$ s
var	bd	var	W
voet	v	ft,′	$3,048 \cdot 10^{-1}$ m
voltampère	bd	VA	W
yard	v	yd	$9,144 \cdot 10^{-1}$ m

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Standaarden

Voor elke basiseenheid zou een fysische realisatie beschikbaar moeten zijn: een **standaard**. De waarde van de grootheid die deze standaard representeert is dan bij afspraak gelijk aan 1. Alle moderne standaarden zijn gebaseerd op fundamentele natuurconstanten (zoals de constanten van Planck, h , en Boltzmann, k , en de lading van het elektron e), met uitzondering van het kilogram. Dit is een metalen cilinder (90% Pt, 10% Ir) met een hoogte gelijk aan zijn diameter, bewaard bij het Bureau International des Poids et Mesures, Sèvres, Frankrijk.

Op elektromagnetisch gebied zou men in overeenstemming met de definitie in het Internationale Stelsel van Eenheden het liefst een standaard van elektrische stroom realiseren. Dit kan echter niet voldoende reproduceerbaar en nauwkeurig worden uitgevoerd. Daarvoor in de plaats verwezenlijkt men de primaire standaarden van elektrische spanning en weerstand. Deze primaire standaarden bestaan bij voorkeur uit experimenten, waarbij gebruik wordt gemaakt van atomaire verschijnselen.

De standaard van elektrische spanning wordt verwezenlijkt door toepassing van het zgn. **Josephson effect**¹. Dit is een tunneleffect dat optreedt bij twee supergeleiders die door een zeer dunne (orde 1 nm) isolerende laag onderling zijn gescheiden. Men onderscheidt het DC- en het AC-Josephson effect. Het eerstgenoemde manifesteert zich wanneer een gelijkstroom door de junctie wordt gestuurd: onder een bepaalde waarde van die stroom gedraagt de junctie zich als een supergeleider. Indien men bovendien de junctie plaatst in een hoogfrequent elektromagnetisch veld, vertoont de stroomspanningskarakteristiek stapvormige sprongen. De spanning over de junctie voldoet aan de vergelijking:

$$V_j(N) = \frac{N \cdot f}{K_j} \quad (5.5)$$

met K_j de Josephson constante, gelijk aan $2e/h$, f de frequentie van het aangelegde veld en N een indicatie van het specifieke vlakke plateau in de I-V karakteristiek. Dus is, voor een specifiek niveau, de spanning bepaald door de frequentie en twee fundamentele natuurconstanten. Op 1 januari 1990 is de waarde van K_j vastgesteld op:

$$K_{j-90} = 483597,9 \text{ GHz} \cdot \text{V}^{-1}$$

¹naar Brian David Josephson (1940-nu)

De Josephson spanning ligt in de orde van enkele tientallen mV en heeft een relatieve reproduceerbaarheid beter dan 5×10^{-8} .

De standaard van elektrische weerstand wordt via impedantievergelijkingen afgeleid van een zgn. berekenbare condensator. Binnenkort is de toepassing van het **quantum Hall effect**¹ voor de standaard van elektrische weerstand te verwachten. Dit effect treedt op in heterojuncties (bijv. GaAsAl_xGa_{1-x}As) en in MOSFETs. In een sterk magnetisch veld en bij zeer lage temperaturen ($< 1,2$ K) is de weerstand gekwantiseerd: de V-I karakteristiek toont gebiedjes met een constante spanning (Hall plateaus). De weerstand van het *i*-de plateau wordt gegeven door:

$$R_H(i) = \frac{V_H(i)}{I} = \frac{R_k}{i} \quad (5.6)$$

met $R_k = h/e^2$ de **Von Klitzing constante**². Op 1 januari 1990 is de waarde van de Klitzing constante vastgesteld op exact

$$R_{H-90} = 25812,807 \Omega$$

met een reproduceerbaarheid beter dan 1×10^{-8} .

Grootheden en parameters

Classificaties

Grootheden worden op verschillende manieren in twee klassen verdeeld. Een mogelijke tweedeling is die in variabelen en constanten:

- **variabele:** grootheid met veranderlijke waarde, bijv. spanning, massa
- **constante:** grootheid met vaste getalswaarde, bijv. constante van Planck

Verder worden de grootheden verdeeld in scalars en vectoren:

- **scalar:** grootheid met alleen een grootte (bijv. temperatuur)
- **vector:** grootheid met een grootte en een richting (bijv. snelheid)

Een andere tweedeling is die in extensieve en intensieve grootheden: binnen elk fysisch domein (elektrisch, mechanisch enz.) kunnen twee variabelen worden gedefinieerd op zodanige wijze dat de dimensie van hun product gelijk is

¹naar Edwin Herbert Hall (1855-1938)

²naar Klaus Von Klitzing (1943-nu)

aan energie (of energiedichtheid); men noemt dit geconjugeerde grootheden. Voorbeelden (zie ook p. 405):

- mechanisch domein: druk T [N/m^2] en deformatie S [-];
- elektrische domein: elektrische veldsterkte E [V/m] en diëlektrische verplaatsing D [C/m^2];
- magnetische domein: magnetische inductie B [Wb/m^2] en magnetische veldsterkte H [A/m];
- thermische domein: temperatuur Q [K] en entropie σ [J/Km^3].

De dimensie van het product van elk paar is $\text{J}\times\text{m}^{-3}$ (energie per volume-eenheid). De variabelen T , E en Q worden extensieve of *across*-variabelen genoemd en de variabelen S , D en σ zijn intensieve- of *through*-variabelen. Zij hebben betrekking op *lumped models*, modellen waarbij de eigenschappen van een systeem geconcentreerd zijn gedacht in een tweepool (bijv. een impedantie).

- **intensieve variabele:** beschrijft een grootte die hetzelfde is voor beide aansluitpunten van een lumped element (bijv. een stroom);
- **extensieve variabele:** beschrijft een grootte als verschil tussen de aansluitpunten van een lumped element (bijv. een spanning).

Ten slotte zijn er de afhankelijke en onafhankelijke grootheden: natuurkundige wetten leggen relaties tussen variabelen die de toestand van een systeem beschrijven. Variabelen kunnen worden opgelegd aan het systeem en kunnen andere variabelen beïnvloeden. Men onderscheidt daarom:

- **onafhankelijke variabele:** een variabele opgelegd aan het systeem, bijv. een spanning;
- **afhankelijke variabele:** een variabele die van de onafhankelijke variabele het gevolg ondervindt, bijv. een stroom t.g.v. een aangelegde spanning.

Elke variabele kan zowel afhankelijk als onafhankelijk zijn, al naar gelang het gebruik van het systeem.

Optisch

In het optische domein onderscheiden we **radiometrische-** en **fotometrische grootheden**. Eerstgenoemde slaan op het gehele elektromagnetische spectrum: **straling**; fotometrische variabelen slaan alleen op het zichtbare deel ervan: **licht** ($0,35 < \lambda < 0,77$ [μm]) en zijn gerelateerd aan de internationale ooggevoeligheidskarakteristiek. Alle radiometrische grootheden hebben een tegenhanger in het fotometrische domein, zie tabel 5.4.

Tabel 5.4: Radiometrische en fotometrische grootheden (Engelse termen tussen haakjes)

		radiometrische grootheden		fotometrische grootheden	
	grootheid	symbool; definitie	eenheid	grootheid	eenheid
vermogen	stralingsenergie- stroom (<i>radiant flux</i>)	$P = dU/dt$	W	lichtstroom (<i>luminous flux</i>)	lumen (lm)
energie	stralingsenergie (<i>radiant energy</i>)	U	J	hoeveelheid licht (<i>luminous energy</i>)	lm·s
uitgestraald vermogen per oppervlakte	stralingsemittantie (<i>radiant emittance</i>)	$E_s = dP_s/dS$	$W \cdot m^{-2}$	lichtemittantie (<i>luminous emittance</i>)	$lm \cdot m^{-2} =$ lux
invallend vermogen per oppervlakte	bestralingssterkte (<i>irradiance</i>)	$E_d = dP_d/dS$	$W \cdot m^{-2}$	verlichtingssterkte (<i>illuminance</i>)	$lm \cdot m^{-2} =$ lux
stralingsvermogen per eenheid van ruimtehoek	stralingssterkte (<i>radiant intensity</i>)	$I = dP_s/d\Omega$	$W \cdot sr^{-1}$	lichtsterkte (<i>luminous intensity</i>)	$lm \cdot sr^{-1} =$ candela (cd)
vermogen per power per eenheid van ruimtehoek en oppervlakte	radiantie (<i>radiance</i>)	$L = dI/dS_p$	$W \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1}$	luminantie (<i>luminance</i>)	$lm \cdot m^{-2} \cdot sr^{-1} =$ $cd \cdot m^{-2}$

Elektrisch en magnetisch

De volgende tabel toont de belangrijkste grootheden voor het elektrische en magnetische domein.

grootheid	symbool	eenheid
elektrische stroom	I	A (ampere)
stroomdichtheid	J	$A \cdot m^{-2}$
lading	Q	C (coulomb) = A·s
diëlektrische verplaatsing	D	$C \cdot m^{-2}$
elektrische polarisatie	P	$C \cdot m^{-2}$
elektrische veldsterkte	E	$V \cdot m^{-1}$
potentiaalverschil	V	$W \cdot A^{-1}$
magnetische flux	Φ	Wb (weber) = J·A ⁻¹
magnetische inductie	B	T (tesla) = Wb·m ⁻²
magnetische veldsterkte	H	$A \cdot m^{-1}$
magnetisatie	M	$A \cdot m^{-1}$

Tabel 5.5: Elektrische en magnetische grootheden

Materiaaleigenschappen worden aangeduid met parameters die niet afhangen van de dimensies of de hoeveelheid materiaal; daar tegenover staan eigenschappen die (mede) afhangen van de dimensies en de constructie van het systeem: (vergelijk weerstand R in Ω resp. de resistiviteit ρ in Ωm). Zie tabel 5.6 van elektrische en magnetische parameters.

De **elektrische permittiviteit** is het product van de permittiviteit van vacuum ϵ_0 en de relatieve permittiviteit (ook wel **diëlektrische constante**) ϵ_r . Op dezelfde manier is de magnetische permeabiliteit het product van de **magnetische permeabiliteit** van vacuum μ_0 en de relatieve permeabiliteit μ_r . Getalswaarden:

$$\epsilon_0 = (8,85416 \pm 0,00003) \times 10^{-12} [F \cdot m^{-1}]; \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [Vs \cdot Am^{-1}]$$

De relatieve permittiviteit en relatieve permeabiliteit beschrijven de diëlektrische en de magnetische eigenschappen van een materiaal.

Tabel 5.7 toont de analogie tussen relaties in het elektrische en in het magnetische domein. Parameters A en l zijn de doorsnede en de lengte van de (cilindervormige) component. De term $n \cdot l$ (eenheid "ampere-windingen" of *ampere-turns*) is het product van het aantal windingen van en de stroom door de spoel.

eigenschap	symp.	eenheid	definitie
spec. weerstand (<i>resistivity</i>)	ρ	$\Omega \cdot \text{m}$	$E = \rho \cdot J$
weerstand (<i>resistance</i>)	R	Ω (ohm)	$V = R \cdot I$
geleidbaarheid (<i>conductivity</i>)	σ	$\text{S} \cdot \text{m}^{-1} = \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$	$\sigma = 1/\rho$
geleiding (<i>conductance</i>)	G	S (siemens)	$G = 1/R$
capaciteit (<i>capacitance</i>)	C	F (farad)	$Q = C \cdot V$
permittiviteit (<i>permittivity</i>)	ε	$\text{F} \cdot \text{m}^{-1}$	$D = \varepsilon \cdot E$
zelfinductie (<i>self-inductance</i>)	L	H (henry)	$\Phi = L \cdot I$
wederzijdse inductie (<i>mut. ind.</i>)	M	H	$\Phi_{ab} = M \cdot I$
reluctantie (<i>reluctance</i>)	R_m	H^{-1}	$n \cdot I = R_m \cdot \Phi$
permeabiliteit (<i>permeability</i>)	μ	$\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$	$B = \mu \cdot H$

Tabel 5.6: Elektrische en magnetische parameters (Engels tussen haakjes)

elektrisch domein	magnetisch domein
$E = \frac{1}{\sigma} \cdot J$	$H = \frac{1}{\mu} \cdot B$
$V = \int E \cdot dl$	$n \cdot I = \int H \cdot dl$
$I = \iint J \cdot dA$	$\Phi = \iint B \cdot dA$
$V = R_e \cdot I$	$n \cdot I = R_m \cdot \Phi$
$R_e = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{l}{A}$	$R_m = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{l}{A}$
$C = \varepsilon \frac{A}{d}$	$L = n^2 \mu \frac{A}{l}$

Tabel 5.7: Analogie tussen elektrische en magnetische grootheden

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Mechanische grootheden

Het verband tussen de (mechanische) druk T en de rek S wordt weergegeven met de **wet van Hooke**:

$$T = c \cdot S \text{ [N}\cdot\text{m}^{-2}] \text{ of } S = s \cdot T \text{ [-]} \quad (5.7)$$

met s de **compliantie** en $c = 1/s$ de **elasticiteit**.

Het mechanische domein kent 6 graden van vrijheid: 3 voor translatie en 3 voor rotatie. Een longitudinale druk in de z -as, T_z , kan in drie richtingen (x , y en z) het materiaal doen deformeren, resulterend in de rekcomponenten S_z , S_x en S_y . Een schuifkracht in het z -vlak, T_{xy} , kan het materiaal in drie richtingen doen torderen, resulterend in de torsiecomponenten S_{xy} , S_{xz} en S_{yz} . Soms kan een longitudinale kracht resulteren in een torsie, een effect dat dan bijvoorbeeld beschreven wordt met de vergelijking $S_{yz} = s_{yzz} \cdot T_z$. In het algemeen is dus het verband tussen druk en rek te schrijven als:

$$T_{ij} = c_{ijkl} \cdot S_{kl} \quad \text{resp.} \quad S_{ij} = s_{ijkl} \cdot T_{kl} \quad (5.8)$$

met i , j , k en l gelijk aan x , y en z , en $T_{xx} = T_x$ enz. Om het schrijfwerk te bekorten heeft men de volgende notatie ingevoerd:

$$\begin{array}{ll} xx \rightarrow 1 & yz = zy \rightarrow 4 \\ yy \rightarrow 2 & xz = zx \rightarrow 5 \\ zz \rightarrow 3 & xy = yx \rightarrow 6 \end{array} \quad (5.9)$$

Daarmee wordt de wet van Hooke:

$$T_\mu = c_{\mu\lambda} \cdot S_\lambda \quad \text{resp.} \quad S_\lambda = s_{\lambda\mu} \cdot T_\mu \quad (5.10)$$

met $\lambda, \mu = 1 \dots 6$. De compliantie-matrix bevat dus 36 elementen. Uitgeschreven in matrixvorm wordt dit:

$$\begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{16} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{61} & c_{62} & \dots & c_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_6 \end{pmatrix} \quad \text{resp.} \quad (5.11)$$

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{16} \\ s_{21} & s_{22} & \dots & s_{26} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{61} & s_{62} & \dots & s_{66} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \\ \vdots \\ T_6 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Materiaalparameters

Een systeem, component of materiaal legt relaties tussen intensieve en extensieve grootheden. Zo hangen de intensieve variabelen T , Θ en E onderling samen met de extensieve variabelen S , σ en D via de eigenschappen van het materiaal of de component. Men kan de extensieve variabelen uitdrukken in de intensieve variabelen of andersom; het eerste geval levert:

$$S = S(T, \Theta, E) \quad (5.13)$$

$$\sigma = \sigma(T, \Theta, E) \quad (5.14)$$

$$D = D(T, \Theta, E) \quad (5.15)$$

Beperken we ons tot lineaire relaties dan geldt:

$$dS = s^{E,\Theta} dT + d^{\Theta} dE + \alpha^E d\Theta \quad (5.16)$$

$$d\sigma = \alpha^E dT + p^T dE + (\rho \cdot c^{T,E} / \Theta) d\Theta \quad (5.17)$$

$$dD = d^{\Theta} dT + \varepsilon^{T,\Theta} dE + p^T d\Theta \quad (5.18)$$

De superscripten van de coëfficiënten duiden op de constantheid van de betreffende parameters; bijvoorbeeld: $s^{E,\Theta}$ is de compliantie bij constante veldsterkte E en temperatuur Θ . De namen van de negen bijbehorende fysische effecten staan in onderstaand schema.

elasticiteit	converse piëzo-elektriciteit	thermische uitzetting
piëzo-calorisch effect	elektro-calorisch effect	warmte-capaciteit
directe piëzo-elektriciteit	permittiviteit	pyro-elektriciteit

symbool	parameter	eenheid
s	compliantie, elasticiteit	$\text{m}^2 \text{N}^{-1}$
d	piëzo-elektrische constante	$\text{mV}^{-1} = \text{CN}^{-1}$
α	thermische uitzettingscoëfficiënt	K^{-1}
p	pyro-elektrische constante	$\text{Cm}^{-2} \text{K}^{-1}$
ε	permittiviteit; diëlektrische constante	Fm^{-1}
$c^{E,T}$	(specifieke) warmtecapaciteit	$\text{Jkg}^{-1} \text{K}^{-1}$

Tabel 5.8: Namen en eenheden van diverse materiaalparameters

In niet-homogene materialen hangen al deze parameters af van de richting, welke wordt aangeduid met subscripts. Voorbeeld: d_{15} is de piëzo-elektrische constante die beschrijft hoeveel lading in de x -richting (1-richting) wordt opgewekt per eenheid van moment rond de y -as (5-richting).

Meetonzekerheid

Meetfouten en foutverdelingen

Soorten meetfouten

Additieve en multiplicatieve fouten:

- Een **additieve fout** is een foutsignaal dat bij het meetsignaal is opgeteld, bijvoorbeeld offset of ruis.
- Een **multiplicatieve fout** is een afwijking in de overdracht of de gevoeligheid van het systeem (bijvoorbeeld door temperatuurverandering). Het foutsignaal en het meetsignaal vormen een product.

Absolute en relatieve fouten:

- De **absolute fout** is de afwijking Δx van de werkelijke waarde x_0 t.o.v. de gemeten waarde x : $\Delta x = |x - x_0|$
- De **relatieve fout** wordt gegeven door:

$$\left| \frac{\Delta x}{x} \right| = \left| \frac{x - x_0}{x} \right| \quad (5.19)$$

De absolute fout en de relatieve fout zijn dus altijd positief, tenzij expliciet vermeld. De werkelijke waarde x_0 wordt geacht te liggen in het interval $[x - \Delta x, x + \Delta x]$.

Systematische en toevallige meetfouten: een **systematische fout** is een fout die bij herhaling van de meting even groot is. Dit soort fouten kan bijvoorbeeld worden veroorzaakt door verkeerde of verlopen kalibratie, door offset of door een niet ideale aanpassing.

Toevallige meetfouten hebben bij herhaling van de meting steeds een andere waarde. Mogelijke oorzaken zijn storingen van buitenaf (bijvoorbeeld temperatuurveranderingen), ruis, trillingen, enzovoort. Door het onvoorspelbare karakter van de gemeten waarde kan er bij het optreden van toevallige fouten niet gesproken worden van één bepaalde foutgrootte, maar slechts van de kans dat een fout met een zekere foutgrootte optreedt.

Foutverdelingen

Toevallige fouten kunnen worden beschreven met stochastische parameters. Om de grootte van de fout te bepalen, moet de foutverdelingsfunctie bekend zijn. Veel voorkomende foutverdelingsfuncties zijn (zie ook p. 101):

- De **normale verdeling** (of **Gaussische verdeling**) treedt veelvuldig op in fysische verschijnselen. Voorbeeld: thermische ruis van een weerstand.
- De **uniforme verdeling** wordt gehanteerd bij AD-conversie en andere afrondingsprocessen (kwantisatie).
- De **Poisson-verdeling**¹ is een discrete verdeling en modelleert het proces van tellen gedurende een zeker tijdsinterval. Voorbeelden: fotodetector (de deeltjes zijn fotonen); regenmeter (de deeltjes zijn druppels); verkeerstellingen (de deeltjes zijn voertuigen), enz. De parameter λ is het gemiddelde aantal. Voor grote λ kan de Poissonverdeling worden benaderd door de normale verdeling, met $\mu = \lambda$ en $\sigma = \sqrt{\lambda}$.
- De **binomiale verdeling** is eveneens discreet en treedt op in experimenten bestaande uit N onafhankelijke gebeurtenissen en heeft als uitkomst een Boolse variabele. P is de kans op de waarde *true* en dus is $1 - P$ de kans op de uitkomst *false*. Voor grote N correspondeert de binomiale verdeling met de normale verdeling, met $\mu = NP$ en $\sigma = \sqrt{NP(1 - P)}$.

Voor het beschrijven van een stochastische fout kan vaak worden volstaan met globale waarden. Twee belangrijke parameters daarbij zijn:

- de **verwachtingswaarde** (gemiddelde waarde):

$$E\{x\} = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx \quad (5.20)$$

- de **standaardafwijking**: $\sigma = \sqrt{\text{var}(x)}$, met

$$\text{var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_a)^2 f(x) dx \quad (5.21)$$

Men noemt $\sigma^2 = \text{var}(x)$ de variantie.

De variantie is een maat voor de grootte van de variaties rond het gemiddelde μ en is in feite het gemiddelde van het kwadraat van de afwijkingen van de meetwaarden ten opzichte van de verwachtingswaarde. Tabel 5.10 toont de kans dat de waarde van een normaal verdeelde stochastische variabele meer dan een aantal maal σ afwijkt van de gemiddelde waarde.

¹naar Siméon-Denis Poisson (1781-1840)

	verwachtingswaarde	standaarddeviatie
normale verdeling	μ	σ
uniforme verdeling	$\frac{1}{2}(A + B)$	$\frac{1}{\sqrt{12}}(B - A)$
binomiale verdeling	NP	$\sqrt{NP(1 - P)}$
Poisson verdeling	λ	$\sqrt{\lambda}$

Tabel 5.9: Verwachtingswaarde en standaarddeviatie van verschillende verdelingsfuncties

Interval	kans P
$\mu + 0,6745\sigma$	0,5000
$\mu + \sigma$	0,3172
$\mu + 2\sigma$	0,0454
$\mu + 3\sigma$	0,0028

Tabel 5.10: Overschrijdingskansen bij verschillende sigma-grenzen

Hiermee kan men de betrouwbaarheid van een schatting van een grootheid bepalen. Bij toevallige fouten is het niet mogelijk om een maximaal mogelijke fout te specificeren, aangezien de kans op een nog grotere fout nooit nul is. Indien men toch het begrip ‘maximaal mogelijke fout’ gebruikt dan bedoelt men hiermee meestal een fout van 3σ , hetgeen betekent dat de werkelijke fout met een kans van 0,9972 kleiner is dan 3σ .

In geval van een beperkt aantal (discrete) metingen gaat de continue kansdichtheidsfunctie over in een **histogram**. Het gemiddelde x_g is nu:

$$x_g = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (5.22)$$

waarbij n het aantal metingen is en x_i de gemeten waarden voorstelt. De variantie is in dit geval:

$$V(x) = \sigma^2(x) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - x_g)^2 \quad (5.23)$$

Voorbeeld: Een grootheid X wordt bepaald door een reeks metingen; de uitkomst is A_i , met een spreiding σ_i . Men herhaalt dit experiment n maal.

Het gemiddelde is $X_g = (1/n)\Sigma A_i$. Aangezien $dA_g/dA_i = 1/n$ volgt voor de spreiding met betrekking tot het totaal van de meetwaarden door toepassing van de regels: $\sigma_g^2 = n \cdot \sigma_i^2 \cdot (1/n^2) = \sigma_i^2/n$, zodat $\sigma_g = \sigma_i/\sqrt{n}$. De spreiding in een

reeks meetresultaten neemt dus af met de wortel uit het aantal meetwaarden (**wortel-n wet**).

Samengestellen van fouten

Als de waarde van een grootheid berekend wordt uit de gemeten waarden van andere grootheden, dan zullen de meetfouten doorwerken in het uiteindelijke berekende resultaat. We geven enkele regels waarmee men in de praktijk de grootte van de resulterende fout kan berekenen.

Als een grootheid z bepaald wordt als functie van meerdere parameters ($z = f(a, b, c, \dots)$), ieder met een gegeven absolute fout ($\Delta a, \Delta b, \Delta c, \dots$), dan geldt voor de fout in z :

$$\Delta z = \left| \frac{\partial f(a, b, c, \dots)}{\partial a} \right| \Delta a + \left| \frac{\partial f(a, b, c, \dots)}{\partial b} \right| \Delta b + \left| \frac{\partial f(a, b, c, \dots)}{\partial c} \right| \Delta c + \dots \quad (5.24)$$

Uit de uitdrukking voor de absolute fout kan de volgende relatie voor de relatieve fout worden afgeleid:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta z}{z} \right| &= \left| \frac{\partial f(a, b, c, \dots)}{\partial a} \cdot \frac{a}{f(a, b, c, \dots)} \cdot \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\partial f(a, b, c, \dots)}{\partial b} \cdot \frac{b}{f(a, b, c, \dots)} \cdot \frac{\Delta b}{b} \right| \\ &+ \left| \frac{\partial f(a, b, c, \dots)}{\partial c} \cdot \frac{c}{f(a, b, c, \dots)} \cdot \frac{\Delta c}{c} \right| + \dots \end{aligned} \quad (5.25)$$

Nu zijn enkele praktische rekenregels af te leiden. Stel $z = f(a, b)$ waarbij $z = z_0 \pm \Delta z$, $a = a_0 \pm \Delta a$ en $b = b_0 \pm \Delta b$, dan gelden de volgende regels:

- bij optelling ($z = a + b$) of aftrekking ($z = a - b$) dienen de absolute fouten te worden opgeteld: $\Delta z = \Delta a + \Delta b$
- bij vermenigvuldiging ($z = a \cdot b$) of deling ($z = a/b$) dienen de relatieve fouten te worden opgeteld: $\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = \left| \frac{\Delta a}{a} \right| + \left| \frac{\Delta b}{b} \right|$
- bij machtsverheffing ($z = a^n$) moet de relatieve fout van de variabele worden vermenigvuldigd met de modulus van de exponent: $\left| \frac{\Delta z}{z} \right| = n \cdot \left| \frac{\Delta a}{a} \right|$

Voor het bepalen van het gemiddelde en de variantie als functie van de gemiddelde waarden en de varianties van de variabelen gaat men als volgt te werk. Indien $z = f(a, b, c, \dots)$, dan geldt voor de gemiddelde waarde van z :

$$z_g = f(a_g, b_g, c_g, \dots) \quad (5.26)$$

terwijl voor de variantie van z geldt:

$$\sigma_z^2 = \left(\frac{\partial f(a, b, c, \dots)}{\partial a} \right)^2 \sigma_a^2 + \left(\frac{\partial f(a, b, c, \dots)}{\partial b} \right)^2 \sigma_b^2 + \left(\frac{\partial f(a, b, c, \dots)}{\partial c} \right)^2 \sigma_c^2 + \dots \quad (5.27)$$

Met de bovenstaande uitdrukkingen voor z_g en σ (de zogenaamde **foutvoortplantingsregel van Gauss**) kan men de gemiddelde waarde en de variantie bepalen van een eindresultaat van een aantal waarnemingen waarbij toevallige fouten optreden. De regel geldt behalve voor normale verdelingen ook voor andere kansdichtheidsfuncties.

Systeemspecificaties

Eigenschappen van een meetsysteem en afwijkingen van het ideale gedrag worden door de fabrikant gespecificeerd. Hier volgt een selectie van de voornaamste specificaties:

- **Offset** Meestal wordt hier de ingangsoffset bedoeld. Bij een ingangssignaal 0 moet het uitgangssignaal ook 0 zijn; in de praktijk is er toch een uitgangssignaal aanwezig: de uitgangsoffset. De ingangsoffset wordt gevonden door de uitgangsoffset te delen door de systeemoverdracht (gevoeligheid).

- **Nulpuntsdrift** of kortweg **drift** Dit is het relatief langzame verloop in de offset, bijvoorbeeld ten gevolge van variaties in de temperatuur, in de voedingsspanning of door andere, minder goed begrepen effecten als veroudering. Temperatuurdrift wordt gespecificeerd in termen van offset per K of °C, voedingsspanningsdrift in offset per volt, korte- of langduurstabieleit in offset per 24 uur, per maand of nog langer. Het (langzame) verloop in de *overdracht* wordt ook aangeduid met drift, maar deze dient afzonderlijk te zijn gespecificeerd, bijv. in %/K.

- **Niet-lineariteit** Gedefinieerd als de maximale afwijking van de overdracht ten opzichte van een gespecificeerde rechte lijn. Men onderscheidt onder meer:

- eindpunt niet-lineariteit (*end-point non-linearity*): de rechte lijn loopt door de twee gecalibreerde eindpunten van het meetbereik;
- *best fit* of *least square* niet-lineariteit: gebaseerd op een rechte lijn met de eigenschap dat de kwadratische afwijking met de werkelijke gevoeligheidscurve minimaal is.

- **Hysterese** Het maximale verschil tussen de berekende ingangssignalen bij een experiment waarbij de meetgrootte eerst toeneemt over een bepaald gebied (meestal 10% – 90% FS¹) en dan terugkeert tot de startwaarde.
- **Resolutie** De kleinst waarneembare verandering in de te bepalen meetgrootte. Voorbeeld: bij een AD-omzetter is de resolutie op zijn best $\frac{1}{2}$ LSB.
- **Ruis** Net als offset wordt ook ruis (gegenereerd door de interne componenten van het systeem) gemodelleerd met stoorbronnen aan de ingang. De ruis van alle componenten tezamen kan worden vertolkt met slechts twee bronnen aan de ingang: een ruisstroom en een ruisspanning.

Bij de gespecificeerde waarden van de ruisstroom en -spanning moet ook de bandbreedte zijn vermeld. Voor **thermische ruis** (constant ruisvermogen over een breed frequentiegebied) volstaat het de ruis te specificeren per eenheid van bandbreedte. In geval van stroomruis is dat in termen van $A/\sqrt{\text{Hz}}$, bij spanningsruis in $V/\sqrt{\text{Hz}}$. Immers: het vermogen hangt kwadratisch af van spanning of stroom.

Een ander type ruis is **1/f ruis** (*one-over-f noise*), een term die staat voor een verzameling van ruisverschijnselen waarvan het spectrale ruisvermogen evenredig is met f^{-n} , met $n = 1$ tot 2.

- **Bandbreedte** Dit is het frequentiegebied dat wordt gemarkeerd door de (laagste en hoogste) frequentie waarbij de vermogensoverdracht voor sinusvormige signalen is afgenomen tot de helft van de nominale overdracht. Voor spannings- en stroomoverdrachten is het criterium $1/\sqrt{2}$ van de nominale overdracht.
- **Common mode rejectie** De **CMRR**² kwantificeert het onderscheidend vermogen van een systeem t.a.v. gemeenschappelijke signalen (**CM**³) en verschilsignalen (**DM**⁴). Stel de twee ingangssignalen van een verschilmeetsysteem zijn x_1 en x_2 en het uitgangssignaal is x_o . Het verschilsignaal is $x_d = x_1 - x_2$ en het gemeenschappelijke signaal is $x_c = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$. De verhouding van de overdracht voor DM en CM signalen is de CMRR, dus: $\text{CMRR} = A_d/A_c$, met $A_d = x_o/x_d$ en $A_c = x_o/x_c$.

¹full scale

²common mode rejection ratio

³common mode

⁴differential mode

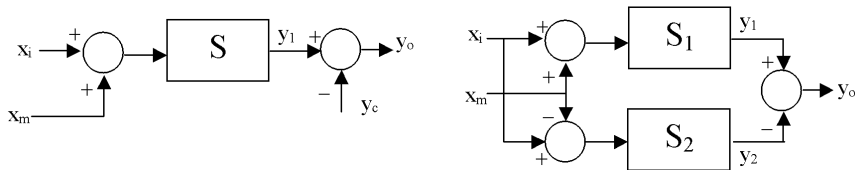
Een van nul verschillende CMRR geeft aanleiding tot een *additieve* fout in het gemeten signaal.

Foutreductie

Meetfouten zijn niet altijd te vermijden, maar kunnen wel worden gereduceerd door gebruik te maken van foutreducerende technieken. We noemen hier vijf methoden: compensatie (balanceren), terugkoppeling (*feedback*), filteren, modulatie en correctie.

Compensatie

Figuur 5.2 geeft het principe weer van een meetsysteem met **gebalanceerde** ingangssensoren. De te meten grootheid x_m wordt aangeboden aan twee sensoren met gelijke doch tegengestelde gevoeligheid voor de meetgrootheid (bijv. twee rekstroomkjes, de ene belast op **rek**, de ander gelijktijdig op **stuik**). Beide sensoren ondervinden het effect van een storende grootheid x_i (*interferentie*). De beide uitgangssignalen worden van elkaar afgetrokken (bijv. met een instrumentatieversterker of brugschakeling (p. 343)); het verschil is onafhankelijk van het stoorsignaal.



Figuur 5.2: a) interferentie x_i en compensatie y_c b) compensatie door balanceren

De effectiviteit van de methode wordt bepaald door de mate van symmetrie van de beide sensoren of de balansconfiguratie. Uit de figuur volgt:

$$y_1 = S_{m1}x_m + S_{i1}x_i \quad (5.28)$$

$$y_2 = -S_{m2}x_m + S_{i2}x_i \quad (5.29)$$

met S_{mk} en S_{ik} de gevoeligheden voor de meetgrootheid en de stoorgrootheid. Daarmee wordt het uitgangssignaal:

$$y_o = (S_{m1} + S_{m2})x_m + (S_{i1} - S_{i2})x_i \quad (5.30)$$

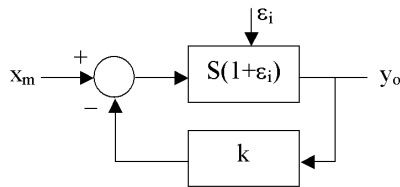
De gevoeligheden S_{m1} and S_{m2} zijn (vrijwel) gelijk, zodat:

$$y_o = 2S_m x_m + \Delta S_i x_i = 2S_m \left(x_m + \frac{\Delta S_i}{2S_m} x_i \right) \quad (5.31)$$

De reciproke van de term $\Delta S_i / 2S_m$ is op te vatten als de CMRR van het verschilmeetsysteem.

Terugkoppeling

Het basisprincipe van *feedback* is weergegeven in figuur 5.3.



Figuur 5.3: basisprincipe van *feedback*

Het systeem heeft een nominale overdracht S , maar is behept met een multiplicatieve fout: $S(1 + \varepsilon_i)$. Een fractie k van de uitgang wordt afgetrokken van de ingang. Uit de klassieke regeltechniek volgt de nieuwe overdracht S_f :

$$S_f = \frac{S}{1 + S \cdot k} \quad (5.32)$$

Een verandering of fout dS in de oorspronkelijke systeemoverdracht S zien we terug in een fout in de overdracht van het teruggekoppelde systeem:

$$\frac{dS_f}{S_f} = \frac{1}{1 + kS} \cdot \frac{dS}{S} \quad (5.33)$$

De relatieve fout in het oorspronkelijke systeem wordt gereduceerd met een factor gelijk aan de *loop gain* kS van het systeem. De overdracht zelf is gedaald met dezelfde factor. Voorwaarden voor een effectieve foutreductie zijn:

- $kS \gg 1$
- stabiel terugkoppel-element k

Filtering

Veel fouten kunnen worden voorkomen door het systeem af te schermen voor de invloed van stoorgrootheden (*shielding*). Daarvoor bestaan verschillende technieken, afhankelijk van de aard en het domein van de storende grootheid. Enkele voorbeelden:

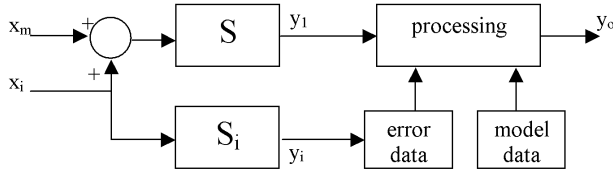
- *capacitieve* overspraak van stoorsignalen (via de capaciteit tussen stoorbron en ingang van het meetsysteem); remedie: een *geaarde* afscherming van de ingang van het systeem (bijv. coaxiale kabels).
- *magnetische wisselvelden* induceren stoorspanningen in de lus waar de ingang van het systeem deel van uitmaakt; remedies: magnetische afscherming, twisten van toevoerdraden (verkleint het lusoppervlak).
- verandering van de *omgevingstemperatuur* veroorzaakt drift; remedies: thermische afscherming, temperatuurregeling.
- *optische* meetsystemen kunnen hinder ondervinden van lichtbronnen uit de omgeving (zonlicht, lamplicht); remedie: optisch filter aan de ingang van het meetsysteem. De frequenties van de stoorbron en het meetsignaal moeten ver van elkaar liggen om effectief te kunnen filteren (zie ook *modulatie*).
- *schokken* en *trillingen* kunnen het meetresultaat ongunstig beïnvloeden; remedie: verende ophanging, mechanische demping.

Correctie

Indien aard en grootte van de storing bekend zijn, kan het meetsignaal voor het effect ervan worden gecorrigeerd. Er zijn twee strategieën: statische en dynamische correctie.

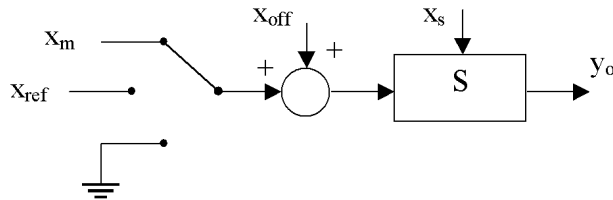
In het eerste geval wordt het verstoorde meetsignaal achteraf gecorrigeerd, op basis van kennis van de storing. Is de fout bekend (en constant), dan kan hiervoor eenvoudig worden gecorrigeerd (bijv. linearisering d.m.v. een *look-up table*). Is de storing niet bekend, dan kan deze afzonderlijk worden gemeten met een extra sensor (bijv. temperatuurcorrectie). Beide methodes staan afgebeeld in figuur 5.4.

Dynamische correctie vergt een bijzonder ontwerp van het meetsysteem. Een bekend voorbeeld is de zogenaamde **driepuntsmethode**, zie figuur 5.5. Het systeem heeft last van additieve fouten ten gevolge van stoorsignalen x_{off} en van multiplicatieve fouten ε_s ten gevolge van stoorsignalen x_s . De ingang van het meetsysteem wordt beurtelings aangesloten op de te meten groot-



Figuur 5.4: Foutcorrectie met een extra sensor of modeldata

heid (resultaat y_{o1}), aan aarde gelegd (resultaat y_{o2}) en verbonden met een referentiegrootheid (resultaat y_{o3}).



Figuur 5.5: Driepuntsmethode

De drie uitgangssignalen zijn achtereenvolgens:

$$y_{o1} = S(1 + \epsilon_s)(x_m + x_{off}) \tag{5.34}$$

$$y_{o2} = S(1 + \epsilon_s)(x_{off}) \tag{5.35}$$

$$y_{o3} = S(1 + \epsilon_s)(x_{ref} + x_{off}) \tag{5.36}$$

Hieruit volgt voor de te meten grootheid:

$$x_m = \frac{y_{o1} - y_{o2}}{y_{o3} - y_{o2}} x_{ref} \tag{5.37}$$

Beide typen fouten worden volledig geëlimineerd zolang deze fouten constant blijven gedurende de drie metingen. De methode werkt alleen indien het mogelijk is de ingang van het systeem te “aarden” (ingangssignaal nul maken) en er een referentie voorhanden is.

Modulatie

Door de te meten grootheid te **moduleren** met behulp van een draaggolf (*carrier*) wordt het frequentiespectrum van het meetsignaal verschoven naar een

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

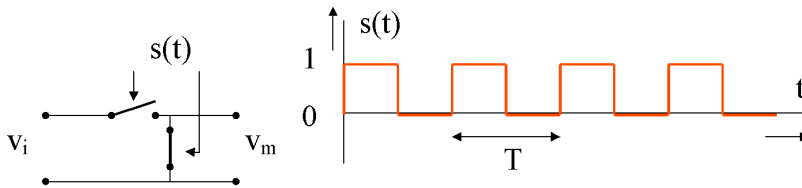
Meten

Signalen

Elektronica

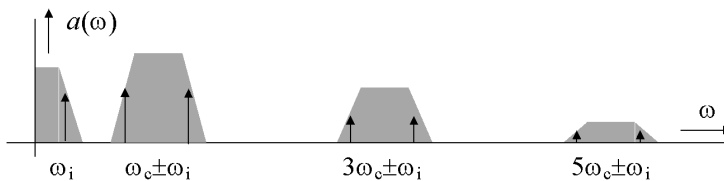
gebied rond die draaggolfrequentie (frequentieconversie). Twee middelen om meetsignalen te moduleren zijn de schakelmodulator en de brugmodulator.

Een **schakelmodulator** schakelt het meetsignaal periodiek aan en uit. In het elektrische domein gaat dit met een set van elektronische schakelaars (figuur 5.6a); bij een optisch systeem gebeurt dit door de hulpbron te moduleren of, wanneer de bron zelf de te meten grootte levert, met een zogenaamd **chopperwiel** (een draaiende schijf met openingen), zoals bijvoorbeeld bij pyrometrische metingen. De bewerking komt erop neer dat het meetsignaal wordt vermenigvuldigd met een schakelsignaal $s(t)$ (figuur 5.6b).



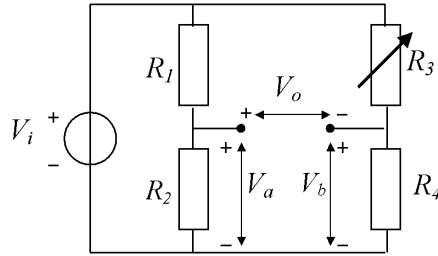
Figuur 5.6: elektronische schakelmodulator b) schakelsignaal

Deze manier van moduleren geeft aanleiding tot een laagfrequent (LF) band plus een groot aantal paren van zijbanden in het spectrum (figuur 5.7). Na bandfiltering resteert alleen de band rond de draaggolfrequentie. Hetzelfde effect wordt bereikt door de polariteit van het ingangssignaal periodiek te wisselen; er ontstaan dan geen LF-band.



Figuur 5.7: spectrum na schakelmoduleren

Een **meetbrug** met wisselspanning is een voorbeeld van een **brugmodulator** (figuur 5.8). De brug wordt aangesloten op een wisselspanning V_i (meestal een sinus of een blokvormig signaal), welke dienst doet als draaggolf. De uitgangsspanning V_o wordt beïnvloed door het actieve element in de brug, hier R_3 . De uitgang is een amplitude-gemoduleerd signaal (AM) zonder draaggolf.



Figuur 5.8: Meetbrug

Na modulatie kan het meetsignaal ongestraft worden versterkt (de stoorbronnen van de versterker hebben doorgaans een laagfrequent karakter: offset, drift, $1/f$ ruis enz.). Met **synchrone detectie** wordt het versterkte gemoduleerde signaal gedemoduleerd. Dit gebeurt door het AM signaal te vermenigvuldigen met een synchroon signaal, meestal de (aanwezige) draaggolf, of een daaruit afgeleid signaal met dezelfde frequentie. Dit resulteert in:

$$v_{dem} = \hat{v}_m \hat{v}_s (\cos(\omega_c + \omega_i)t + \cos(\omega_c - \omega_i)t) \cdot (\omega_c t + \varphi) \quad (5.38)$$

$$= \hat{v}_m \hat{v}_s \left[\cos \omega_i t \cos \varphi + \frac{1}{2} \cos((2\omega_c + \omega_i)t + \varphi) + \frac{1}{2} \cos((2\omega_c - \omega_i)t + \varphi) \right] \quad (5.39)$$

Met een laagdoorlaatfilter worden alle componenten met frequenties hoger dan de hoogste signaalfrequentie ω_i uitgefilterd. Het gedemoduleerde signaal is maximaal voor $\varphi = 0$, dus als het synchrone signaal en de draaggolf in fase zijn. Voor $\varphi = \pi/2$ is het gedemoduleerde signaal nul en voor $\varphi = \pi$ heeft het gemoduleerde signaal het tegengestelde teken. De fasegevoeligheid van synchrone detectie maakt het mogelijk niet alleen de amplitude maar ook de fase van sterk verstoorde en verruiste signalen te meten.

Meten van diverse grootheden

Elektrische grootheden

Spanning

Voor het meten van spanningen staan diverse instrumenten ter beschikking, zoals **digitale spanningsmeters** met numeriek display en **oscilloscopen** met grafisch display, soms gecombineerd met numerieke weergave van signaal-grootte en -frequentie op het grafische scherm. Digitale spanningsmeters zijn meestal ook geschikt voor het meten van andere grootheden zoals stroom en weerstand, en heten dan **multimeters**.

De meeste moderne meetinstrumenten kunnen via een interface worden aangesloten op een PC, met softwarepakketten voor de verwerking van de meetgegevens.

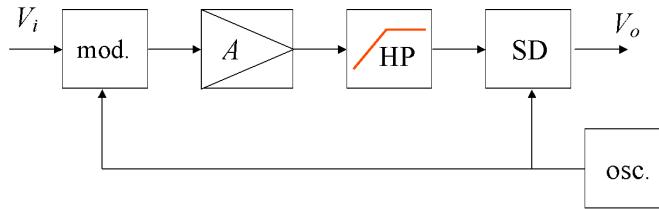
Elektronische spanningsmeters hebben een hoge ingangsweerstand R_i , om het effect van belasting te minimaliseren. De gemeten spanning V_m bedraagt:

$$V_m = \frac{R_i}{R_i + R_b} V_b = \frac{1}{1 + R_b/R_i} V_b \approx (1 - R_b/R_i) V_b \quad (5.40)$$

met V_b de bronspanning (feitelijk te meten spanning) en R_b de bronweerstand (meestal onbekend).

De relatieve belastingsfout bedraagt dus R_b/R_i , de verhouding van bronweerstand en belastingsweerstand (hier de ingangsweerstand van het meetinstrument). Voor wisselspanningsmeters geldt hetzelfde, waarbij de weerstanden R in de vergelijkingen worden vervangen door impedanties Z .

Gelijkspanning (DC) Een standaard spanningsmeter voor gelijkspanningen bestaat uit een instelbare voorversterker en een AD-omzetter. Het meten van zeer kleine gelijkspanningen (lager dan de offset van de versterker en met zeer kleine signaal-ruisverhouding) vereist een andere techniek: **modulatie** (zie ook p. 335) Dit wordt toegepast in een **chopperversterker** (oude benaming **elektrometer**, naar de werking met een speciale "elektrometer" buis). De te meten spanning wordt eerst gemoduleerd met een schakelmodulator en daarna versterkt. Ruis en offset ten gevolge van verstoring worden uitgefilterd, waarna het signaal wordt gedemoduleerd volgens het principe van synchrone detectie (figuur 5.9). Chopperversterkers zijn verkrijgbaar als modules en als IC's.



Figuur 5.9: principeschets chopperversterker

Wisselspanning (AC) De meeste wisselspanningsmeters meten de **RMS**¹-waarde van de spanning (effectieve waarde). De RMS-waarde hangt af van de signaolvorm. Er zijn meters die de RMS-waarde meten onafhankelijk van de signaolvorm (zogenaamde *true RMS* meters) en meters die alleen van sinusvormige spanningen de juiste RMS-waarde meten.

De RMS-waarde van een sinusvormig signaal $x(t)$ met amplitude A is:

$$\sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T x^2(t) dt} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T (A \sin \omega t)^2 dt} = \frac{1}{2} A \sqrt{2} \quad (5.41)$$

De meeste “gewone” RMS-meters zijn DC-meters met een ingebouwde gelijkrichter. De meter meet dan de DC-component (de gemiddelde waarde) van de gelijkgerichte spanning. Echter, de RMS-waarde van een gelijkgerichte sinus met amplitude A is:

$$\frac{1}{T} \int_0^T |A \sin \omega t| dt = \frac{2A}{\pi} \quad (5.42)$$

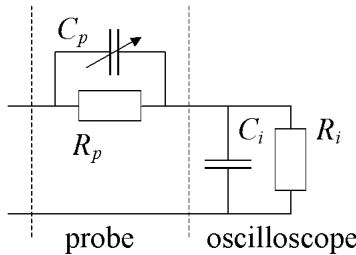
Om de RMS-waarde correct weer te geven is een schaalcorrectie toegepast van een factor $1/4\pi \sqrt{2} \approx 1,11$. Dit type meters meet dus alleen de RMS-waarde van sinusvormige signalen.

Een “true-RMS” meter bepaalt de RMS-waarde volgens de definitie, en is dus geschikt voor willekeurige wisselspanningsvormen. Een thermische RMS-meter is gebaseerd op de warmte die de wisselspanning opwekt in een dissiperend meetelement. De temperatuur daarvan is een maat voor de RMS-waarde. Dit thermische principe is geschikt voor wisselspanningen met frequenties tot meer dan 100 MHz.

¹Root mean square

Met een **oscilloscoop** kan de signaalvorm zichtbaar worden gemaakt. Ook dit instrument bestaat in wezen uit een (wissel)spanningsversterker met instelbare versterkingsfactor en een verstelbare offset.

De gebruikelijke waarde van de ingangsweerstand van een oscilloscoop is 1 M Ω . Met een zogenaamde **probeverzwakker** (een spanningsdeler) kan de ingangsweerstand worden verhoogd (bijv. met een factor 10). Omdat de verzwakker samen met de ingangscapaciteit C_i (orde 10 pF) een frequentieafhankelijke overdracht heeft, wordt een extra, instelbare capaciteit C_p in de probeverzwakker opgenomen (figuur 5.10). Deze capaciteit wordt zodanig afgeregeld, dat de overdracht frequentie-onafhankelijk wordt. Met dit doel zijn de meeste oscilloscopen uitgevoerd met een uitgang waarop een blok golf (0-5V) van 1 kHz beschikbaar is. Door de probe hieraan te hangen, kan de capaciteit in de probe worden afgeregeld totdat op het scherm een scherpe blok golf te zien is.



Figuur 5.10: probeverzwakker met instelbare capaciteit

De overdracht van het netwerk is:

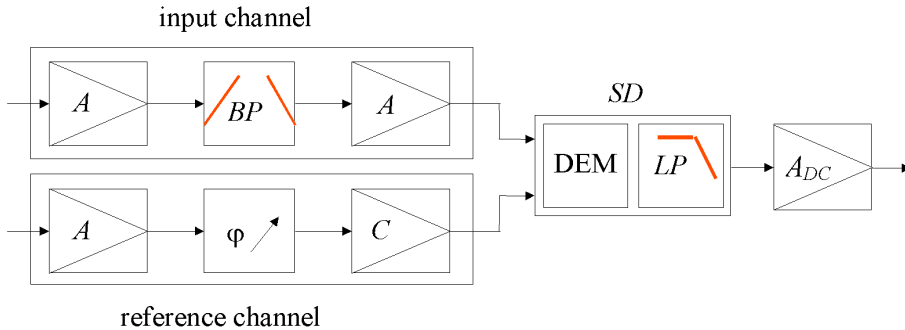
$$H(j\omega) = \frac{R_i}{R_i + R_p} \cdot \frac{1 + j\omega R_p C_p}{1 + \frac{j\omega R_i R_p}{R_i + R_p} (C_i + C_p)} \quad (5.43)$$

Onder de conditie $R_i C_i = R_p C_p$ wordt dit frequentie-onafhankelijk:

$$H = \frac{R_i}{R_i + R_p} \quad (5.44)$$

R_p is een vaste weerstand die in de probe is ingebouwd. Bij een verzwakking van 10 is de waarde van R_p negen maal die van de ingangsweerstand R_i (in dit geval 10 M Ω). De DC-verzwakking is dan precies 10.

Het meten van zeer kleine *sinusvormige* wisselspanningen (kleiner dan ruis) gebeurt met een **lock-in versterker**. Net als de chopperversterker is ook een lock-in versterker gebaseerd op synchrone detectie (figuur 5.11).



Figuur 5.11: principeschets lock-in versterker

De versterker heeft twee ingangen: voor het meetsignaal en voor een referentiesignaal. Het meetsignaal wordt versterkt en zonodig gefilterd (z.g.n. **predetectiefilter**). Dit is ofwel een met de hand instelbaar filter ofwel een automatisch afstemmend filter. Het referentiesignaal fungeert als synchroon signaal voor de demodulatie. Met de instelbare fasedraaier wordt het uitgangssignaal gemaximaliseerd en de comparator C levert de stuursignalen voor de synchrone schakeldetector.

Het laagdoorlaatfilter aan de uitgang legt de bandbreedte van het meetsysteem vast en daarmee ook de meettijd. De optimale signaal-ruisverhouding wordt verkregen bij een afsnijfrequentie van het LD-filter die gelijk is aan de maximale frequentie van het gedemoduleerde signaal (dus het meetsignaal). Is het meetsignaal zeer smalbandig (een sinus met nagenoeg constante amplitude), dan kan een lange meettijd worden gekozen, resulterend in een sterke ruisonderdrukking. Signalen kleiner dan 1 nV zijn op deze manier goed te meten.

Als er geen synchroon signaal aanwezig is, dan moet dit worden opgewekt. De meeste lock-in versterkers voorzien in die mogelijkheid met een ingebouwde PLL¹.

¹phase-locked-loop

Stroom

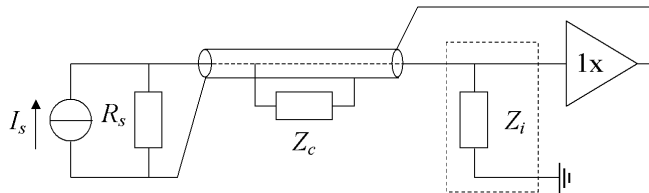
Stroom is een *through*-variabele; de stroomketen moet daarom worden onderbroken om er een stroommeter tussen te schakelen. Bij permanente stroommetingen (bijv. voor een regeling) plaatst men een kleine, vaste weerstand (**meetweerstand**) in de keten en meet de spanning hierover.

Een stroommeter moet een lage ingangsweerstand R_i hebben om het effect van belasting te minimaliseren. De gemeten stroom I_m bedraagt:

$$I_m = \frac{R_b}{R_i + R_b} I_b = \frac{1}{1 + R_i/R_b} I_b \approx (1 - R_i/R_b) I_b \quad (5.45)$$

met I_b de oorspronkelijke (feitelijk te meten stroom) en R_b de bronweerstand (meestal onbekend). De relatieve belastingsfout bedraagt dus R_i/R_b , hetgeen de verhouding van de belastingsweerstand (hier de ingangsweerstand van de stroommeter of de meetweerstand) en de bronweerstand is.

Bij het meten van zeer kleine stromen kunnen lekstromen (bijvoorbeeld via de kabelweerstand) meetfouten veroorzaken. Een effectieve manier om de invloed van lekstromen te elimineren is *active guarding* (figuur 5.12).



Figuur 5.12: principe *active guarding*

De afgeschermdde, geaarde kabel is er in eerste instantie voor het vermijden van capacitieve stoorinjectie. Echter, via de kabelimpedantie Z_c vloeit een deel van de te meten stroom naar aarde. Dit wordt vermeden door de mantel van de kabel mee te sturen met de potential van de binnengeleider.

Indien een stroomketen niet kan worden onderbroken voor het meten van de stroom (zoals in netspanningslijnen), kan een **stroomtang** worden toegepast. Dit komt in feite neer op een stroomtransformatie. De stroomvoerende geleider fungeert als primaire spoel (1 winding); de tang vormt de secundaire spoel (meer windingen), aangebracht om de stroomgeleider; de tang kan daartoe worden geopend en gesloten. De secundair opgewekte stroom verhoudt zich tot de primaire als de wikkerverhouding, net als bij een spanningstransformator.

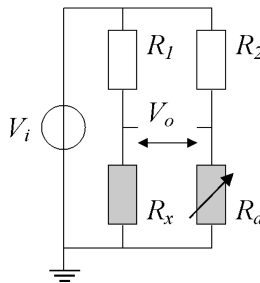
Impedantie

Voor nauwkeurige metingen van weerstand, capaciteit en (zelf)inductie wordt het principe van compensatie toegepast. Een bekende uitvoeringsvorm is de **Wheatstone brug** (figuur 5.13), bestaande uit twee vaste weerstanden R_1 en R_2 , de onbekende weerstand R_x en een instelbare weerstand R_a . De brug bestaat in wezen uit twee spanningsdelers, dus de overdracht is:

$$V_0 = \left(\frac{R_x}{R_1 + R_x} - \frac{R_a}{R_2 + R_a} \right) V_i \quad (5.46)$$

Weerstand R_a wordt zodanig ingesteld dat de uitgangsspanning van de brug juist nul is. In dat geval geldt:

$$R_x = \frac{R_1}{R_2} \cdot R_a \quad (5.47)$$

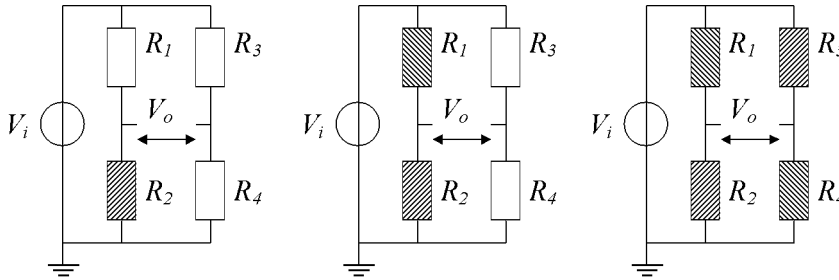


Figuur 5.13: brug van Wheatstone

Het resultaat is onafhankelijk van de brugvoedingsspanning V_i . De methode vereist een nuldetector met geringe offset en een instelbare weerstand waarvan de waarde in elke stand nauwkeurig bekend is. Dit zijn kostbare componenten, vandaar dat de methode alleen gebruikt wordt indien de hoogste nauwkeurigheid is vereist (zoals voor een calibratie).

Voor het meten van kleine *weerstandsoveranderingen* wordt dezelfde brug gebruikt, maar nu in de **uitslag-modus**. In de initiële toestand zijn alle weerstanden gelijk (R), de brug is in evenwicht en de uitgangsspanning is nul. Verandert één weerstand met een klein bedrag ΔR (figuur 5.14a) dan is de uitgangsspanning:

$$V_0 = \frac{\Delta R}{2(2R_0 + \Delta R)} \cdot V_i \approx \frac{1}{4} \frac{\Delta R}{R} V_i \quad (5.48)$$



Figuur 5.14: a) meten van weerstandsverandering (uitslag-modus) b) halve brug c) volle brug

In een **halve brug** veranderen twee weerstanden gelijktijdig: ofwel een gelijke verandering van twee diametrale weerstanden of een tegengestelde verandering van twee weerstanden in één tak (balansprincipe, zie p. 332). In een **volle brug** veranderen alle vier de weerstanden, diametraal tegengesteld. De uitgangsspanningen van de halve en de volle brug bedragen:

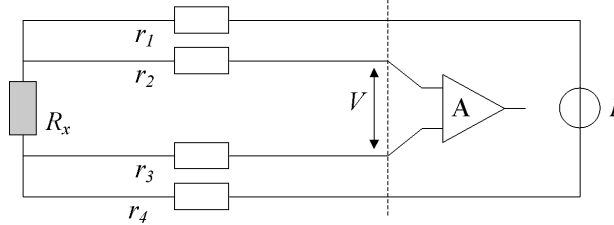
$$V_0 = \frac{1}{2} \frac{\Delta R}{R} V_i \quad \text{resp.} \quad V_0 = \frac{\Delta R}{R} V_i \quad (5.49)$$

Op gelijke wijze als bij weerstandsmetingen kan de brug van Wheatstone ook worden toegepast voor het meten van impedanties (capaciteit, zelfinductie, combinaties). In dat geval worden instelbare capaciteiten en/of weerstanden in één van de takken van de brug opgenomen.

Indien de weerstand van de aansluitdraden niet zeer klein is ten opzichte van de weerstand zelf, dan wordt een meetfout gemaakt. Met de zogenaamde **vierdraadmethode** is die fout geheel te elimineren (figuur 5.15).

Dit is in wezen een stroom-spanningsmeting. Indien de bronweerstand van de stroombron oneindig groot is en de ingangsweerstand van de spanningsmeter A eveneens, dan loopt de gehele stroom I door R_x en loopt er geen stroom door de ingang van de spanningsmeter. Derhalve is R_x precies gelijk aan V/R , onafhankelijk van de draadweerstand r .

Met een impedantiemeter (*impedance analyzer*) kunnen snel en nauwkeurig het reële en imaginaire deel (of de modulus en argument) van een onbekende impedantie worden gemeten, bij een in te stellen frequentie. De geavanceerde typen genereren automatisch een frequentiediagram over een groot frequentiebereik (tot enige GHz).



Figuur 5.15: vierdraadsmethode voor het meten van weerstand

Magnetische grootheden

In deze paragraaf worden vier methoden gegeven voor het meten van de magnetische veldsterkte H (A/m) of de magnetische inductie B (Tesla).

Spoel

Een magnetisch wisselveld kan eenvoudig worden gemeten met een spoeltje. Volgens de **inductiewet van Faraday**¹ is de geïnduceerde spanning in het spoeltje gelijk aan:

$$V_{ind} = -\frac{d\Phi}{dt} \quad (5.50)$$

De spanning is dus evenredig met de tijdafgeleide van de **flux**, dus ook evenredig met de frequentie van het veld. De spanning is ook evenredig met het oppervlak van het spoeltje.

Hallsensor

De **Hallsensor**² berust op Lorentzkrachten die een magneetveld \vec{B} uitoefent op bewegende ladingsdragers:

$$\vec{F}_l = q(\vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.51)$$

met q de lading en \vec{v} de snelheid van de ladingsdragers. Een Hallsensor bestaat uit een (half)geleidend stukje materiaal waardoor een stroom wordt gestuurd. Geplaatst in een B -veld ondervinden de elektronen een kracht die de elektronen naar de zijkant dwingt. Dit resulteert in een elektrisch

¹naar Michael Faraday (1791-1867)

²naar Edwin Herbert Hall (1855-1938)

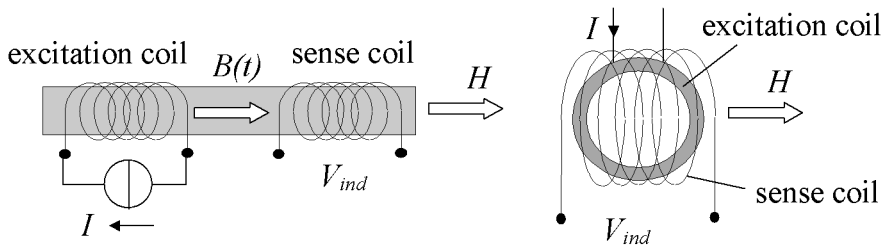
veld loodrecht op de stroomrichting en een daaraan gerelateerde elektrische spanning. Deze zogenaamde **Hallspanning** is gelijk aan:

$$V = \frac{1}{nq} \cdot \frac{IB}{d} = R_H \cdot \frac{IB}{d} \quad (5.52)$$

met R_H de **Hall coëfficiënt**. De gevoeligheid is omgekeerd evenredig met de dikte d van de component loodrecht op de stroomrichting. Daarom werden deze sensoren ook wel Hallplaatjes genoemd. In silicium Hallsensoren vloeit de stroom door een zeer dunne laag, waardoor een grote gevoeligheid wordt verkregen. Een Hallsensor is geschikt om zowel statische als variërende magneetvelden mee te meten.

Fluxgate sensor

Ook een *fluxgate sensor* is geschikt voor het meten van AC en DC velden. Een fluxgate sensor bestaat uit een kern van magnetisch materiaal en twee spoelen: een excitatiespoel en een detectiespoel (figuur 5.16).



Figuur 5.16: werking van de *fluxgate* sensor a) staafkern b) ringkern

Met de excitatiespoel wordt de kern periodiek in verzadiging gebracht. Daardoor verandert ook de permeabiliteit van het kernmateriaal, en wel met de dubbele frequentie. Een te meten extern magneetveld H induceert een extra inductie B in de kern. Omdat de permeabiliteit periodiek wisselt, verandert ook de inductie ten gevolge van H periodiek: het meetsignaal wordt gemoduleerd met de excitatiefrequentie. De inductiespanning op de sensorspoel bestaat uit twee componenten: één ten gevolge van de excitatiespoel zelf en één als gevolg van het externe veld; deze component is evenredig met H .

Met een symmetrische constructie (figuur 5.16b) wordt bereikt dat de eerstgenoemde component nul wordt (balanswerking): voor $H=0$ is de netto in-

ductiespanning ook 0.

Dankzij de modulerende werking kan een zeer hoge gevoeligheid worden behaald, veel hoger dan bij Hallsensoren mogelijk is.

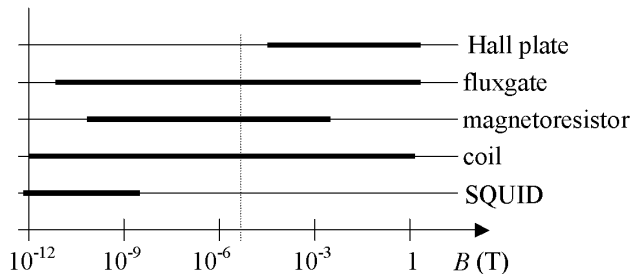
Magneto-resistieve sensor

Sommige ferromagnetische materialen (legeringen) vertonen een effect aangeduid met **AMR**¹: de weerstand hangt af van de stroomrichting in het materiaal. Alhoewel het effect zwak is, valt het effect toch te benutten voor het meten van magnetische velden.

Recentelijk zijn andere materialen gevonden met een veel groter magneto-resistief effect, aangeduid met **GMR**² en later **CMR**³. Deze effecten zijn vooral sterk bij zeer lage temperaturen, maar bij kamertemperatuur toch bruikbaar als uitgangspunt voor een magneetveldsensor.

Overzicht

Figuur 5.17 geeft het globale bereik weer van de verschillende besproken magneetveldsensoren. Tevens geeft de tabel het bereik van een SQUID (Superconducting QUantum Interference Device), een zeer gevoelige magneetveldsensor die alleen werkt bij zeer lage temperaturen. De verticale lijn bij 50 μT geeft de sterkte van het aardmagnetisch veld weer, waaruit blijkt dat dit veld nauwelijks is te meten met een Hallsensor.



Figuur 5.17: meetbereik van verschillende magneetveldsensoren

¹anisotropic magnetoresistivity

²giant magnetic resistance effect

³colossal magnetoresistivity

Thermische grootheden

Instrumenten voor het meten van temperatuur kunnen worden verdeeld in **contact-thermometers** en **stralingsthermometers**. De eerste moeten in contact worden gebracht met het te meten voorwerp; de tweede categorie meet de (warmte)straling die door het voorwerp wordt uitgezonden.

Resistieve temperatuursensoren

Deze contact-sensoren benutten de temperatuurafhankelijkheid van metalen (positief) en halfgeleiders (negatief). De eersten heten weerstandssensoren, de tweede worden thermistors genoemd.

De meest toegepaste weerstandssensor is van platina, vanwege zijn hoge smeltpunt (1769 °C) en zijn hoge chemische stabiliteit. *Platina weerstandssensoren* fungeren als internationale temperatuurstandaard voor temperaturen tussen -182,97 °C en +680,5 °C. De temperatuurkarakteristiek van een platina thermometer luidt:

$$R(T) = R_0 \left(1 + aT + bT^2 + cT^3 + dT^4 + \dots \right) \quad (5.53)$$

met R_0 de weerstand bij 0°C. Een veel voorkomende waarde van R_0 is 100 Ω (een zogenaamde **Pt-100 sensor**). De genormaliseerde parameters van een Pt-100 zijn:

$$\begin{aligned} R_0 &= 100,00 \, \Omega \\ a &= 3,90802 \cdot 10^{-3} \, \text{K}^{-1} \\ b &= -5,8020 \cdot 10^{-7} \, \text{K}^{-2} \\ c &= 4,2735 \cdot 10^{-10} \, \text{K}^{-3} \end{aligned}$$

De temperatuurcoëfficiënt is dus ongeveer 0,4% K⁻¹. Dit geeft een positieve weerstand-temperatuur evenredigheid aan, we spreken van een **PTC**¹.

Een **thermistor** (*thermally sensitive resistor*) bestrijkt een gebied van -100 °C tot +350 °C. Ze zijn veel gevoeliger dan een Pt-100, maar minder stabiel en sterk niet-lineair. De temperatuurcoëfficiënt is negatief, vandaar de benaming NTC-thermistor of kortweg **NTC**. De gevoeligheidskarakteristiek luidt:

$$R(T) = R_0 e^{B \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_0} \right)} \quad (5.54)$$

met R_0 de weerstand bij T_0 (bijv. 0 °C) en T de (absolute) temperatuur (in K).

¹Positieve Temperatuur Coëfficiënt

De temperatuurcoëfficiënt van een NTC is dus:

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{dR}{dT} = -\frac{B}{T^2} \quad (5.55)$$

De parameter B ligt in de orde van 2000 tot 5000 K. Bij $B = 3600$ K bijvoorbeeld is de gevoeligheid (bij $T = 300$ K) gelijk aan $-4\% \text{ K}^{-1}$.

Thermoelektrische sensoren

Een **thermokoppel** bestaat uit een serieschakeling van drie metaaldraden van verschillend materiaal, meestal a-b-a. Bij gelijke temperatuur van de twee lassen (juncties) is de spanning tussen de eindpunten nul. Een verschiltemperatuur resulteert in een spanningsverschil:

$$V_{ab} = \beta_1 (T_1 - T_2) + \frac{1}{2}\beta_2 (T_1 - T_2)^2 + \dots \quad (5.56)$$

Dit verschijnsel is het **Seebeck effect**, V_{ab} is de **Seebeckspanning**. Bij benadering geldt:

$$V_{ab} = \alpha_{ab} (T_1 - T_2) \quad (5.57)$$

waarin α_{ab} de **Seebeck coëfficiënt** is.

Eén van de lassen, de koude las (*cold junction*), wordt op een constante, bekende temperatuur gehouden, de andere las (*hot junction*), wordt in contact gebracht met het te meten voorwerp. Een thermokoppel meet dus alleen een *temperatuurverschil*, geen absolute temperatuur.

Thermokoppels bestrijken (gezamenlijk) een gebied van bijne 0 K tot meer dan 2900 K. De tabel op pagina 544 toont van enkele typen de voornaamste eigenschappen.

Geïntegreerde temperatuursensoren

De stroom-spanningsrelatie van een pn-junctie luidt:

$$V = \frac{kT}{q} \ln \frac{I}{I_s} \quad (5.58)$$

waarin I_s de temperatuurafhankelijke verzadigingsstroom is:

$$I_s \propto T^m e^{-\frac{V_{g0}}{kT}} \quad (5.59)$$

met V_{g0} de geëxtrapoleerde bandgapspanning bij 0 K. Toegepast op een bipolaire transistor met een basis-collectorspanning van 0 V geeft:

$$V_{BE}(T) = V_{BE0} + \lambda T + R(T) \quad (5.60)$$

met V_{BE0} de geëxtrapoleerde basis-emitterspanning bij 0 K, λ de thermische gevoeligheid en $R(T)$ een kleine, tweede-orde term. Deze relatie wordt benut in geïntegreerde temperatuursensoren. Door een combinatie van twee bipolaire transistoren met verschillende (geometrische) parameters en een stroomverhouding r realiseert men een basis-emitterspanning die voldoet aan:

$$\Delta V_{BE}(T) = \frac{kT}{q} \ln a \cdot r \quad (5.61)$$

Dit is evenredig met de absolute temperatuur; de sensor wordt daarom een **PTAT sensor** (*proportional to absolute temperature*) genoemd. Tabel 5.11 toont enkele eigenschappen van een commerciële sensor met stroomuitgang.

Tabel 5.11: Enkele eigenschappen van een geïntegreerde temperatuursensor

eigenschap	waarde	eenheid
meetbereik	-25 ... + 105	°C
niet-lineariteit (vol bereik)	0,2	°C
gevoeligheid	1	$\mu\text{A/K}$

Stralingsthermometers

Met een **stralingsthermometer** (vaak aangeduid met de term **pyrometer**) is contactloze temperatuurmeting mogelijk. Ieder voorwerp zendt straling uit; de hoeveelheid straling W voldoet aan de vergelijking:

$$W = \sigma \cdot \varepsilon_r \cdot T_r^4 \quad (5.62)$$

met σ de constante van Stefan-Boltzmann ($5,669 \cdot 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \text{ K}^{-4}$) en ε_r de emissiecoëfficiënt van het stralende oppervlak. Omdat stralingsmeters contactloos zijn, kunnen zeer hoge temperaturen (tot zeker 3500 °C) worden gemeten.

Een stralingsmeter bevat een temperatuursensor die aan de straling wordt blootgesteld. Maar omdat de sensor zelf ook straalt, geldt uiteindelijk voor de gedetecteerde netto hoeveelheid warmtestraling:

$$W = \sigma (\varepsilon_r T_r^4 - \varepsilon_d T_d^4) \quad (5.63)$$

Algemeen
Wiskunde
Informatica
Fysica
Meten
Signalen
Elektronica

met T_d de temperatuur van de detector en ε_d de emissiecoëfficiënt van de detector.

De emissiecoëfficiënt van een metalen oppervlak loopt uiteen van 0,03 (gepolijst) tot 0,8 (ruw oppervlak). Voor een correcte temperatuurmeting moet de emissiecoëfficiënt dus bekend zijn. Indien niet hiervoor wordt gecorrigeerd maakt men een meetfout; aangezien de straling evenredig is met T^4 is de relatieve meetfout gelijk aan $\varepsilon^{1/4}$.

Optische grootheden

Veel meetinstrumenten maken gebruik van licht als hulpgrootheid. We bespreken hier enkele veelgebruikte optische componenten die in die instrumenten worden toegepast: de lichtgevoelige weerstand **LDR**¹, fotodiode en **PSD**²

Lichtgevoelige weerstand (LDR)

Sommige materialen, zoals cadmium sulphide (CdS) en cadmium selenide (CdSe), hebben een elektrische weerstand die afhangt van de hoeveelheid opvallend licht (photo-resistive effect). Een fotogevoelige weerstand maakt hiervan gebruik om lichthoeveelheid te meten.

De weerstand van een LDR vertoont een lichtafhankelijkheid die beschreven wordt met aE_d^{-b} waarin E_d het lichtvermogen per eenheid van oppervlak is en a en b constructieafhankelijke parameters. De gevoeligheid hangt af van de golflengte en wordt uitgedrukt in $\Delta R/E_d$ per eenheid van golflengte. Het gevoeligheidsgebied van een standaard LDR ligt ongeveer tussen 400 nm en 850 nm. Met andere materialen worden andere golflengtegebieden bestreken: PbS and PbSe voor nabij infrarood (1-3 μm), InSb, InAs en andere legeringen voor het midden en verre IR-gebied (tot 1000 μm). Fotoweerstanden worden verder gekarakteriseerd met:

- donkerstroom (weerstand in donker): orde 10 M Ω ;
- responsietijd: donker \rightarrow licht ca. 10 ms; licht \rightarrow donker ca 1 s.

¹light dependent resistor

²position sensitive diode

Fotodiode

Belangrijke eigenschappen van een fotodiode zijn:

- **spectrale gevoeligheid (responsivity)** uitgedrukt in A/W of A/lm.
- **NEP¹**: het stralingsvermogen (in W) dat een even groot signaal aan de uitgang van de detector levert als het ruisvermogen van deze detector. Als de signaalparameters worden gespecificeerd met hun spectrale grootheden (per eenheid van bandbreedte), dan moet NEP dat ook (eenheid W/ $\sqrt{\text{Hz}}$).
- **optische bandbreedte**: het golflengte-interval tussen de 50%-grenzen van de relatieve spectrale gevoeligheid. Voor gangbare fotodiodes: globaal 600 tot 1000 nm. Let wel: LEDs hebben een optische bandbreedte in de orde van 20 tot 40 nm; een laserdiode heeft er een van ca. 1 nm.
- **donkerstroom**: de sperstroom bij afwezigheid van licht; sterk afhankelijk van het gevoelige oppervlak: tussen nA en μA , en sterk temperatuurafhankelijk.
- **kwantumefficiëntie**, de verhouding tussen het aantal optisch gegenereerde elektron-gatparen en het aantal invallende fotonen; beter dan 90% bij de piekgolflengte.
- **richtingsgevoeligheid (directivity)**: specificeert de gevoeligheid als functie van de richting t.o.v. de optische as. Soms uitgedrukt in de *half-angle*, gedefinieerd als de hoek tussen de optische as en de richting waarin de gevoeligheid tot 50% is afgenomen. Varieert van 5 graden (met lens) tot 70 graden (zonder lens).

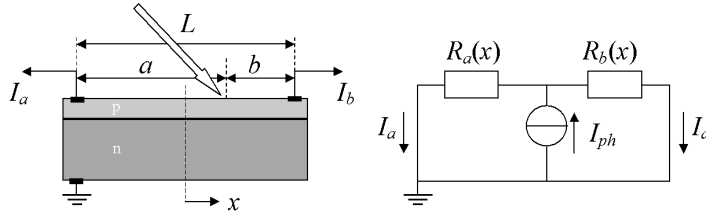
Positiegevoelige diode

Een PSD is een fotodiode die (ook) gevoelig is voor de positie van de hierop invallende lichtbundel. De component is speciaal ontwikkeld voor het contactloos meten van verplaatsing; licht is daarbij een hulpgrootheid.

De 1-dimensionale uitvoering heeft aan weerszijden een contact (figuur 5.18). Ter plaatse van het invallende licht wordt een **fotostroom** I_f opgewekt, die zich verdeelt naar de beide contacten in een verhouding bepaald door de effectieve weerstanden R_a en R_b tussen het punt van lichtinval en de beide uiteinden. Voor een homogene weerstand over de gehele breedte van de diode is dan af te leiden:

$$I_a = \left(\frac{1}{2} - \frac{x}{L}\right) \cdot I_f \text{ en } I_b = \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{L}\right) \cdot I_f \quad (5.64)$$

¹Noise Equivalent Power



Figuur 5.18: 1-dimensionale *position sensitive diode*

met $x = 0$ de middenpositie en $x = \pm 1/2L$ de eindposities. Om de positie-informatie onafhankelijk van de lichtintensiteit (dus totale fotostroom) te vinden wordt genormaliseerd:

$$\frac{I_1 - I_2}{I_1 + I_2} = \frac{2x}{L} \tag{5.65}$$

Deze bewerking kan zowel in het analoge als het digitale domein worden uitgevoerd.

Er bestaan lineaire (d.w.z. 1-dimensionale) en 2-dimensionale uitvoeringen. De lineariteit is meestal beter dan 1 procent in het centrale deel van het gevoelige oppervlak. Aan de randen neemt de niet-lineariteit toe tot enkele procenten.

De weerstandsbaan van een lineaire (1-dimensionale) PSD is enige cm lang (tot 40 mm) en circa 2,5 mm breed. Een 2-dimensionale PSD meet 1 tot 2 cm in het vierkant. De weerstand tussen overstaande elektroden is enige tientallen $k\Omega$.

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Mechanische grootheden

Hieronder worden een aantal sensors voor het meten van positie of verplaatsing behandeld, verder komen er nog enkele krachtsensors aan bod.

Potentiometrische verplaatsingssensoren

Potentiometrische opnemers zijn verkrijgbaar als lineaire- of als hoekverplaatsingssensor. Het weerstandsdeel bestaat uit draadwindingen of een weerstandsfilm. De looper is (direct of via een overbrenging) mechanisch verbonden met het voorwerp waarvan de positie wordt gemeten. Belangrijke eigenschappen van potentiometrische verplaatsingssensoren staan vermeld in de tabel.

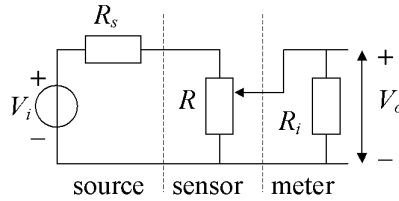
parameter	lineair	rotatieel
bereik	2 mm ... 8 m	10° ... 60 omw.
weerstand	1 kΩ ... 1 MΩ ±5%	als lineair
resolutie:		
- normaal	±0,1%FS	0,2 ... 2°
- ondergrens, draad	10 μm	
- ondergrens, film	0,1 μm	
niet-lineariteit	0,01 ... 1% FS	als lineair
temp. coëfficiënt	10 ⁻³ K ⁻¹	als lineair
temp.bereik	-20 ... 125°C	
v _{max} looper	1 m/s	10 omw/s
levensduur, draad	10 ⁶ bewegingen/rotaties	
levensduur, film	10 ⁷ ... 10 ⁸ bewegingen/rotaties	
P _{max}	0,1 ... 50 W	als lineair

Tabel 5.12: Eigenschappen van potentiometrische verplaatsingssensoren

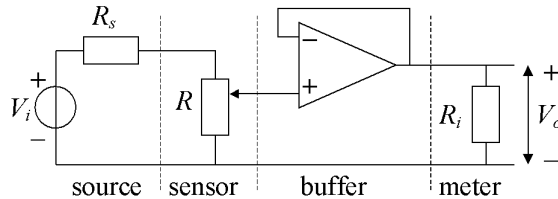
De (intrinsieke) niet-lineariteit is het gevolg van de niet-homogene wikkeling van de draad of inhomogeniteit van de weerstand van draad of film. Belasting van de potentiometer kan aanleiding geven tot een extra niet-lineariteitsfout (systematische meetfout). Uit figuur 5.19 volgt:

$$\frac{V_o}{V_i} = \frac{\frac{x}{L}}{1 + \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{R}{R_i}} \approx \frac{x}{L} \left\{ 1 - \frac{x}{L} \left(1 - \frac{x}{L}\right) \frac{R}{R_i} \right\} \quad (5.66)$$

De maximale eindpunt niet-lineariteit (zie p. 330) treedt op bij $x/L = 2/3$ en bedraagt $(-4/27)(R/R_i)$. Deze belastingsfout kan worden vermeden door **buffering** (figuur 5.20).



Figuur 5.19: systematische meetfout door belasting



Figuur 5.20: belastingsfout voorkomen door buffering

Rekstrookjes

Een **rekstrookje** of *strain gauge* is een draad- of filmweerstand die is aangebracht op een dunne, flexibele drager, meestal van een of andere kunststof. Door uitrekking verandert de weerstand van het rekstrookje. Ze worden veelvuldig toegepast voor het meten van krachten, torsies, doorbuiging e.d. Er zijn twee gebruiksmogelijkheden:

- directe montage op het te meten object;
- montage op een metalen proefstuk, waarop de te meten kracht wordt uitgeoefend, al dan niet via een extra mechanische overbrenging (ook geschikt voor kabels e.d.).

Daar een rekstrookje primair reageert op lengteverandering, dient de elasticiteitsmodulus E van het betreffende materiaal (het proefstuk of de constructie) bekend te zijn om de kracht te kunnen berekenen: $F = E \cdot S \cdot A$, waarbij S de rek en A de dwarsdoorsnede is. De gevoeligheid van een rekstrookje drukt men uit met de **rekfactor** (*gauge factor*):

$$K = \frac{\Delta R}{R} \bigg/ \frac{\Delta l}{l} \tag{5.67}$$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Metten

Signalen

Elektronica

Voor elastische materialen is de rekfactor eenvoudig te berekenen:

$$K = 1 + 2\mu + \frac{d\rho}{\rho} \left/ \frac{dl}{l} \right. \quad (5.68)$$

waarin μ de **Poisson-verhouding**, dat is de verhouding tussen rek in dwarsrichting en rek in de hoofdrichting. De derde term vertegenwoordigt het piëzo-resistieve effect. Een benaderde waarde van μ bij metalen is 0,5 (in werkelijkheid tussen 0,25 en 0,35). Als vuistregel voor metaalrekstrookjes geldt: $K \approx 2$, d.w.z. *de relatieve weerstandsverandering is het dubbele van de rek*.

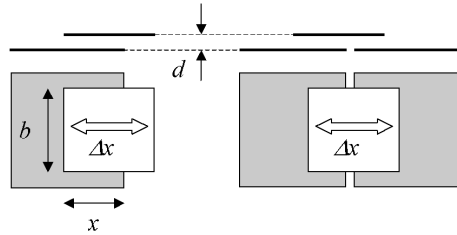
Omdat de maximale rek klein is (orde 10^{-3}) wordt de rek vaak uitgedrukt in termen van microrek (**microstrain**): 1 μ -rek correspondeert met een relatieve lengteverandering van 10^{-6} , wat wil zeggen een relatieve weerstandsverandering van (slechts) $2 \cdot 10^{-6}$. Dit is de reden waarom rekstrookjes altijd in een brugconfiguratie worden opgenomen (zie p. 343). Een bijkomend voordeel daarvan is dat (gemeenschappelijke) temperatuurvariaties geen invloed hebben op het brugevenwicht.

Capacitieve verplaatsingssensoren

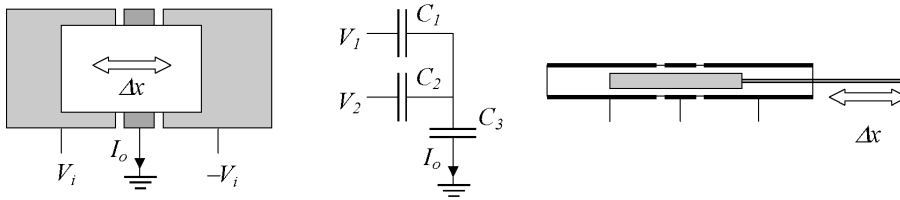
De capaciteit C van een tweetal ten opzichte van elkaar geïsoleerde geleiders is de verhouding tussen de getransporteerde lading Q en het spanningsverschil V : $C = Q/V$. In principe is van elk willekeurig stelsel geleiders de capaciteit te berekenen. In het algemeen geldt: $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r G$, met G een geometrische factor, ε_0 en ε_r respectievelijk de permittiviteit van vacuum (ongeveer $8,2 \times 10^{-12}$ F/m) en de relatieve permittiviteit (ofwel **diëlektrische constante**). De meest bekende geometrische vorm is de vlakke-plaatcondensator, waarvoor geldt $C = \varepsilon_0 \varepsilon_r G(A/d)$, met A het oppervlak van de platen en d de tussenafstand. Deze formule geldt slechts bij benadering: aan de randen is het elektrische veld niet homogeen en treedt buiten de ruimte tussen de platen (**strooiveld**, *fringe field*).

Een capacitieve verplaatsingssensor is dusdanig geconstrueerd, dat bij variatie in de onderlinge afstand tussen de twee geleiders een voorgeschreven verandering in de geometrische factor G optreedt. Voor een vlakke-plaatcondensator is dat ofwel d ofwel A . In dit laatste geval is A het effectieve plaatoppervlak tussen de geleiders (figuur 5.21a).

In de eerste configuratie (figuur 5.21a) produceert een verplaatsing Δx van de bovenste plaat een capaciteitsverandering $\Delta C = \varepsilon \cdot \Delta x \cdot b/d$. In de praktijk wordt meestal een differentiële capaciteit gebruikt (balansprincipe, zie p. 332), zie figuur 5.21b. Twee capaciteiten veranderen gelijktijdig doch tegengesteld:



Figuur 5.21: capacitieve verplaatsingssensor a) enkelvoudig b) differentieel



Figuur 5.22: differentiële capaciteit met contactloze a) plaat b) cylinder

$\Delta C_1 = -\Delta C_2 = \epsilon \cdot \Delta x \cdot b / d$. In de initiële positie ($\Delta x = 0$) is het capaciteitsverschil nul, onafhankelijk van andere parameters zoals d en b .

De derde configuratie in figuur 5.22 heeft het voordeel dat de bewegende plaat contactloos is. Door de tegengestelde polariteit van de twee buitenste vaste platen is de uitgangsstroom in de initiële positie nul (balansprincipe). De stroom is evenredig met het capaciteitsverschil, dus met de lineaire verplaatsing.

In plaats van een vlakke-plaatconstructie kan men ook een cilindrische vorm kiezen, met als voordeel een compactere bouwvorm en minder randvelden, dus een grotere lineariteit. Dit type transducent staat bekend als de **LVDC**¹. Er bestaan ook rotationele versies (**RVDC**), gebruikt als naderingssensor (korte afstand, schakelend), tilsensor en versnellingssensor (met ingebouwd massa-veersysteem). Eigenschappen van deze typen staan in tabel 5.13.

¹Lineair Variabele Differentiaal Condensator

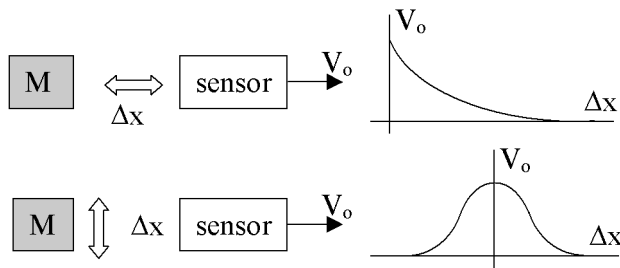
Algemeen
Wiskunde
Informatica
Fysica
Metten
Signalen
Elektronica

type	meetbereik	hysterese; reprod.	resolutie	t.c. nulpunt	T_{\max} °C
LVDC	2,5 mm ... 250 mm	–	10^{-6}	–	80
RVDC	70 deg.	1 boogsec	0,1 boogsec	–	150
nadering	0 ... 20 mm	5%	–	0,1%/K *)	70
versnelling (feedback)	$\pm 0,5g$... $\pm 150g$	10^{-5} (volle schaal)	$10^{-6}g$	$10 \mu g/K$	115
tilt	± 80 graden	–	0,01 graad	–	80

Tabel 5.13: Eigenschappen van enkele typen capacitieve sensoren

Magnetische verplaatsingssensoren

De sterkte van een magnetveld, opgewekt door een permanente magneet of een stroomvoerende spoel, is afhankelijk van de afstand tot die bron. De sterkte kan worden gemeten met een willekeurige magneetveldsensor (zie p. 345). De sterkte van het veld neemt af met de afstand tot de magnetische bron, op een wijze die afhangt van het veldlijnenpatroon. Twee mogelijke configuraties staan afgebeeld in figuur 5.23.

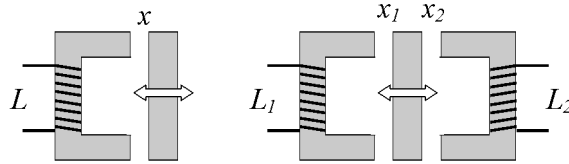


Figuur 5.23: mogelijke configuratie van een magneetveldsensor

Dergelijke verplaatsingssensoren hebben doorgaans een beperkt bereik, een sterk niet-lineaire overdracht en zijn mede gevoelig voor de oriëntatie van de bron t.o.v. sensor. Daarom wordt de methode vooral gebruikt als drempel-detectie (aan-uit).

Inductieve verplaatsingssensoren

Een inductieve verplaatsingssensor is gebaseerd op een beweegbare kern in een magnetisch circuit (figuur 5.24).



Figuur 5.24: beweegbare kern in een magnetisch circuit a) enkelvoudig b) differentieel

De zelfinductie van de constructie is, bij benadering, gelijk aan $L = n^2/R_m$ met n het aantal windingen en R_m de magnetische weerstand (**reluctantie**). Bij een verplaatsing x van het beweegbare deel verandert R_m , want de lengte van de luchtweg wijzigt zich met $2x$. Er geldt:

$$R_m = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l_{kern}}{A} + \frac{1}{\mu_0} \frac{2x}{A} \tag{5.69}$$

zodat de zelfinductie bedraagt:

$$L = \frac{\mu_0 N^2 A}{l_{ij} / \mu_r + 2x} \tag{5.70}$$

Wordt de verplaatsing gemeten vanuit een initiële positie x_0 , dan bedraagt de gevoeligheid:

$$\frac{\Delta L}{L_0} = \frac{-2\Delta x}{l_0 + 2\Delta x} \approx \frac{-2\Delta x}{l_0} \left(1 - \frac{2\Delta x}{l_0}\right) \tag{5.71}$$

met $l_0 = l_{kern} / \mu_r + 2x_0$ de effectieve lengte van het flux-pad bij $x = x_0$. De niet-lineariteitsfout bedraagt $-2\Delta x / l_0$. Enige verbetering is te behalen met de differentiaaluitvoering (figuur 5.24b). De uitgangsgrootheid is het verschil tussen L_1 en L_2 , dus de gevoeligheid is verdubbeld. Bovendien is de niet-lineariteit gereduceerd, immers,

$$\frac{L_2 - L_1}{L_0} = \frac{-4\Delta x}{l_0 - 4(\Delta x)^2 / l_0} \approx \frac{-4\Delta x}{l_0} \left\{1 + 4(\Delta x)^2 / l_0\right\} \tag{5.72}$$

Wervelstroomverplaatsingssensoren

Wervelstromen (*eddy currents*) ontstaan door inductie: ladingsdragers in een geleidend materiaal ondervinden krachten in een veranderend magneetveld en veroorzaken elektrische stromen in dat materiaal. Een wervelstroomtransducent benut dit effect op de volgende wijze.

De sensor bestaat uit een spoel, met zelfinductie $L = \Phi/I$. De spoel genereert een wisselveld in zijn omgeving. Zodra zich in de nabijheid van de spoel een geleidend voorwerp bevindt, zullen daarin inductiestromen ontstaan. Deze stromen wekken weer een magneetveld op dat tegengesteld is gericht aan het opwekkende veld; de totale flux wordt daardoor kleiner en daarmee neemt de zelfinductie af. Het effect is sterker naarmate de geleidbaarheid van het materiaal toeneemt en het voorwerp dichter bij de spoel komt. (Bij nadering van een geleidend, niet (ferro)magnetisch voorwerp neemt de sensorimpedantie af, sterker naarmate de weerstand van het materiaal lager is.)

Is het materiaal van het voorwerp niet geleidend maar ferromagnetisch, dan neemt de zelfinductie bij nadering juist toe. De gevoeligheid van een wervelstroomtransducent hangt dus in hoge mate af van het materiaal van het te meten voorwerp.

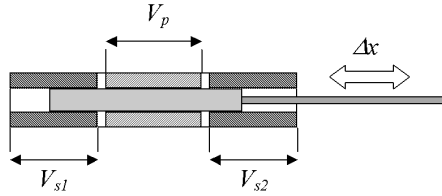
Wervelstroomsensoren worden gebruikt in zeer uiteenlopend toepassingen. Ze zijn geschikt voor het testen van de kwaliteit van metalen oppervlakken (scheuren verhogen de weerstand), voor het classificeren van materialen (de sensorimpedantie is afhankelijk van de resistiviteit), voor afstandsdetectie en voor aanwezigheidsdetectie (van bijvoorbeeld gaten, randen, profielen e.d. in metalen voorwerpen).

Transformatorische verplaatsingssensoren

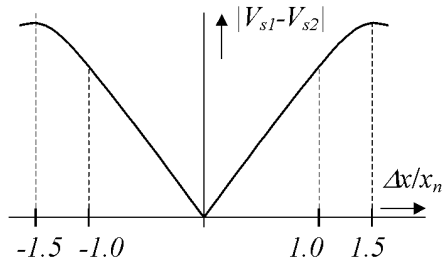
Deze opnemers bestaan uit een primaire spoel, één of meer secundaire spoelen en een beweegbare kern. De bekendste lineaire uitvoering is de LVDT¹. Deze bestaat uit een primaire spoel en twee tegengesteld gewikkelde secundaire spoelen, aangebracht om een holle cilinder waarin de kern kan schuiven (figuur 5.25). De uitgangsspanning is nul als de kern zich in de middenpositie bevindt: beide secundaire spoelen voeren gelijke, maar tegengesteld gerichte spanningen.

Verplaatst de kern zich ten opzichte van de middenpositie, dan vertoont de uitgangsspanning een amplitude die afhankelijk is van de relatieve verplaatsing en een fase (0 of π) die afhangt van de richting van de verplaatsing.

¹Lineair Variabele DifferentiaalTransformator



Figuur 5.25: schematische weergave LVDT



Figuur 5.26: overdracht van verplaatsing (relatief aan spoellengte) naar spanning

De LVDT werkt met wisselspanningen die, afhankelijk van het type, binnen ruime grenzen zelf te kiezen zijn (1 à 10 V, 50 Hz à 10 kHz). De gevoeligheid wordt uitgedrukt in uitgangsspanning per eenheid verplaatsing per eenheid van ingangsspanning, bijv. $\text{mV mm}^{-1} \text{V}^{-1}$. Tabel 5.14 vermeldt enkele aanvullende specificaties.

Een rotationele versie van de LVDT is de **RVDT**. Het principe is gelijk aan dat van de LVDT, de spoel heeft echter een torroïdale vorm. Het bereik is om constructieve redenen beperkt tot minder dan 180° verdraaiing.

Inductieve hoeksensoren met een bereik over de volle 2π zijn o.m. de *resolver* en de *synchro*. Ook deze bestaan uit een variabele transformator met een van de hoekstand afhankelijke koppeling. De *resolver* bestaat uit twee vaste spoelen die een hoek van $\pi/2$ met elkaar maken (de **stator**) en één of twee draaibare spoelen, de **rotor**.

De spanningen over de primaire spoelen zijn 90 graden uit fase: $V_1 = V \cos \omega t$ and $V_2 = V \sin \omega t$. De in de rotor geïnduceerde spanning is de som van de door de primaire spoelen afzonderlijk opgewekte spanningen. Deze

Algemeen
Wiskunde
Informatica
Fysica
Meten
Signalen
Elektronica

Algemeen

zijn zowel in amplitude als in fase afhankelijk van de hoekstand van de rotor. Bij gelijke ingangsamplituden is:

$$V_3 = a \cdot V \cdot \cos \omega t \cos \alpha + a \cdot V \cdot \sin \omega t \sin \alpha = a \cdot V \cdot \cos(\omega t + \alpha) \quad (5.73)$$

Wiskunde

Dat wil zeggen: de fase ten opzichte van V_1 is gelijk aan de hoekstand.

Een alternatieve modus bestaat eruit dat de ingangsspanning wordt aangesloten op de rotor en de uitgang wordt gevormd door de spanningen op de beide statorspoelen:

$$V_{s1} = a \cdot V \cdot \cos \omega t \cos \alpha \quad (5.74)$$

$$V_{s2} = a \cdot V \cdot \sin \omega t \sin \alpha \quad (5.75)$$

Informatica

Hieruit is met enige signaalverwerking de hoek van de rotor te berekenen.

Fysica

De uitvoering met drie statorspoelen heet *synchro*. De drie spoelen staan onder een ruimtelijke hoek van 120° en worden gevoed met sinusspanningen die 120° uit fase zijn. Het principe is verder gelijk aan dat van de resolver. Het (eenduidige) bereik van deze hoeksensoren is 2π radialen. De onnauwkeurigheid kan beter zijn dan 0,001 radialen (3 boogminuten) en wordt voornamelijk beperkt door die van de elektronische fasemeting. De resolutie kan minder dan 40 boogseconden zijn en hysteresis is nauwelijks te meten. De toegepaste meetfrequentie ligt in de orde van 10 kHz. *Resolvers* en *synchro's* zijn robuust en relatief goedkoop.

Metten

type	meetbereik (FS)*	gevoeligheid; resolutie	niet-lin. (% FS)	T_{\max} (°C)
diff. spoel	0,1 ... 200 mm	10 ... 100 mV/(mm·V)	0,5	–
eddy-current	0,1 ... 60 mm	0,1 ... 5 V/mm	0,5	300
LVDT	± 1 mm ... ± 50 cm	1 ... 500 mV/(mm·V)	0,1	500
RVDT	± 40 ... 360	1 ... 10 mV/(deg·V)	0,5	500
resolver	2π	2π /omw.	0,006	–
inductosyn, lineair	tot enkele m	0,1 μ m	–	–
inductosyn, rotationeel	2π	0,05 boogsec	–	–
magneetstrip	10 ... 50 cm	–	–	60
staalband	3 m ... ∞	50 μ m	–	50
magnetostrictief	10 ... 10^3 Nm	10^{-9} m ² /N	4	120

*) meetbereik in volle schaal (FS), dus van 0 tot de aangegeven waarde

Signalen

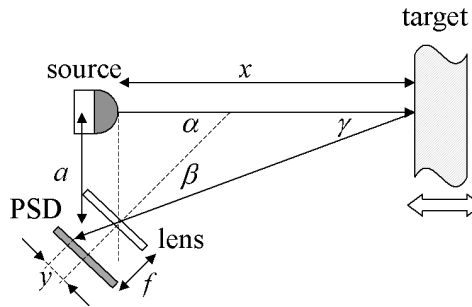
Elektronica

Tabel 5.14: Eigenschappen van inductieve en magnetische sensoren

Optische verplaatsingssensoren

Intensiteitsmeting Een eenvoudige, maar niet erg nauwkeurige methode voor het meten van verplaatsingen berust op de eigenschap dat de lichtintensiteit afneemt met (het kwadraat van) de afstand tot de (puntvormige) bron. Nadeel van deze methode is dat het meetsignaal ook afhangt van o.m. de intensiteit van de bron en van de gevoeligheid van de ontvanger. De methode wordt daarom vooral toegepast in binaire systemen (wel-geen licht), zoals in optische tachometers en drempeldetectors.

Optische afstandsmeting d.m.v. triangulatie Een driehoek is volledig bepaald door twee hoeken en één zijde. Deze eigenschap wordt gebruikt om afstanden te meten met optische middelen. We bespreken hier een toepassing met een PSD (zie p. 352). Een mogelijke configuratie voor een 1-dimensionale meting staat in figuur 5.27 afgebeeld.



Figuur 5.27: verplaatsingsmeting door triangulatie met een PSD

De relatie tussen de afstand x en de positie y van de lichtvlek op de PSD is:

$$x = a \cdot \frac{y \tan \alpha + f}{f \tan \alpha - y} \quad (5.76)$$

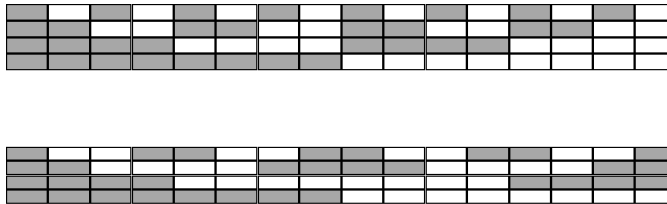
Door het wijzigen van de parameters a , α en f in een praktische situatie, kan het bereik worden verschoven (vergroot dan wel verkleind).

Er zijn complete afstandsmetsystemen op basis van een PSD in de handel. Het afstandsbereik loopt uiteen van enkele cm tot enige meters. In plaats van een PSD kan men ook een diode-array gebruiken; de werking is geheel identiek. Een PSD geeft een analogo signaal af; bij toepassing van een diode-rij is het uitgangssignaal plaats-gekwantiseerd. Om de volle resolutie van het

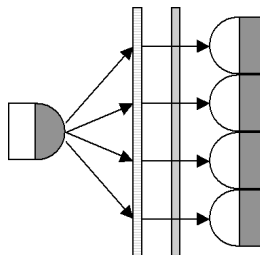
diode-array te benutten is een smalle lichtbundel vereist; bij een PSD is die eis veel lichter, immers de PSD meet feitelijk het “zwaartepunt” van de lichtvlek.

Optische encoders Een optische encoder bestaat uit een plaatselijk transparante strip of schijf, geplaatst tussen een bron en een detector. De encoder is gemonteerd op het verplaatsbare (draaibare) deel, bron en detector op het vaste deel van de constructie, of ook andersom. De encoder kan bestaan uit een doorzichtige schijf (bijvoorbeeld glas of plastic) met donkere lijnen of een metalen plaatje met sleuven. Er zijn twee verschillende typen: absolute en incrementele encoders.

Bij een **absolute encoder** is een binair gecodeerd patroon aangebracht (zie figuur 5.28 voor een lineaire encoder). Doordat bij elke positie een unieke binaire code hoort is de verplaatsing of draaihoek in absolute zin bekend. De resolutie is gelijk aan 2^n , met n het aantal stroken resp. cirkelbanen. De resolutie wordt begrensd door de afmetingen van de encoder en de minimale afstand tussen de n ontvangers (een diode-array). De code is naar keuze Gray (gunstig vanwege maar één binaire overgang per stap, zie p. 3), *natural binary* of BCD (8421).



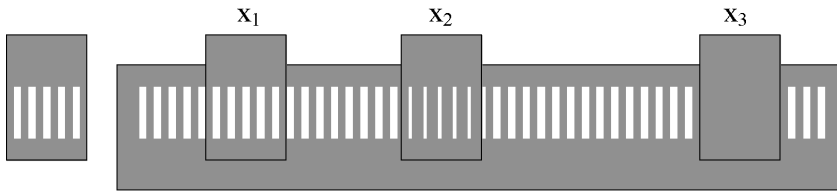
Figuur 5.28: encoderstrip a) *natural binary* b) Gray code



Figuur 5.29: opstelling bron → encoderstrip → dectector

Een **incrementele encoder** bevat slechts één codespoor; er is ook maar één bron en één ontvanger. De verplaatsing wordt gevonden door het aantal wisselingen (licht-donker) te tellen (optellen cq. aftellen afhankelijk van de verplaatsingsrichting). Er is aldus slechts informatie over de toe- of afname in verplaatsing, niet over de absolute positie. Deze laatste wordt gevonden door een referentiemeting, gebruik makend van een referentiecode op de schijf of strip en een extra bron-detectorpaar.

Om een hoge resolutie te behalen, moeten de sleuven zeer smal worden, veel smaller dan de afmetingen van bron en detector, waardoor het onderscheid tussen licht/donker verdwijnt. Met een zogenaamd masker, vast verbonden met de bron/detector, wordt dit opgelost (figuur 5.30).



Figuur 5.30: toepassing van maskers

Om de *richting* van de verplaatsing te kunnen detecteren gebruikt men twee maskers gelijktijdig. De afstand is zodanig gekozen dat de twee uitgangssignalen $\pi/2$ uit fase zijn (**kwadratuur**). Omdat slechts licht-donkerovergangen worden gedetecteerd, worden deze signalen binair gekwantiseerd, 0 of 1, maar blijven $\pi/2$ uit fase. Bij beweging in positieve richting ontstaat de codevolgorde 00 – 01 – 11 – 10 – 00 etc. Bij tegengestelde richting draait deze volgorde ook om en geeft dus richtinginformatie.

Interferometrische verplaatsingsmetingen Grondslag voor optische interferometrie is de meting van het weglengteverschil dat door twee coherente lichtbundels wordt doorlopen. De ene bundel doorloopt een vaste weglengte (de referentie) en de ander een variabele weglengte, die bepaald wordt door de positie van het te meten voorwerp. De twee bundels zijn afkomstig van een enkele bron (laser), die via een optisch systeem in twee coherente bundels wordt gesplitst.

Aan de ontvangtzijde laat men de bundels interfereren, zodat de intensiteit varieert met het weglengteverschil. De periodiciteit is gelijk aan de golflengte van het licht: er ontstaat een licht-donkerpatroon (*fringes*), afhan-

kelijk van de gekozen techniek, in plaats of tijd. In feite is het een *incrementele* meting: voor verplaatsingen groter dan een golflengte moet met een teller het aantal doorlopen periodes worden bijgehouden. Binnen de periode kan worden geïnterpoleerd, waarmee een zeer hoge resolutie wordt verkregen (orde van nm).

Er bestaan vele uitvoeringevormen; de meest toegepaste configuraties zijn:

- klassieke interferometer (Michelson)
- Mach-Zehnder interferometer
- Fabry-Perot interferometer.

Zij verschillen in de wijze waarop de laserbundel worden gesplitst en weer samengevoegd.

De nauwkeurigheid van een interferometer hangt af van de stabiliteit van:

- de golflengte van de bron (een verandering in frequentie Δf introduceert een faseverschuiving van $4\pi\Delta f/c$ met c de lichtsnelheid);
- de brekingsindex van het medium (hangt af van de temperatuur, druk, vochtigheid).

De onnauwkeurigheid van een niet-gecompenseerde interferometer is niet beter dan circa $10 \mu\text{m}$ per meter (dus relatief 10^{-5}). Het bereik loopt sterk uiteen: van enkele cm tot tientallen meters.

Akoestische afstandsmetingen

Akoestische afstandsmetsystemen berusten meestal op looptijdmetingen, dat wil zeggen: de meting van de tijd die een geluidsgolf nodig heeft een te meten afstand te doorlopen TOF^1 . Is de geluidssnelheid bekend, dan kan men de doorlopen afstand berekenen met $x = v_a \cdot t_{\text{TOF}}$. In reflectiemodus (zenden – reflecteren – ontvangen) is de werkelijke afstand de helft van de doorlopen afstand.

De belangrijkste onzekerheid in het meetresultaat bij een TOF-meting wordt gevormd door de temperatuurafhankelijkheid van de geluidssnelheid:

$$v_a = 331,4 \left(1 + 1,83 \cdot 10^{-3} T\right) \quad (5.77)$$

met T de temperatuur in $^{\circ}\text{C}$, dat is ruwweg een toename van 2% per 10 K.

Twee gangbare gebruikte transducenten voor TOF-metingen zijn:

- piëzo-elektrische transducent;
- elektrostatische transducent.

¹Time of Flight

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Beide zijn als zender en ontvanger te gebruiken (ze zijn *reversibel*), en werken in het ultrasonische gebied (boven 20 kHz). Piezoelektrische transducenten werken alleen in resonantie; gebruikelijke frequenties zijn 40 kHz en 200 kHz. Een elektrostatische transducent heeft een bredere band, die tot 100 kHz loopt voor de goedkopere en tot vele tientallen MHz voor de duurdere typen. Een nadeel van het elektrostatische type is de noodzakelijke hoge voorspanning als ontvanger (enige honderden Volts).

De meest gangbare signaaltypen zijn een *burst* (een aantal — 5 tot 10 — perioden van een sinus) en een FM-gemoduleerde burst (*chirp*), ook wel FMCW¹ genoemd. Beide signaaltypen hebben voor- en nadelen.

Voordelen van een burst zijn:

- korte signaalduur, zodat de transmitter na het verzenden als ontvanger kan dienen;
- eenvoudig op te wekken;
- eenvoudige TOF-meting door drempeldetectie.

Nadelen zijn:

- weinig signaalvermogen, dus slechte signaal-ruisverhouding, daardoor beperkt meetbereik;
- vervorming van de burstvorm (bij de smalbandige piezo-elektrische transducenten) hetgeen de bepaling van de TOF bij geringe signaal-ruisverhouding van de echo bemoeilijkt. Om te voorkomen dat de detector ruis aanziet voor een echo legt men een drempel aan. Nadeel hiervan is dat de eerste perioden van een zwakke echo gemist worden: bij 40 kHz betekent dit een fout van ongeveer 7 mm per gemiste periode in de burst.

Het FMCW-signaal wordt beschreven met:

$$\Delta f = f_0 (1 - k \cdot t) - f_0 \{1 - k \cdot (t - \Delta t)\} = f_0 \cdot k \cdot \Delta t \quad (5.78)$$

Het ontvangen signaal vertoont hetzelfde frequentieverloop, slechts verschoven in tijd (en verzwakt); de doorlopen afstand bedraagt daarom:

$$x = \frac{\Delta f \cdot v_a}{2 \cdot k \cdot f_0} \quad (5.79)$$

¹continuous wave FM

Voordelen van de FMCW:

- continu signaal, dus groter signaalvermogen, dus groter bereik;
- informatie over de TOF continu aanwezig.

Nadelen:

- moeilijker op te wekken signaalvorm;
- breedbandig signaal, daardoor niet geschikt voor piëzo-elektrische transducers.

Piëzo-sensors

Piëzo-elektrische sensors maken gebruik van het piëzo-elektrische effect. Materialen die piëzo-elektrisch zijn vertonen een oppervlaktelading ten gevolge van mechanische vervorming, teweeggebracht door een uitgeoefende druk of kracht.

Beschouwt men een stukje piëzo-elektrisch materiaal als een vlakke-plaat-condensator (door tegenoverelkaar liggende vlakken te voorzien van een geleidende laag), dan is volgens $Q = C \cdot V$ het uitgangssignaal ook als spanning beschikbaar.

De gevoeligheid van piëzoelektrische sensoren wordt gekarakteriseerd met de ladingsgevoeligheid S_q [$C N^{-1}$] of de spanningsgevoeligheid $S_u = S_q/C$ [$V N^{-1}$].

Het piëzo-elektrische effect is reversibel, dat wil zeggen dat bij het aanbrengen van een elektrische spanning (of elektrisch veld) het materiaal vervormt. Deze eigenschap wordt benut in piëzo-elektrische actuatoren.

Er bestaan globaal drie groepen piëzo-elektrische (p.e.) materialen:

- natuurlijke p.e. materialen; bekend voorbeeld: kwarts (kristallijn SiO_2);
- keramische materialen (polikristallijn), bijv. bariumtitaanaat ($BaTiO_3$);
- polymeren (bekendste voorbeeld PVDF of PVF₂).

De materialen van de beide laatste groepen worden kunstmatig piëzo-elektrisch gemaakt, door het bij hogere temperatuur (boven de zogenaamde Curie-temperatuur) gedurende een zekere tijd bloot te stellen aan een sterk elektrisch veld ("polen"). Na afkoeling blijft het materiaal gepolariseerd en vertoont piëzo-elektrische eigenschappen.

De piëzo-elektrische gevoeligheid van kwarts is laag maar stabiel: in de orde van 2 pC/N. Keramische materialen hebben een veel grotere p.e. gevoeligheid, variërend van 100 tot meer dan 1000 pC/N; polymeer heeft een gevoeligheid rond 25 pC/N.

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Piëzoelektrische sensoren zijn toe te passen als druk- of krachtopnemer en met een geijkte massa (**seismische massa**) als versnellingsopnemer. Worden er gepoolde materialen gebruikt, dan mag de temperatuur van de sensor niet in de buurt van de Curie-temperatuur komen.

Versnellingsopnemers gedragen zich als een tweede-orde massaveersysteem, waardoor de gevoeligheidskarakteristiek een piek vertoont bij de resonantiefrequentie. Deze ligt tussen globaal 1 kHz en 250 kHz, afhankelijk van de afmetingen van de transducent. Wegens de geringe demping van de constructie is deze piek vrij groot en verkleint in belangrijke mate het frequentie-bereik van de sensor.

De sensoren zijn doorgaans gevoelig in één richting. De zgn 3-assige versies bestaan feitelijk uit drie afzonderlijke opnemers, orthogonaal gemonteerd in één behuizing.

Tabel 5.15 toont enige algemene eigenschappen van enkele commercieel verkrijgbare piëzo-elektrische sensoren, voor verschillende toepassingen.

type	meetbereik (volle schaal)	gevoeligheid	T _{max} (°C)
versnelling	10 ³ ... 10 ⁶ m/s ²	0,1 ... 50 pC/(ms ⁻²)	500
kracht	10 ² ... 10 ⁶ N	2 ... 4 pC/N	300
druk	10 ⁷ ... 10 ⁸ Pa	20 ... 800 pC/MPa	200

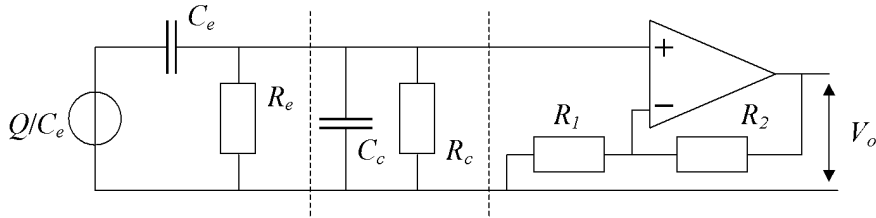
Tabel 5.15: Specificatie van enige piëzo-elektrische transducenten

De primaire signaalgrootheid van een piëzo-elektrische sensor is *lading*. De bronimpedantie is te beschrijven met een capaciteit C_e (eventueel met een extra weerstand R_e die de lek vertolkt). Er zijn dus twee manieren om het ladingssignaal om te zetten in een (gemakkelijker te verwerken) spanning. Bij de eerste methode wordt direct de spanning over de sensorcapaciteit gemeten; bij de tweede methode wordt de stroom (verandering van lading) gemeten, met behulp van een ladings-spanning omzetter (meestal - maar onjuist - aangeduid met *ladingsversterker*).

Van beide methoden staan hieronder eenvoudige interface circuits weergegeven, met de bijbehorende overdrachten.

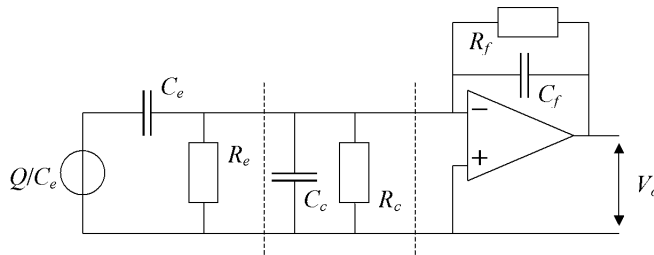
Overdracht van de spanningsversterker, met kabelimpedantie (R_c en C_c):

$$H_v = \frac{V_o}{Q/C_e} = A \cdot \frac{j\omega R_p C_e}{1 + j\omega R_p (C_e + C_c)} = A \cdot \frac{C_e}{C_e + C_c} \cdot \frac{j\omega R_p (C_e + C_c)}{1 + j\omega R_p (C_e + C_c)} \quad (5.80)$$



Figuur 5.31: spanningsversterker

met $R_p = R_e \parallel R_c$ (parallelschakeling) en $A = 1 + R_2/R_1$. De overdracht heeft dus het karakter van een hoogdoorlaatfilter. Alleen voor hoge frequenties is de overdracht frequentie-onafhankelijk en bedraagt dan $C_e/(C_e + C_c)$. Er treedt signaalverzwakking op ten gevolge van de ingangsimpedantie van de versterker en de kabelcapaciteit. De overdracht hangt dus af van de kabelcapaciteit en daarmee van de lengte van de kabel. Bij wijziging van de kabel moet dus de gevoeligheid van het systeem opnieuw worden vastgesteld.



Figuur 5.32: lading-spanningomzetter

Overdracht van de ladingsversterker, inclusief de noodzakelijke terugkoppelweerstand R_f :

$$H_c = \frac{V_o}{Q/C_e} = -\frac{C_e}{C_f} \cdot \frac{j\omega R_f C_f}{1 + j\omega R_f C_f} \quad (5.81)$$

Ook deze overdracht heeft een hoogdoorlaat karakter, met een kantelpunt dat nu uitsluitend bepaald wordt door de elektronische componenten van de ladingsversterker. Afhankelijk van het gekozen type operationele versterker kan het kantelpunt worden gelegd bij frequenties tot minder dan 0,01 Hz. Echt statisch meten blijft evenwel niet mogelijk.

Hoofdstuk 6 Signalen

Inhoudsopgave

Signalen en systemen	372
Signaalrepresentatie	372
Systemen	377
Transformaties	385
Transductietechniek	402
Energie en poorten	402
Toestandsvariabelen	402
Arbeid aan de poorten	403
Energiebuffers	404
Bepaling van efforts	406
Sturing van de transducent	406
Instelpunten en karakteristieke vergelijkingen	407
Stabiliteit	408
Harmonische signalen	409
Dynamische Systemen	411
Systeembegrippen	411
Fysische domeinen	411
Bondgrafen	416
Regeltechniek	421
Systeembeschrijvingen	421
Blok-schema's en stroomschema's	425
Polen- en nulpuntenbeeld	428
Bodeplots, Nicholsdiagrammen en polaire figuren	432
Stabiliteit	434
Open en gesloten systemen	435
Regelaars met lag- en leadnetwerken	438
Ontwerpen van regelaars met toestandsterugkoppeling	441
Niet-lineariteiten	443
Algemeen toepasbare regelaars	443

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Signalen en systemen

Signaalrepresentatie

Om systemen met een bepaalde fysische in- en uitgangssignalen te modelleren worden vaak functies gebruikt. Hoewel dit geen tijdfuncties hoeven te zijn (functies van plaats zijn bijvoorbeeld ook mogelijk), zal hieronder, tenzij anders vermeld, t als onafhankelijke variabele worden genomen met als eenheid de seconde. Per conventie is $x(t)$ het **ingangssignaal** van een systeem en $y(t)$ het **uitgangssignaal** of **responsie** op het ingangssignaal. Bij het bespreken van signalen zonder de notie van een systeem wordt de naam $x(t)$ gebruikt.

Voor signalen over continue tijd ($t \in \mathbb{R}$) wordt de notatie $x(t)$ gebruikt. Signalen in discrete tijd worden aangeduid met $x[n]$ ($n \in \mathbb{Z}$). Andere notaties voor signalen in discrete tijd zijn x_n en $x(n)$.

Periodieke signalen

Signalen worden **periodiek** genoemd als er een constante $T > 0$ bestaat, zodat

$$x(t) = x(t - kT) \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (6.1)$$

$$x[n] = x[n - kN] \quad k = 1, 2, 3 \dots \quad (6.2)$$

De kleinste T (voor discrete tijd N) waarvoor dit geldt, wordt de **periode** van het signaal genoemd. Zie 'grootste gemene deler' (p. 43) voor het bepalen van de gemeenschappelijke periode.

Sinus en cosinus

De sinus en cosinus zijn veelgebruikte periodieke functies om signalen te beschrijven (of het reële deel van (6.5), via de **Euler-vergelijking**):

$$x(t) = A \sin(\omega t + \varphi) \quad (6.3)$$

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi) \quad (6.4)$$

$$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t \quad (6.5)$$

Waarin A de **amplitude** (maximale uitwijking) van het signaal is, ω de **hoekfrequentie** van het signaal in radialen per seconde en φ de faseverschuiving vanaf $t = 0$ naar links in radialen. Hieruit volgt dat $T (= \frac{2\pi}{\omega})$ de periode in seconden is, $f (= \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi})$ de **frequentie** in Hz en $\omega = 2\pi f$ de hoekfrequentie.

Ook in discrete tijd kunnen de sinus en cosinus worden gebruikt om signalen te beschrijven (eventueel in de Euler-vorm). De frequentie in discrete tijd wordt aangeduid met Ω .

$$x[n] = A \sin(\Omega n + \Phi) \quad (6.6)$$

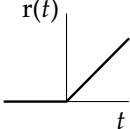
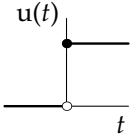
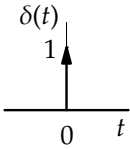
$$x[n] = A \cos(\Omega n + \Phi) \quad (6.7)$$

$$e^{j\Omega n} = \cos \Omega n + j \sin \Omega n \quad (6.8)$$

De genoemde signalen zijn dan en slechts dan periodiek, als $\Omega/2\pi$ een rationeel getal is. De periode wordt dan gegeven door $N = 2\pi m/\Omega$, waarbij m het kleinste mogelijke getal is, waarvoor N een geheel getal is.

Elementaire signalen

Om signalen in het (continue) tijddomein te beschrijven zijn er de volgende aperiodieke functies:

naam	definitie	representatie
eenheidshelling <i>ramp</i>	$r(t) = \begin{cases} t & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases}$	
stapfunctie Heaviside-functie ^a <i>unity step</i>	$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} = \begin{cases} 1 & \text{als } t \geq 0 \\ 0 & \text{als } t < 0 \end{cases}$	
Dirac-functie ^b deltafunctie impuls	$\int_{t_1}^{t_2} x(t) \delta(t) dt = x(t_0)$ $t_1 < 0 < t_2$ $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$	

^anaar Oliver Heaviside (1850-1925)

^bnaar Paul Adrien Maurice Dirac (1902-1984)

Algemeen

Wiskunde

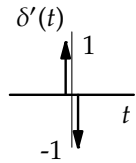
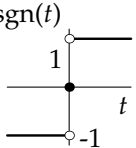
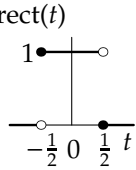
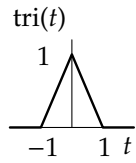
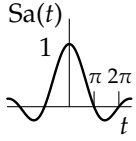
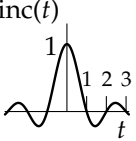
Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

naam	definitie	representatie
afgeleide deltafunctie	$\delta'(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}$	
signum-functie	$\text{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } t > 0 \\ 0 & \text{als } t = 0 \\ -1 & \text{als } t < 0 \end{cases}$	
blokfunctie	$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{als } -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	
driehoekfunctie	$\text{tri}(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{als } -1 < t < 1 \\ 0 & \text{elders} \end{cases}$	
sampling-functie	$\text{Sa}(t) = \frac{\sin t}{t}$	
sinc-functie	$\text{sinc}(t) = \frac{\sin \pi t}{\pi t} = \text{Sa}(\pi t)$	

Twee van de genoemde elementaire functies hebben een parallel in het discrete-tijd domein:

naam	definitie	representatie
stapfunctie <i>unity step</i>	$u[n] = \begin{cases} 1 & \text{als } n \geq 0 \\ 0 & \text{als } n < 0 \end{cases}$	
deltafunctie impuls	$\delta[n] = u[n] - u[n-1] = \begin{cases} 1 & \text{als } n = 0 \\ 0 & \text{als } n \neq 0 \end{cases}$	

Deltafunctie

De deltaxfunctie speelt een belangrijke rol in de analyse van signalen en systemen en heeft de volgende eigenschappen:

1. $\delta(0) \rightarrow \infty$, discrete tijd: $\delta[0] = 1$
2. $\delta(t) = 0$ als $t \neq 0$, discrete tijd: $\delta[n] = 0$ als $n \neq 0$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$
4. $\delta(t)$ is een even functie: $\delta(-t) = \delta(t)$, discrete tijd: $\delta[n] = \delta[-n]$

Verder gelden er drie belangrijke eigenschappen (twee eigenschappen samen met een signaal $x(t)$ of $x[n]$):

- de **zeef-eigenschap** (*sifting property*):

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau, \text{ discrete tijd: } x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \delta[n - k]$$

- de **bemonster-eigenschap** (*sampling property*):

$$x(t) \delta(t - t_0) = x(t_0) \delta(t - t_0), \text{ discrete tijd: } x[n] \delta[n - n_0] = x[n_0] \delta[n - n_0]$$

- de **schaaleigenschap** (*scaling property*):

$$\delta(at + b) = \frac{1}{|a|} \delta\left(t + \frac{b}{a}\right)$$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Transformaties van de onafhankelijke variabele

Door algebraïsche operaties op de onafhankelijke variabele uit te voeren kan het signaal $x(t)$ naar $\hat{x}(t)$ worden getransformeerd (of van $x[n]$ naar $\hat{x}[n]$).

naam	definitie
schuifoperatie t_0 (n_0) naar rechts <i>shift operation</i>	$\hat{x}(t) = x(t - t_0)$ $\hat{x}[n] = x[n - n_0]$
schaaloperatie met a comprimeren <i>scaling operation</i>	$\hat{x}(t) = x(at)$
spiegeloperatie <i>reflection</i>	$\hat{x}(t) = x(-t)$ $\hat{x}[n] = x[-n]$

Let op: tijdschaling hoeft bij tijddiscrete signalen absoluut geen gecomprimeerd of uitgerekte versie van het oorspronkelijke signaal op te leveren!

Energie en vermogenssignalen

Een signaal $x(t)$ (of $x[n]$) wordt een **energiesignaal** genoemd als:

$$E = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 < \infty \quad (6.9)$$

De waarde van deze integraal is dan de energie van het signaal.

Een signaal $x(t)$ (of $x[n]$) wordt een **vermogenssignaal** genoemd als:

$$P_{\text{rms}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2L} \int_{-L}^L |x(t)|^2 dt \right] = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2 \right] < \infty \quad (6.10)$$

De waarde van deze integraal is dan het **RMS¹-vermogen** van het signaal. Voor een periodiek signaal wordt het vermogen bepaald door over één periode T (of N) te integreren (sommen):

$$P_{\text{rms}} = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 \quad (6.11)$$

¹Root Mean Square

Systemen

Tenzij anders vermeld, gelden de vermelde eigenschappen zowel voor tijd-continue als tijddiscrete systemen. Voor signalen $x(t)$, $y(t)$ en systemen $h(t)$ kunnen dan $x[n]$, $y[n]$ en $h[n]$ worden gelezen.

Lineaire systemen

Zij $y_1(t)$ de **responsie** van een systeem opingangssignaal $x_1(t)$ en $y_2(t)$ de responsie op $x_2(t)$, dan heet het systeem **lineair** dan en slechts dan, als voor alle $x_1(t)$ en $x_2(t)$ geldt dat (\rightarrow betekent ‘geeft als uitgangssignaal’):

$$\alpha x_1(t) + \beta x_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t) \quad (6.12)$$

Als een systeem lineair is, kan voor het voorspellen van de responsie op de som van meerdereingangssignalen van dit principe gebruik gemaakt worden: sluit één voor één de ingangssignalen aan, bepaal de responsies en tel deze op. Deze methode heet het gebruik maken van het **superpositiebeginsel**.

Tijdvarierende en tijd-invarante systemen

Een systeem heet dan en slechts dan **tijd-invariant**, als (6.13) geldt voor alle ingangssignalen $y(t)$ en voor alle t_0 . Anders heet het systeem **tijdvarierend**.

$$x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0) \quad (6.13)$$

Lineaire, tijd-invariante systemen

Veel fysisch realiseerbare systemen zijn te modelleren als **LTI**¹. Een LTI-systeem wordt volledig gekarakteriseerd door zijn **impulsresponsie** $h(t)$ (het uitgangssignaal bij $\delta(t)$ als ingangssignaal).

Veel LTI-systemen worden beschreven door differentiaalvergelijkingen. Om de impulsresponsie van zo’n systeem te vinden moet deze differentiaalvergelijking worden opgelost: $h(t) = y(t)$ en $x(t) = \delta(t)$. In de meeste gevallen bestaat de particuliere oplossing hoogstens uit één deltafunctie, zelden bevat de particuliere oplossing hogere afgeleiden van de deltafunctie. Zie pag. 79 voor verschillende methoden om differentiaalvergelijkingen op te lossen.

¹lineair en tijd-invariant

Systemen met en zonder geheugen

Een systeem heet **geheugenloos**, als de waarde aan de uitgang op elk moment alleen afhangt van de waarde van de ingang op dat moment. In het geval van een LTI-systeem heeft het systeem een impulsresponsie die alleen op $t = 0$ een waarde ongelijk nul heeft: $h(t) = K\delta(t)$.

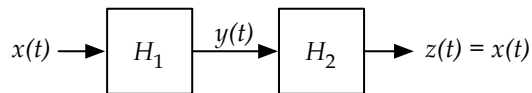
Als de waarde aan de uitgang op elk moment alleen afhangt van het ingangssignaal gedurende een eindige periode vóór dit moment, dan heeft het systeem een eindig geheugen (*finitiy-memory system*). Als het om een LTI-systeem gaat, dan heeft het systeem een impulsresponsie met eindige lengte of **FIR**¹. Bij een oneindige impulsresponsie spreken we van een **IIR**².

Causale en non-causale systemen

Een systeem heet **causaal** als de uitgangswaarde op elk moment t_0 alleen afhangt van het ingangssignaal voor $t \leq t_0$. Als het om een LTI-systeem gaat heeft het systeem een impulsresponsie die nul is voor $t < 0$.

Inverse systemen

Een systeem heet **inverteerbaar** als er een systeem bestaat dat het effect van het eerste systeem teniet doet (H_2 is het inverse systeem van H_1):



Bij LTI-systemen geldt dat, als h_1 de impulsresponsie van het originele systeem is en h_2 die van het inverse systeem, dat $(h_1 * h_2)(t) = \delta(t)$.

Stabiliteit

Een veelgebruikte eis aan stabiliteit is het hebben van **BIBO**³-stabiliteit. Een systeem is BIBO-stabiel als voor elke $x(t)$ en alle t waarden B_1 en B_2 bestaan:

$$|x(t)| < B_1 < \infty \rightarrow |y(t)| < B_2 < \infty \quad (6.14)$$

LTI-systemen zijn BIBO-stabiel als de impulsresponsie absoluut integreerbaar is ($\int_{-\infty}^{\infty} h(t) dt < \infty$).

¹finite impulse response

²infinite impulse response

³bounded input bounded output

In de praktijk is het bij het serieschakelen van een inverse systeem van belang dat zowel het eerste als het tweede (inverterende) systeem stabiel zijn. Een buitensporig signaal aan de uitgang van het eerste systeem zal vanwege niet-lineairiteit namelijk de bedoelde totaaloverdracht verstoren.

De stabiliteit van een systeem kan ook met de Laplace-getransformeerde $H(s)$ worden beoordeeld. Als deze een vorm heeft als in (6.85) op p. 398, dan zijn de (complexe) polen te bepalen. Aan de hand van de ligging van de polen kan een uitspraak over de stabiliteit worden gedaan:

1. Enkelvoudige polen in het linkerhalfvlak: het systeem is stabiel, de polen komen overeen met een uitdempende responsie.
2. Meervoudige polen in het linkerhalfvlak: het systeem is stabiel, meer negatieve polen komen overeen met sterker uitdempende responsies.
3. Enkelvoudige polen op de imaginaire as: het systeem is marginaal stabiel, de polen komen overeen met de resonantiefrequentie(s) van het systeem. Wanneer het systeem een van deze frequenties als ingangssignaal krijgt, gaat het systeem resoneren en neemt het uitgangssignaal zonder beperking toe.
4. Meervoudige polen op de imaginaire as: het systeem is instabiel.
5. Enkelvoudige polen in het rechterhalfvlak: het systeem is instabiel, ook bij beperkte ingangssignalen ontstaat een onbegrensde responsie.
6. Meervoudige polen in het rechterhalfvlak: het systeem is instabiel.

De stabiliteit van een tijddiscreet systeem kan worden beoordeeld op de overdracht $H(z)$; de polen van een stabiel systeem liggen binnen de eenheidscirkel op het z -vlak.

Convolutie-integraal

Omdat elk (ingang)signaal op te vatten is als een continuüm van gewogen deltafuncties (zie 'Zeef-eigenschap', p. 375), kan voor LTI-systemen de responsie op elk signaal berekend worden als de responsie op een impuls (de impulsresponsie $h(t)$) bekend is. Deze berekening is de **convolutie-integraal** of **lineaire convolutie**:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \quad (6.15)$$

Voor tijddiscrete systemen met impulsresponsie $h[n]$ is er de **convolutiesom**:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \quad (6.16)$$

Deze berekening wordt ook wel genoteerd als operator op de functies h en x :

$$y(t) = (x * h)(t) \quad (6.17)$$

of, slordiger (omdat het lijkt alsof deze berekening voor elke t gebeurt):

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (6.18)$$

Convolutie heeft de commutatieve, associatieve en distributieve eigenschappen en gedraagt zich dus als een gewone vermenigvuldiging. Twee seriegeschakelde systemen (impulsresponsies $h_1(t)$ en $h_2(t)$) kunnen worden vervangen door één systeem met impulsresponsie $(h_1 * h_2)(t)$. Twee parallel geschakelde (uitgangen opgeteld) systemen kunnen worden vervangen door één systeem met impulsresponsie $h_1(t) + h_2(t)$.

Voorbeeld van een convolutieintegraal

Gegeven een ingangssignaal $x(t)$ en een systeem met impulsresponsie $h(t)$:

$$x(t) = r(1-t)u(t) \quad h(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0 \quad (6.19)$$

De convolutieintegraal luidt:

$$(x * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} r(1-\tau)u(\tau) \cdot e^{-a(t-\tau)}u(t-\tau) d\tau \quad (6.20)$$

Het product $u(\tau)u(t-\tau)$ is in dit geval alleen 1 tussen $\tau = 0$ en $\tau = t$, dus:

$$(x * h)(t) = \int_0^t r(1-\tau) \cdot e^{-a(t-\tau)} d\tau = \frac{1}{a} e^{-at} (1 - e^{-at}) \quad (6.21)$$

Periodieke convolutie

In het discrete-tijddomein komt ook **periodieke- of circulaire convolutie** voor. Deze convolutiesom werkt op twee periodieke signalen met gemeenschappelijke periode N en is gedefinieerd als:

$$y[n] = x_1[n] \circledast x_2[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[n]x_2[n-k] \quad (6.22)$$

Simulatiediagrammen

Systemen beschreven door differentiaalvergelijkingen kunnen als volgt worden omgeschreven naar **simulatiediagrammen**, onder andere om een toestandbeschrijving te kunnen maken.

Stap 1. Schrijf de differentiaalvergelijking om in termen met 'factor' $D = \frac{d}{dt}$:

$$y'' + 5y' + 4y = 2x'' - 2x' + x \quad (6.23)$$

$$y'' = 2x'' - 5y' - 2x' - 4y + x \quad (6.24)$$

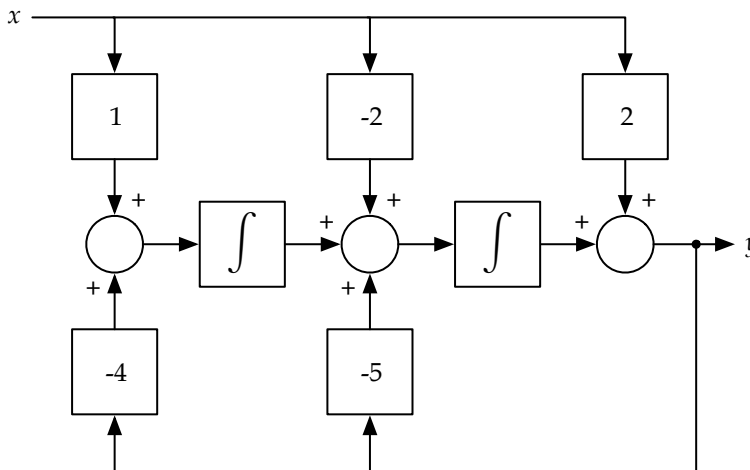
$$D^2[y] = D^2[2x] + D^1[-5y - 2x] + D^0[-4y + x] \quad (6.25)$$

Stap 2. Integreren tot er links y staat en D buiten haakjes halen:

$$y = 2x + D^{-1}[-5y - 2x] + D^{-2}[-4y + x] \quad (6.26)$$

$$y = 2x + D^{-1}[-5y - 2x + D^{-1}[-4y + x]] \quad (6.27)$$

Stap 3. Tekenen als simulatiediagram waarbij elke D^{-1} in een integrator-blokje komt, y rechts-midden en x linksboven.



Toestandsbeschrijvingen

Als een systeem is beschreven met een simulatiediagram, dan kan eenvoudig een **toestandsbeschrijvingsfunctie** in vectorvorm worden afgeleid (**ABCD-notatie**):

Stap 1. Noem de uitgangen van de integratoren van uitgang naar ingang v_1, v_2, \dots, v_n , de ingangen van de integratoren heten dan v'_1, v'_2, \dots, v'_n . Schrijf een vergelijking op voor het uitgangssignaal en voor de ingangen van de integratoren.

$$y = v_1 + 2x \quad (6.28)$$

$$v'_1 = v_2 - 5y - 2x = v_2 - 5(v_1 + 2x) - 2x = -5v_1 + v_2 - 12x \quad (6.29)$$

$$v'_2 = -4y + x = -4(v_1 + 2x) + x = -4v_1 - 7x \quad (6.30)$$

Stap 2. Schrijf dit in vectorvorm $\vec{v}' = \mathbf{A}\vec{v} + \vec{b}x$ en $y = \vec{c}v + dx$:

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 \\ -7 \end{bmatrix} x \quad (6.31)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + 2x \quad (6.32)$$

Het beschreven systeem is dan en slechts dan stabiel, als alle eigenwaarden van \mathbf{A} een negatief reëel deel hebben.

Voor het oplossen van de verkregen vectoriële differentiaalvergelijking moet, net als bij het oplossen van scalaire DV's, eerst de homogene oplossing worden gevonden. Deze is hier van de vorm:

$$\vec{v}(t) = e^{\mathbf{A}t} \vec{v}_0 \quad (6.33)$$

Hier verschijnt een matrix in de exponent en dat is bijzonder. Een van de manieren om de exponent $e^{\mathbf{A}t}$ om te schrijven naar de **toestandsovergangsmatrix** $\Phi(t)$ is deze:

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(t) \mathbf{A}^i \quad (6.34)$$

Waarbij \mathbf{A} een $N \times N$ matrix is. Als \mathbf{A} unieke eigenwaardes λ_j heeft, is $\gamma_i(t)$ te vinden door dit stelsel van vergelijkingen op te lossen:

$$e^{\lambda_j t} = \sum_{i=0}^{N-1} \gamma_i(t) \lambda_j^i \quad j = 1, \dots, N \quad (6.35)$$

Als \mathbf{A} herhaalde eigenwaardes heeft, moet de herhaalde vergelijking links en rechts gedifferentieerd worden naar λ om voldoende unieke vergelijkingen te krijgen. (Zie ook het voorbeeld op pagina 383.)

\mathbf{A}^i kan bepaald worden door het theorema van **Cayley-Hamilton** te gebruiken, dat stelt dat elke $n \times n$ matrix voldoet aan zijn eigen karakteristieke vergelijking $g(\lambda) = 0 \rightarrow g(\mathbf{A}) = \vec{0}$. Bijvoorbeeld:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \quad (6.36)$$

$$|\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}| = g(\lambda) = \lambda^2 - 6\lambda - 3 = 0 \quad (6.37)$$

$$g(\mathbf{A}) = \vec{0} \rightarrow \mathbf{A}^2 - 6\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \vec{0} \quad (6.38)$$

$$\mathbf{A}^2 = 6\mathbf{A} + 3\mathbf{I} \quad (6.39)$$

Met deze uitkomst is elke macht van een matrix uit te drukken in een lineaire combinatie van de termen \mathbf{A}^k met $k = 0, 1, \dots, n - 1$. Bijvoorbeeld:

$$\mathbf{A}^3 = 6\mathbf{A}^2 + 3\mathbf{A} \quad (6.40)$$

$$= 6(6\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) + 3\mathbf{A} \quad (6.41)$$

$$= 39\mathbf{A} + 3\mathbf{I} \quad (6.42)$$

Ook negatieve machten (bijvoorbeeld \mathbf{A}^{-1}) kunnen zo worden uitgedrukt, als ze bestaan:

$$\mathbf{A}^2 \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \quad (6.43)$$

$$(6\mathbf{A} + 3\mathbf{I}) \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \quad (6.44)$$

$$6\mathbf{I} + 3\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A} \quad (6.45)$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3}(\mathbf{A} - 6\mathbf{I}) \quad (6.46)$$

Voorbeeld van een toestandsbeschrijving

Gegeven de matrix:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.47)$$

wordt de toestandsovergangsmatrix gegeven door (6.34) uit te schrijven:

$$\Phi(t) = e^{\mathbf{A}t} = \gamma_0 \mathbf{I} + \gamma_1 \mathbf{A} + \gamma_2 \mathbf{A}^2 \quad (6.48)$$

Eerst worden γ_0 , γ_1 en γ_2 bepaald door het stelsel van vergelijkingen van (6.35) op te lossen. De matrix heeft als eigenwaardes $\lambda_1 = -1$ en $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$, dus moet – om een unieke derde vergelijking te krijgen – worden gedifferentieerd naar λ :

$$e^{-t} = \gamma_0(t) - \gamma_1(t) + \gamma_2(t) \quad (6.49)$$

$$e^{-2t} = \gamma_0(t) - 2\gamma_1(t) + 4\gamma_2(t) \quad (6.50)$$

$$te^{-2t} = \gamma_1(t) - 4\gamma_2(t) \quad (6.51)$$

Hieruit zijn γ_0 , γ_1 en γ_2 te vinden:

$$\gamma_0(t) = 4e^{-t} - 3e^{-2t} - 2te^{-2t} \quad (6.52)$$

$$\gamma_1(t) = 4e^{-t} - 4e^{-2t} - 3te^{-2t} \quad (6.53)$$

$$\gamma_2(t) = e^{-t} - e^{-2t} - te^{-2t} \quad (6.54)$$

Als dan nog \mathbf{A}^2 berekend wordt, is de toestandsovergangsmatrix bekend:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \gamma_0 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \gamma_1 \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma_2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & -16 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-2t} - 2te^{-2t} & 4te^{-2t} \\ 0 & -te^{-2t} & e^{-2t} + 2te^{-2t} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.55)$$

Transformaties

Fourier-reeks

Een groot deel van alle periodieke signalen kan worden gerepresenteerd als som van een aftelbaar oneindig aantal sinusoïden: de **Fourier-reeks**¹.

Om een signaal $x(t)$ met periode T te kunnen representeren als Fourier-reeks, moeten de zogenaamde **Dirichlet-voorwaarden** gelden (voldoende maar niet noodzakelijke voorwaarde):

1. $x(t)$ is absoluut integreerbaar, dat wil zeggen:

$$\int_h^{h+T} |x(t)| dt < \infty \quad (6.56)$$

2. $x(t)$ heeft een eindig aantal maxima en minima.
3. $x(t)$ heeft een eindig aantal discontinuïteiten.

De meeste 'echte' periodieke signalen voldoen aan deze voorwaarden; de Fourier-reeks zal dan convergeren naar het oorspronkelijke signaal. Op discontinuïteiten in het signaal convergeert de Fourier-reeks naar het gemiddelde van de links- en rechtszijdige limiet.

De Fourier-reeks van een periodiek signaal $x(t)$ met periode T is:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{j\frac{2n\pi t}{T}} \quad (6.57)$$

De (complexe) coëfficiënten c_n worden gegeven door:

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} x(t) e^{j\frac{2n\pi t}{T}} dt \quad (6.58)$$

De coëfficiënten c_n met $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ stellen de bijdrage van de frequenties $n\omega_0$ aan het signaal $x(t)$ voor (met $\omega_0 = 2\pi/T$). Zo stelt de magnitude van c_0 de **DC-component** of gemiddelde waarde van het signaal voor. De frequentie $n\omega_0$ wordt ook wel de **n-de harmonische** genoemd.

Een magnitudeplot van de componenten $|c_n|$ of een faseplot van $\arg(c_n)$ wordt ook wel **lijnspectrum** genoemd.

Voor reëelwaardige signalen geldt dat $|c_n| = |c_{-n}|$ en $\arg(c_n) = -\arg(c_{-n})$. De magnitudeplot heeft dan dus even- en de faseplot oneven symmetrie.

¹naar Jean-Baptiste Fourier (1768-1830)

Symmetrie

Het oorspronkelijke signaal kan verschillende vormen van **symmetrie** hebben:

1. **even symmetrie:** $x(t) = x(-t)$
2. **oneven symmetrie:** $x(t) = -x(-t)$
3. **half-wave oneven symmetrie:** $x(t) = -x(t + \frac{1}{2}T)$

Deze symmetrie uit zich als volgt in de Fourierreeks van het signaal:

symmetrie	c_0	$\Re\{c_n\}$	$\Im\{c_n\}$
even	$c_0 \neq 0$	$\Re\{c_n\} \neq 0$	$\Im\{c_n\} = 0$
oneven	$c_0 = 0$	$\Re\{c_n\} = 0$	$\Im\{c_n\} \neq 0$
half-wave oneven	$c_0 = 0$	$\Re\{c_{2n}\} = 0$ $\Re\{c_{2n+1}\} \neq 0$	$\Im\{c_{2n}\} = 0$ $\Im\{c_{2n+1}\} \neq 0$

(Waarbij $\neq 0$ betekent dat de coëfficiënt niet noodzakelijk nul is.) Bij een van deze vormen van symmetrie kan de integraal van (6.58) voor een halve periode worden berekend, waarna de coëfficiënten moeten worden verdubbeld.

Lineariteit

Gegeven twee periodieke signalen $x(t)$ en $y(t)$ met gemeenschappelijke periode T . Laat $z(t)$ een som van beide signalen zijn (met willekeurige constanten k_1 en k_2), periodiek met periode T :

$$z(t) = k_1x(t) + k_2y(t) \quad (6.59)$$

Als a_n de Fourier-coëfficiënten van $z(t)$ zijn, b_n die van $x(t)$ en c_n die van $y(t)$, dan geldt:

$$a_n = k_1b_n + k_2c_n \quad (6.60)$$

Tijdverschuiving

Als $x(t)$ de coëfficiënten c_n heeft, dan heeft $x(t - \tau)$ de coëfficiënten d_n :

$$d_n = c_n e^{-jn\omega_0\tau} \quad (6.61)$$

(In feite een fasedraaiing van $n\omega_0\tau$, de magnitudes blijven gelijk.)

Vermogen

Het RMS-vermogen (6.11) van een signaal x_t met coëfficiënten c_n bedraagt (volgens het **theorema van Parseval**):

$$P_{\text{rms}} = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |c_m|^2 \quad (6.62)$$

Fourier-transformatie

De Fourierreeks kan alleen gebruikt worden om periodieke signalen te representeren. Met de **Fourier-transformatie** kunnen zowel periodieke als aperiodieke signalen worden gerepresenteerd. De Fourier getransformeerde is nu een continue functie van de frequentie (representatie in het **frequentiedomein**).

Voldoende voorwaarde voor het bestaan van de Fourier-getransformeerde is nog steeds het gelden van de Dirichlet-voorwaarden (zie p. 385).

De Fourier-transformatie wordt vaak aangeduid met \mathcal{F} , de getransformeerde met een hoofdletter. Hoewel de Fourier-getransformeerde in principe alleen een functie is van ω wordt bijna altijd $j\omega$ geschreven. Dus:

$$X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} \quad (6.63)$$

$$x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(j\omega)\} \quad (6.64)$$

De (bijjectieve) Fourier-transformatie is als volgt gedefinieerd:

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (6.65)$$

$$X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (6.66)$$

De voornaamste eigenschappen van de Fourier-transformatie staan op de volgende pagina.

eigenschap	$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\}$
lineariteit	$\sum_{n=1}^N k_n x_n(t)$	$\sum_{n=1}^N k_n X_n(j\omega)$
tijdverschuiving	$x(t - t_0)$	$X(j\omega)e^{-j\omega t_0}$
frequentieverschuiving	$x(t) e^{j\omega_0 t}$	$X(j(\omega - \omega_0))$
tijdschaling	$x(kt)$	$\frac{1}{ k } X\left(\frac{j\omega}{k}\right)$
differentiëren	$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$	$(j\omega)^n X(j\omega)$
integreren	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{X(j\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$
vermogen	$\int_{-\infty}^{\infty} x(t) ^2 dt$	$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) d\omega$
convolutie	$(x * h)(t)$	$X(j\omega)H(j\omega)$
modulatie	$x(t)m(t)$	$(X * M)(j\omega)$
vermenigvuldigen met t	$(-jt)^n x(t)$	$\frac{d^n X(j\omega)}{d\omega^n}$
dualiteit	$X(jt)$	$2\pi x(-\omega)$
complexe conjugatie	$x^*(t)$	$X^*(-j\omega)$

Tabel 6.1: Belangrijkste kenmerken van de Fourier-transformatie

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

$f(t)$	$\mathcal{F}\{f(t)\}$
1	$2\pi \delta(\omega)$
$\delta(t)$	1
$\delta(t - \tau)$	$e^{j\omega\tau}$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$\frac{2\pi}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(\omega - \frac{2n\pi}{T}\right)$
$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega_0 t}$	$2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\omega - n\omega_0)$
$e^{j\omega_1 t}$	$2\pi \delta(\omega - \omega_1)$
$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
$\frac{1}{2}\delta(t) - \frac{1}{j2\pi t}$	$u(\omega)$
$\text{rect}(t/\tau), \tau > 0$	$\tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2\pi}\right) = \frac{2 \sin(\omega\tau/2)}{\omega}$
$\frac{\omega_1}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_1 t}{\pi}\right) = \frac{\sin(\omega_1 t)}{\pi t}, \omega_1 > 0$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_1}\right)$
$\text{tri}(t/\tau), \tau > 0$	$\tau \text{sinc}^2 \frac{\omega\tau}{2\pi}$
$\frac{\omega_1}{\pi} \text{sinc}^2\left(\frac{\omega_1 t}{\pi}\right) = \frac{\sin(\omega_1 t)}{\pi t}, \omega_1 > 0$	$\text{tri}\left(\frac{\omega}{2\omega_1}\right)$
$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
$-\frac{1}{j\pi t}$	$\text{sgn}(\omega)$
$\cos(\omega_0 t)$	$\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

	$\mathbf{f(t)}$	$\mathcal{F}\{\mathbf{f(t)}\}$
Algemeen	$\sin(\omega_0 t)$	$-j\pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
Wiskunde	$\cos(\omega_0 t)\mathbf{u}(t)$	$\frac{\pi}{2}(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) + \frac{j\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}$
	$\sin(\omega_0 t)\mathbf{u}(t)$	$-\frac{j\pi}{2}(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)) + \frac{\omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$
Informatica	$\cos(\omega_0 t)\text{rect}(t/\tau)$	$\tau \text{sinc} \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2\pi}$
	$e^{-at}\mathbf{u}(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$
Fysica	$te^{-at}\mathbf{u}(t), \Re\{a\} > 0$	$\left(\frac{1}{a + j\omega}\right)^2$
	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-at}\mathbf{u}(t), \Re\{a\} > 0$	$\frac{1}{(a + j\omega)^n}$
Meten	$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{a^2 + \omega^2}$
	$te^{-a t }, \Re\{a\} > 0$	$\frac{4a j\omega}{a^2 + \omega^2}$
Signalen	$\frac{1}{a^2 + t^2}, \Re\{a\} > 0$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
	$\frac{t}{a^2 + t^2}, \Re\{a\} > 0$	$-j\omega \frac{\pi}{2a} e^{-a \omega }$
Elektronica	$e^{-at^2}, a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{\omega^2}{4a}}$
	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}, \sigma > 0$	$e^{-\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2}$

Tabel 6.2: Belangrijke Fourier-getransformeerden

Discrete-tijd Fourier-reeks

De Fourier-reeks bestaat voor (bijna) alle periodieke signalen in discrete tijd (DTFS¹). Voor een signaal $x[n]$, periodiek met periode N geldt:

$$x[n] = \sum_{k=k_0}^{k_0+N-1} c_k e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (6.67)$$

$$c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=n_0}^{n_0+N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} \quad (6.68)$$

Zoals te zien kan de transformatie op elke periode N worden toegepast. Ook de Fourier-coëfficiënten herhalen zich met periode N . Voor de discrete-tijd Fourier-reeks gelden dezelfde eigenschappen als voor de gewone Fourier-reeks (zie pagina 386).

De convolutie kan periodiek of niet-periodiek zijn. Als beide signalen niet (met dezelfde periode) periodiek zijn, spreken we van de niet-periodieke convolutie. Voor een periodiek signaal $x[n]$ en een niet-periodiek signaal $h[n]$ geldt:

$$\mathcal{F}\{(x * h)[n]\} = c_k H\left(\frac{2\pi}{N}k\right) \quad (6.69)$$

$$\text{met } H(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n] e^{-j\Omega n} \quad (6.70)$$

Twee periodieke signalen met dezelfde (gemeenschappelijke) periode N kunnen periodiek worden geconvolveerd (zie pag. 380). Dan geldt eenvoudigweg: (de duale vorm beschrijft modulatie)

$$\mathcal{F}\{(x_1 \otimes x_2)[n]\} = N c_{1k} c_{2k} \quad (6.71)$$

$$\mathcal{F}\{x_1[n]x_2[n]\} = c_{1k} \otimes c_{2k} \quad (6.72)$$

Discrete-tijd Fourier-transformatie

Voor signalen $x[n]$ in discrete tijd bestaat er ook een Fourier-transformatie. Om een signaal te kunnen transformeren is een voldoende voorwaarde dat

¹Discrete Time Fourier Series

het signaal absoluut sommerbaar is of dat het signaal een energiesignaal is:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| < \infty \quad \text{of} \quad \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 < \infty \quad (6.73)$$

De DTFT¹ is gedefinieerd als:

$$X(\Omega) = \mathcal{F}\{x[n]\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]e^{-j\Omega n} \quad (6.74)$$

$$x[n] = \mathcal{F}^{-1}\{X(\Omega)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_0}^{\Omega_0+2\pi} X(\Omega)e^{j\Omega n} d\Omega \quad (6.75)$$

Hierbij is Ω de discrete-tijd frequentie in radianen (ω is in $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$). In tegenstelling tot het spectrum van de continue Fourier-transformaties, herhaalt het spectrum $X(\Omega)$ zich met periode 2π . Het heeft dus alleen zin om naar een beperkt gedeelte van het spectrum te kijken, bijvoorbeeld: $\Omega \in [0, 2\pi)$ of $\Omega \in [-\pi, \pi)$.

Voor de DTFT gelden dezelfde eigenschappen als voor de continue Fourier-transformatie (zie tabel 6.1 op pagina 388). Let op: bij modulatie loopt de convolutie-integraal over 2π :

$$\mathcal{F}\{x[n]m[n]\} = \frac{1}{2\pi} \int_{\Omega_0}^{\Omega_0+2\pi} X(p)M(\Omega - p) dp \quad (6.76)$$

Een periodiek signaal $x[n]$ met periode N (grondfrequentie $\Omega_0 = 2\pi/N$) heeft als getransformeerde:

$$\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi c_k \delta(\Omega - k\Omega_0) \quad (6.77)$$

$$\text{met} \quad c_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-jk\Omega_0 n} \quad (6.78)$$

¹discrete-tijd Fourier-transformatie

$\mathbf{f[n]}$	$\mathcal{F}\{\mathbf{f[n]}\}$
1	$2\pi \delta(\Omega)$
$\delta[n]$	1
$\delta[n - n_0]$	$e^{j\Omega n_0}$
$e^{j\Omega_0 n}$	$2\pi \delta(\Omega - \Omega_0)$
$a^n u[n], a < 1$	$\frac{1}{1 - ae^{-j\Omega}}$
$a^{ n }, a < 1$	$\frac{1 - a^2}{1 - 2a \cos \Omega + a^2}$
$na^n u[n], a < 1$	$\frac{ae^{-j\Omega}}{(1 - ae^{-j\Omega})^2}$
$\text{rect}\left(\frac{n}{N_1}\right)$	$\frac{\sin\left(\Omega\left(N_1 + \frac{1}{2}\right)\right)}{\sin(\Omega/2)}$
$\frac{\sin(\Omega_0 n)}{\pi n}$	$\text{rect}\left(\frac{\Omega}{2\Omega_0}\right)$
$\sum_{k=0}^{N-1} c_k e^{jk\Omega_0 n}, N\Omega_0 = 2\pi$	$\sum_{k=0}^{N-1} 2\pi c_k \delta(\Omega - k\Omega_0)$

Tabel 6.3: Enige discrete-tijd Fourier-getransformeerden

Discrete Fourier-transformatie

De **DFT** lijkt op de discrete-tijd Fourier-transformatie, met het verschil dat de frequentie Ω niet meer als een continue variabele wordt beschouwd. Dit is bijvoorbeeld het geval bij computerverwerking van gesampled signalen.

We schrijven:

$$\Omega_k = \frac{2\pi}{M}k \quad (6.79)$$

Het aantal frequentie-samples M is in principe vrij, maar we zetten deze vast op het aantal samples N van het beschouwde signaal. Dit kan een deel van een langer signaal zijn, we spreken dan van een *window* (venster) van N samples op het totale signaal. Nu wordt de transformatie: (we schrijven $X(\Omega_k)$ als $X[k]$)

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \text{DFT}\{x[n]\} \quad (6.80)$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} (\text{DFT}\{X^*[k]\})^* \quad (6.81)$$

De eigenschappen van de DFT zijn analoog aan die van de discrete-tijd Fourier-transformatie, waarbij $X(k)$ gelijk is aan Nc_k .

Zoals te zien in (6.81) is – op basis van dualiteit – de **IDFT**¹ eenvoudig met behulp van de DFT te berekenen.

Omdat de convolutie periodiek is (meestal wordt niet-periodieke convolutie gewenst), moeten de signalen met nullen worden aangevuld. (Bij convolutie van $x[n]$ met lengte N en $h[n]$ met lengte M , moeten beide signalen tot de lengte $N + M - 1$ worden aangevuld.)

Door het beperken van het signaal (een uitsnede in de tijd en een eindig aantal bemonstermomenten) ontstaan er fouten in het DFT spectrum. De minimale bemonsterfrequentie is tweemaal de hoogste frequentie in het signaal. De maximale signaalfrequentie bij een gegeven samplefrequentie wordt **kritieke-** of **Nyquist-frequentie**² genoemd en bedraagt dus de halve samplefrequentie. Als er voor een hogere samplefrequentie wordt gekozen verkleinen de fouten. Wanneer er een lagere samplefrequentie wordt gebruikt, treden er ernstige vertekeningen op, **aliasing-effecten** genoemd.

Het ‘uitsnijden’ van een stuk signaal introduceert ook fouten. Door alleen te knippen wordt het signaal feitelijk met een blok gemoduleerd en het spectrum daarvan is dan ook terug te zien in het resulterende spectrum. Een truc om dit effect te reduceren is de uitsnede te vermenigvuldigen met een blok met zachtere randen. Deze *window-function* heeft minder spectrale inhoud en verstoort het signaal dus minder. Veelgebruikte vensters zijn Hamming, Hann en Kaiser.

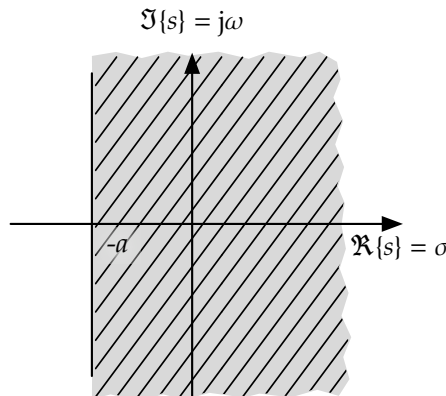
¹inverse DFT

²naar Harry Nyquist (1889-1976)

Laplace-transformatie

Er bestaat een Fourier-getransformeerde van de meeste gebruikte tijdsignalen, maar van sommige relevante signalen niet. Signalen zoals bijvoorbeeld $e^{at}u(t)$ en $tu(t)$ hebben geen Fourier-getransformeerde.

Door transformatievariabele $s = \sigma + j\omega$ te gebruiken, wordt dat wel mogelijk: effectief wordt de tijdfunctie vermenigvuldigd met $e^{-\sigma t}$. De Fourier-getransformeerde van het eerste voorbeeld, nu dus $e^{-\sigma t}e^{at}u(t)$, convergeert (bestaat) voor $\sigma > a$. De waarden van s waarvoor de Laplace-transformatie bestaat, wordt het **convergentiegebied** of **ROC**¹ genoemd. Het convergentiegebied (bijvoorbeeld $s > -a$) kan als volgt grafisch in het (complexe) s -vlak worden weergegeven:



De bilaterale of tweezijdige **Laplace-transformatie**² is als volgt gedefinieerd:

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.82)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{X(s)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\gamma-j\omega}^{\gamma+j\omega} e^{st}F(s) ds \quad (6.83)$$

Waarbij γ zo wordt gekozen dat alle singulariteiten van $F(s)$ er links van liggen. De terugtransformatie vergt kennis van complexe functietheorie, vaak is het eenvoudiger om met behulp van een tabel terug te transformeren.

De bilaterale Laplace-transformatie is niet bijectief: de ROC is in het algemeen nodig om de terugtransformatie uit te voeren. De unilaterale Laplace-transformatie is wel bijectief en wordt daarom in de praktijk meestal ge-

¹region of convergence

²naar Pierre-Simon de Laplace (1749-1827)

bruikt. Als er niet wordt vermeldt welke Laplace-transformatie wordt bedoeld, kan men uitgaan van de unilaterale. De unilaterale of enkelzijdige Laplace-transformatie is gedefinieerd als:

$$X(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (6.84)$$

De ondergrens van de integratie is 0^- , de waarde vlak voor $t = 0$.

	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
lineairiteit	$\sum_{n=1}^N a_n x_n(t)$	$\sum_{n=1}^N a_n X_n(s)$
convolutie	$x(t) * h(t)$	$X(s)H(s)$
differentiatie	$\frac{dx(t)}{dt}$	$sX(s) - x(0^-)$
integratie	$\int_{0^-}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{s}X(s)$
tijdschuiving	$x(t - \tau)u(t - \tau)$	$X(s)e^{-s\tau}$
frequentieschuiving	$e^{s_0 t}x(t)$	$X(s - s_0)$
tijdschaling	$x(at), a > 0$	$\frac{1}{a}X\left(\frac{s}{a}\right)$
factor t	$tx(t)$	$-\frac{dX(s)}{ds}$
modulatie	$x(t) \cos(\omega_0 t)$	$\frac{1}{2}(X(s - j\omega_0) + X(s + j\omega_0))$
	$x(t) \sin(\omega_0 t)$	$-j\frac{1}{2}(X(s - j\omega_0) - X(s + j\omega_0))$
beginwaarde	$\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = x(0^+)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$
eindwaarde	$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$

Tabel 6.4: Belangrijke eigenschappen van de Laplace transformatie

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$	ROC
$\delta(t)$	1	alle s
$\delta(t - \tau)$	$e^{-\tau s}$	alle s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$u(t) - u(t - \tau)$	$\frac{1 - e^{-\tau s}}{s}$	$\Re\{s\} > 0$
$t^n u(t), n = 1, 2, \dots$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\Re\{s\} > 0$
$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(s + a)^{n+1}}$	$\Re\{s\} > -a$
$\cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$\cos^2(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s^2 + 2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)}$	$\Re\{s\} > 0$
$\sin^2(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{2\omega_0^2}{s(s^2 + 4\omega_0^2)}$	$\Re\{s\} > 0$
$e^{-at} \cos^2(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s + a}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -a$
$e^{-at} \sin^2(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s + a)^2 + \omega_0^2}$	$\Re\{s\} > -a$
$t \cos(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{s^2 - \omega_0^2}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$
$t \sin(\omega_0 t) u(t)$	$\frac{2\omega_0 s}{(s^2 + \omega_0^2)^2}$	$\Re\{s\} > 0$

Tabel 6.5: Belangrijke (unilaterale) Laplace-getransformeerden

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Om een terugtransformatie uit te voeren kan gebruik gemaakt worden van beide tabellen. De meeste interessante functies zijn van de vorm:

$$X(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0}{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \dots + b_1 s + b_0}, \quad b_n \neq 0 \quad (6.85)$$

Als $n > m$ kan de breuk door een staartdeling worden omgezet naar een geval waar $n < m$. Vervolgens kan de breuk met breuksplitsing in een som van meerdere breuken worden omgeschreven. Met behulp van de tabellen is dit tenslotte naar een tijdsignaal terug te transformeren.

Z-transformatie

Zoals de Laplace-transformatie signalen kan transformeren waarvoor de Fourier-getransformeerde niet bestaat, zo kan de **Z-transformatie** signalen transformeren waarvan de discrete-tijd Fourier-getransformeerde niet bestaat. De Z-transformatie is feitelijk de discrete-tijd Laplace-transformatie.

De bilaterale Z-transformatie is gedefinieerd als:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (6.86)$$

In de praktijk wordt vaak de unilaterale Z-transformatie gebruikt:

$$\mathcal{Z}\{x[n]\} = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n]z^{-n} \quad (6.87)$$

Net als voor de Laplace-getransformeerden geldt voor Z-getransformeerden een **convergentiegebied** of **ROC**; het gebied in het z -vlak waar de getransformeerde convergeert. Omdat deze gebieden van de vorm $|z| > R$ zijn, wordt ook gesproken van de **convergentieradius** R .

In de punten z op de eenheidscirkel (een cirkel met straal 1) van de Z-transformatie is de discrete-tijd Fourier-transformatie geïmplementeerd:

$$X(\Omega) = X(z) \Big|_{z = e^{-j\Omega}} \quad (6.88)$$

Als de eenheidscirkel dus in het convergentiegebied ligt, dan is het signaal Fourier-transformeerbaar en met (6.88) eenvoudig te bepalen.

	$\mathbf{f[n]}$	$\mathcal{Z}\{\mathbf{f[n]}\}$
lineariteit	$\sum_{n=1}^N a_n x_n[n]$	$\sum_{n=1}^N a_n X_n(z)$
convolutie	$x[n] * h[n]$	$X(z)H(z)$
tijdschuiving	$x[n + n_0]$	$z^{n_0} \left(X(z) - \sum_{m=0}^{n_0-1} x[m]z^{-m} \right)$
	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0} \left(X(z) + \sum_{m=-n_0}^{-1} x[m]z^{-m} \right)$
frequentieschuiving	$a^n x[n]$	$X(a^{-1}z)$
factor n	$n^k x[n]$	$\left(-z \frac{d}{dz} \right)^k X(z)$
beginwaarde	$x[0]$	$\lim_{z \rightarrow \infty} X(z)$
eindwaarde	$\lim_{n \rightarrow \infty} x[n]$	$\lim_{z \rightarrow 1} (1 - z^{-1})X(z)$

Tabel 6.6: Belangrijke eigenschappen van de Z-transformatie

$\mathbf{f[n]}$	$\mathcal{Z}\{\mathbf{f[n]}\}$	ROC $ z > \dots$
$\delta[n]$	1	0
$\delta[n - m]$	z^{-m}	0
$u[n]$	$\frac{z}{z - 1}$	1
$n u[n]$	$\frac{z}{(z - 1)^2}$	1
$n^2 u[n]$	$\frac{z(z + 1)}{(z - 1)^3}$	1

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

$\mathbf{f[n]}$	$\mathbf{Z\{f[n]\}}$	ROC $ z > \dots$
$a^n u[n]$	$\frac{z}{z-a}$	$ a $
$na^n u[n]$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$ a $
$(n+1)a^n u[n]$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$ a $
$\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+m)}{m!} a^n u[n]$	$\frac{z^{m+1}}{(z-a)^{m+1}}$	$ a $
$\cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z(z - \cos(\Omega_0))}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$	1
$\sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2z \cos(\Omega_0) + 1}$	1
$a^n \cos(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{z(z - a \cos(\Omega_0))}{z^2 - 2az \cos(\Omega_0) + a^2}$	$ a $
$a^n \sin(\Omega_0 n) u[n]$	$\frac{az \sin(\Omega_0)}{z^2 - 2az \cos(\Omega_0) + a^2}$	$ a $
$e^{-anT} u[n]$	$\frac{z}{z - e^{-aT}}$	$ e^{-aT} $
$nT u[n]$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$	1
$nTe^{-anT} u[n]$	$\frac{Tze^{-aT}}{(z - e^{-aT})^2}$	$ e^{-aT} $
$\cos(n\omega_0 T) u[n]$	$\frac{z(z - \cos(\omega_0 T))}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1}$	1
$\sin(n\omega_0 T) u[n]$	$\frac{z \sin(\omega_0 T)}{z^2 - 2z \cos(\omega_0 T) + 1}$	1

$f[n]$	$Z\{f[n]\}$	ROC $ z > \dots$
$\cos(n\omega_0 T) e^{-anT} u[n]$	$\frac{z(z - e^{-aT} \cos(\omega_0 T))}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega_0 T) + e^{-2aT}}$	$ e^{-aT} $
$\sin(n\omega_0 T) e^{-anT} u[n]$	$\frac{z(z - e^{-aT} \sin(\omega_0 T))}{z^2 - 2ze^{-aT} \cos(\omega_0 T) + e^{-2aT}}$	$ e^{-aT} $

Tabel 6.7: Belangrijke (unilaterale) Z -getransformeerden

De terugtransformatie kan op dezelfde manier als bij de Laplace-transformatie. Als het signaal is uitgedrukt in een breuk van twee polynomen in z van een hogere orde in de noemer dan in de teller, kan breuksplitsing worden toegepast. Met behulp van de tabel is het signaal dan terug te transformeren.

Transformatie van z - naar s -domein

Er zijn veel verschillende manieren om systemen uit het analoge s -domein om te zetten naar het tijddiscrete z -domein. De meest voor de hand liggende methode is de **impuls-invariante transformatie**, gedefinieerd als:

$$\omega = \Omega/T \quad z = e^{Ts} \quad (6.89)$$

Waarbij T de sampletijd is. De impulsresponsie wordt effectief *gesampled* op intervallen T ; deze transformatie geeft in het algemeen *aliasing*-problemen.

Een nettere methode is de **bilineaire transformatie**, gedefinieerd als:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (6.90)$$

$$z = \frac{1 + (T/2)s}{1 - (T/2)s} \quad (6.91)$$

Waarbij T op elke praktische waarde kan worden gekozen (bijvoorbeeld 2). De frequentiemapping is nu niet meer lineair:

$$\omega = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\Omega}{2}\right) \quad (6.92)$$

Transductietechniek

Transductietechniek houdt zich bezig met verschijnselen die te maken hebben met het omzetten van energie van het ene domein naar het andere. Dergelijke omzettingen kunnen worden gebruikt om arbeid te verrichten in een specifiek domein (de **transducent** wordt gebruikt als **actuator**) of om informatie te vergaren uit een specifiek domein (de transducent wordt gebruikt als **sensor**). Transducenten kunnen geclassificeerd worden in verschillende soorten, afhankelijk van hun werkingsprincipe. In het hiernavolgende beperken we ons tot het energie-bufferende generatortype transducenten.

	Generator-type	Modulator-type
Energie bufferend	<i>Elektrostatisch</i> <i>Piëzo-elektrisch</i> <i>Ideaal gas</i>	<i>Capacitieve opnemers</i> <i>Inductieve opnemers</i> <i>Mechanisch filter</i>
Energie dissiperend	<i>Thermokoppel</i> <i>Peltier element</i> <i>Verhittingsdraad</i>	<i>Anemometer</i> <i>Rekstrookjes (piëzo-resistief)</i> <i>ISFET ionen-detector</i>
Stralend (hybride)	<i>Gloeilamp</i> <i>Zonnecel</i> <i>Elektroluminiscentie</i>	<i>Optische golfgeleider-sensor</i>

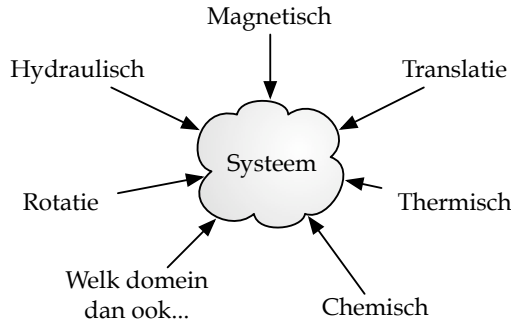
Energie en poorten

Energie is een toestandsfunctie, dat wil zeggen dat bij een bepaalde toestand een bepaalde energie hoort en dat het niet uitmaakt hoe die bepaalde toestand bereikt wordt. Een transducent kan vele vormen van energie bevatten. Echter, in het beoogde transductieproces zullen niet alle vormen van energie vrijgemaakt kunnen worden. Slechts die vormen van energie die kunnen worden opgeslagen, zijn interessant voor een bufferende generatortype transducent. Deze energie¹ kan in en uit de transducent gaan door zogeheten **poorten**: fysische mechanismen die energie-uitwisseling mogelijk maken. Wanneer:

1. alle poorten van een systeem zijn geïdentificeerd,
2. van iedere poort de toestandsvariabelen bekend zijn en
3. de in de transducent opgeslagen energie bepaald is,

kan het volledig gedrag van de transducent worden beschreven.

¹Aangezien we in dit overzicht niet kijken naar temperatuurseffecten (geen dissipatie, geen temperatuurveranderingen) komt de energie waar naar we kijken thermodynamisch overeen met de vrije-energie van de transducent.



Toestandsvariabelen

Volgens de thermodynamica kan de toestand van een systeem beschreven worden met de toestandsfuncties **energie** en **entropie**. Beiden hangen af van zogeheten **toestandsvariabelen**. Afhankelijk van het systeem zijn hier minder of meer variabelen voor nodig. Een minimum aan variabelen dat vereist is voor de beschrijving, is 2 per in de transducent vertegenwoordigd energie-domein.

Extensieve en intensieve variabelen

Ieder energie domein kent twee toestandsvariabelen: intensieve en extensieve.

Extensieve variabelen schalen mee met het systeem (als het systeem vereenvoudigd wordt met een factor, dan wordt de overeenkomstige extensieve variabele vermenigvuldigd met dezelfde factor). Voorbeelden zijn elektrische lading, aantal gasmolekules, mechanische rek. Energie en entropie zijn zelf extensieve variabelen.

Intensieve variabelen ("*efforts*") zijn variabelen die onafhankelijk zijn van de grootte van een systeem en die dus niet meeschalen. Voorbeelden zijn temperatuur, druk, elektrische spanning, mechanische stress, chemische potentiaal.

Voor een extensieve variabele f als functie van extensieve parameters x_1, \dots, x_n geldt 1^e orde lineaire homogeniteit:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = \lambda \cdot f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.93)$$

Voor een intensieve variabele g als functie van extensieve parameters x_1, \dots, x_n geldt 0^{de} orde lineaire homogeniteit:

$$f(\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (6.94)$$

Arbeid aan de poorten

Arbeid

De **arbeid** die vanuit een energetisch domein k door een poort aan de transducent wordt geleverd blijkt altijd te schrijven te zijn als het product van een intensieve variabele (effort) maal de verandering van een extensieve variabele:

$$dE_k = e_k dq_k \quad (6.95)$$

Hierin is e_k de intensieve (effort) en q_k de extensieve variabele (quantiteit). Iedere poort heeft dus een effort en een quantiteit die elkaars **geconjugeerde** zijn. Zie tabel 6.8 voor een overzicht van efforts en flows in de verschillende fysische domeinen.

Flow

De tijdsafgeleide van een extensieve variabele wordt **flow** genoemd. Bijvoorbeeld: de afgeleide van een lading q is een stroom I , de afgeleide van een plaatsvector is een snelheid, de afgeleide van een gekoppelde magnetische flux is een elektrische spanning, etc.

Vermogen

Het door een bron geleverde **vermogen** is de per tijdseenheid aan de transducent geleverde arbeid:

$$P_k = e_k \frac{dq_k}{dt} \quad (6.96)$$

Energiebuffers

Een bufferende generatortype transducent bevat altijd een of meerdere **buffers**. Het aantal buffers is niet noodzakelijkergewijs gelijk aan het aantal poorten. Indien de **constitutieve relaties** (de relatie tussen effort en quantiteit van een poort, voor een veer is deze relatie bijvoorbeeld $F = kx$) bekend zijn, kan de energie in de buffers berekend worden. Voor een transducent met N poorten is de eerste variatie van de energie te schrijven als:

$$dE = \sum_N e_k dq_k \quad (6.97)$$

Fysisch Domein	Extensieve variabele (quantiteit)	Intensieve variabele (effort)	Flow	Arbeid	Ver-mogen
Generiek	q	e	\dot{q}	$e dq$	$e\dot{q}$
Potentieel of elastisch (translatie)	Positie x [m]	Kracht F [N]	\dot{x}	$F dx$	$F\dot{x}$
Potentieel of elastisch (rotatie)	Hoek α [rad]	Moment T [Nm]	$\dot{\alpha}$	$T d\alpha$	$T\dot{\alpha}$
Potentieel of elastisch (hydraulisch)	Volume V [m ³]	Druk p [Nm ⁻²]	\dot{V}	$p dV$	$p\dot{V}$
Kinetisch (hydraulisch)	Impuls van een stroombuis Γ [Nm ⁻² s]	Debiet ϕ_v [m ³ s ⁻¹]	$\dot{\Gamma}$	$\phi_v d\Gamma$	$\phi_v\dot{\Gamma}$
Kinetisch (translatie)	Impuls p [Ns]	Snelheid v [ms ⁻¹]	\dot{p}	$v dp$	$v\dot{p}$
Kinetisch (rotatie)	Impulsmoment L [Nms]	Hoeksnelheid ω [rad s ⁻¹]	\dot{L}	ωdL	$\omega\dot{L}$
Elektrisch	Lading q [C]	Voltage u [V]	\dot{q}	$u dq$	$u\dot{q}$
Magnetisch	Gekoppelde flux λ [Vs]	Stroom i [A]	$\dot{\lambda}$	$i d\lambda$	$i\dot{\lambda}$
Chemisch	Molair getal N/N_i [mol]	μ_{tot} μ_i	\dot{N} \dot{N}_i	$\mu_{tot} dN$ $\mu_i dN_i$	$\mu_{tot}\dot{N}$ $\mu_i\dot{N}_i$
Thermisch	Entropie S [JK ⁻¹]	Temperatuur T [K]	\dot{S}	$T dS$	$T\dot{S}$

Tabel 6.8: Effort en flow in verschillende fysische domeinen

Wanneer (6.97) sequentieel geïntegreerd wordt kan de opgeslagen vrije energie in de transducent berekend worden:

$$E = \sum_N \left(\int_{q_0}^{q_1} e_k(q_1, \dots, q_k) dq_k \right)_{dq_1, \dots, dq_{k-1}, dq_{k+1}, \dots, dq_n = 0} + E_A \quad (6.98)$$

De toevoeging $dq_1, \dots, dq_{k-1}, dq_{k+1}, \dots, dq_n = 0$ betekent dat alle quantiteiten constant worden gehouden bij de partiële integraties. Deze toevoeging is essentieel, omdat alleen onder deze voorwaarden zeker is dat de energie die door poort k komt netjes wordt berekend zonder dat er tegelijkertijd arbeid aan de andere poorten wordt geleverd. In voorkomende gevallen kan het

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

ook zijn dat bij partiële integratie bij een van de andere poorten de effort nul gehouden wordt. Ook dan is aan de eis voldaan dat niet “stiekem” arbeid wordt geleverd aan een van de andere poorten. Het kan soms noodzakelijk zijn een specifieke integratievolgorde te kiezen en daarmee te zorgen dat aan de eis voldaan is dat de andere poorten dicht zijn.

Bijvoorbeeld: voor een combinatie van een veer en een elektromagnetisch juk is het handig eerst te integreren over de mechanische poort om de energie in de veer te bepalen en dan pas de energie in het magnetische circuit te bepalen bij constante positie van het juk ($dx = 0$). De term E_A is een energieterm die onafhankelijk is van q_1, \dots, q_n . Het geeft de additionele energie aan die in de transducent aanwezig is, maar die niet verandert tijdens transductie (denk bijvoorbeeld aan de bindingsenergie van de materialen waarvan de transducent is gemaakt). Uitdrukking (6.98) is een padintegraal, d.w.z. om de totale integratie uit te voeren, wordt een zeker pad gelopen door de N -dimensionale ruimte die wordt opgespannen door de q_i 's. Het bovenstaande betekent dus dat we een geschikt pad moeten kiezen voor een correcte bepaling van de in de transducent opgeslagen energie.

Bepaling van efforts

Uit (6.97-6.98) is eenvoudig te zien dat we de efforts e_1, \dots, e_n kunnen bepalen door partiële differentiatie van de energiefunctie naar de hoeveelheid van de betreffende poort:

$$e_k = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} E(q_1, \dots, q_n) \right)_{dq_1, \dots, dq_{k-1}, dq_{k+1}, \dots, dq_n = 0} \quad (6.99)$$

Ook hier geldt dat de overige extensieve variabelen q_1, \dots, q_n constant moeten zijn om dezelfde redenen als hierboven gegeven.

Sturing van de transducent

Een transducent kan op verschillende manieren gestuurd worden. Dat wil zeggen: we kunnen ervoor kiezen om een van de variabelen van een of meer van de poorten vast te leggen. Je kunt bijvoorbeeld de lading op een capaciteit vastzetten door deze na oplading van de bron los te koppelen. Of je laat de mechanische poort van een transducent onbelast, waardoor deze *de facto* gelijk is aan 0.

Sturing met extensieve variabelen

Voor sturing met extensieve variabelen geldt dat de geconjugeerde variabelen (efforts in dit geval) gevonden worden met behulp van (6.99).

Sturing met intensieve variabelen

Bij sturing met één of meerdere intensieve variabelen wordt het een en ander wat complexer. Door aan één van de poorten de effort constant te houden maar de extensieve variabele vrij te laten, kan immers arbeid aan die poort geleverd worden op het moment dat er iets verandert bij een van de andere poorten. Wanneer we nu willen bepalen wat de verandering in opgeslagen energie is, moeten we kijken welke arbeid er aan een gegeven poort (zeg k) geleverd wordt, maar ook die arbeid die tegelijkertijd wordt geleverd via de poort(-en) die met een effort worden gestuurd (stel hier poort j):

$$dE = e_k dq_k + e_j dq_j \Rightarrow e_k dq_k = dE - e_j dq_j \Rightarrow e_k dq_k = d(E - e_j q_j) - q_j de_j \quad (6.100)$$

waarbij alle poorten $i \neq j, k$ energetisch zijn dichtgehouden. Aangezien effort $j(e_j)$ constant wordt gehouden, is $de_j = 0$ en valt de laatste term uit (6.100) weg. Dit betekent dat we effort $k(e_k)$ nu dus op een andere manier moeten berekenen:

$$e_k = \left(\frac{\partial}{\partial q_k} (E - e_j q_j) \right)_{dq_i = 0 \forall i \neq j, k} = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} \right)_{dq_i = 0 \forall i \neq j, k} \quad (6.101)$$

De **Legendre getransformeerde**¹ \mathcal{L} wordt beschreven door het voorschrift²:

$$\mathcal{L} = E - \sum_{\varepsilon} e_j q_j \quad (6.102)$$

waarin ε de verzameling van effort gestuurde poorten is. De **co-energie** E^* is de negatieve waarde van de Legendre getransformeerde en kan ook gebruikt worden; de Legendre getransformeerde \mathcal{L} is gangbaar in de thermodynamica, de co-energie E^* wordt o.a. in de systeemleer gebruikt.

$$E^* = \sum_{\varepsilon} e_j q_j - E \quad (6.103)$$

¹naar Adrien-Marie Legendre (1752-1833)

²In de mechanica wordt de Lagrangiaan gebruikt als Legendre transformatie van de totale energie, de Hamiltoniaan. In de thermodynamica zijn verschillende transformaties in gebruik met ieder hun eigen namen en toepassingen. Bijvoorbeeld: **Helmholtz vrije energie** (onafhankelijke temperatuur), **enthalpie** (onafhankelijke druk) en **Gibbs vrije energie** (onafhankelijke druk en temperatuur).

Instelpunten en karakteristieke vergelijkingen

Wanneer een transducent in een zekere toestand $\vec{q}_0 = (q_1^0, q_2^0, \dots, q_n^0)$ is gebracht en wanneer vanuit deze toestand kleine variaties dq_i worden toegestaan, dan is het mogelijk het gedrag van de transducent te beschrijven met behulp van een set van lineaire vergelijkingen, die worden verkregen door de totale differentiaal te nemen van de efforts van alle poorten in het instelpunt:

$$\begin{aligned} de_1 &= \left(\frac{\partial e_1(\vec{q}_0)}{\partial q_1} \right)_{q_i=C \forall i \neq 1} dq_1 + \dots + \left(\frac{\partial e_1(\vec{q}_0)}{\partial q_k} \right)_{q_i=C \forall i \neq k} dq_k \\ &\vdots \\ de_k &= \left(\frac{\partial e_k(\vec{q}_0)}{\partial q_1} \right)_{q_i=C \forall i \neq 1} dq_1 + \dots + \left(\frac{\partial e_k(\vec{q}_0)}{\partial q_k} \right)_{q_i=C \forall i \neq k} dq_k \end{aligned} \quad (6.104)$$

Deze vergelijkingen worden de **karakteristieke vergelijkingen** genoemd. Bovenstaande kan ook in compactere vorm worden geschreven door gebruikmaking van matrices en vectoren:

$$\begin{bmatrix} de_1 \\ \dots \\ de_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial e_1(\vec{q}_0)}{\partial q_1} \right)_{q_i=C \forall i \neq 1} & \dots & \left(\frac{\partial e_1(\vec{q}_0)}{\partial q_k} \right)_{q_i=C \forall i \neq k} \\ \dots & \dots & \dots \\ \left(\frac{\partial e_k(\vec{q}_0)}{\partial q_1} \right)_{q_i=C \forall i \neq 1} & \dots & \left(\frac{\partial e_k(\vec{q}_0)}{\partial q_k} \right)_{q_i=C \forall i \neq k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dq_1 \\ \dots \\ dq_k \end{bmatrix} \quad (6.105)$$

$$\rightarrow d\vec{e} = \left[\frac{\partial \vec{e}}{\partial \vec{q}} \right] d\vec{q} \quad (6.106)$$

De tweede schrijfwijze (**Jacobiaan**) is slechts een compacte notatie. Bij effortsturing zullen de elementen in de linker en rechter vector die overeenkomen met de betreffende effort gestuurde poorten vervangen moeten worden door de overeenkomstige geconjugeerde variabelen en ook zullen de partiele afgeleiden dienovereenkomstig moeten worden bepaald.

Stabiliteit

Een belangrijk aspect van transducenten is hun **stabiliteit**. Voor veel toepassingen is stabiliteit vereist (luidsprekers, microfoons, versnellingsopnemers,

etc.), terwijl voor andere toepassingen *instabiliteit* een essentieel onderdeel uitmaakt van de functie van de transducent (elektromagnetische relais, stapmotoren, etc.). In principe kan een transducent alleen maar instabiel worden als er twee of meer poorten gestuurd worden met de intensieve variabele (voor transducenten die *intrinsiek*, zonder sturing, stabiel zijn). Als dit het geval is, kan de stabiliteit van een transducent worden onderzocht door te kijken naar de arbeid die verricht moet worden om de transducent vanuit een zeker instelpunt over een $d\vec{q} = (dq_1, dq_2, \dots, dq_n)$. Deze arbeid is:

$$dE = \delta_1 E + \delta_2 E + \dots \geq 0 \quad (6.107)$$

waarin $\delta_1 E$ de eerste en $\delta_2 E$ de tweede variatie van E is. Aangezien de bovenstaande analyse is gebaseerd op evenwichtscondities is $\delta_1 E$ per definitie nul. De vereiste positieve arbeid komt dus overeen met de eis dat:

$$\delta_2 E > 0 \Rightarrow \sum_n \sum_n \left(\frac{\partial^2 E(q_1, \dots, q_n)}{\partial q_i \partial q_j} \right) dq_i dq_j > 0 \quad (6.108)$$

Hieruit kan aangetoond worden dat een transducent stabiel is indien:

$$\frac{\partial^2}{\partial q_i^2} (\mathcal{L}(q_1, \dots, e_j, e_k, \dots, q_n)) > 0 \quad i \in j \dots k \quad (6.109)$$

Harmonische signalen

Het is eenvoudig om, uitgaande van de karakteristieke vergelijkingen, het gedrag van een transducent te beschrijven bij **harmonische signalen**. Wanneer de efforts/quantiteiten harmonisch variëren met frequentie ω en wanneer we in (6.105) zowel de linker als rechter zijde differentiëren naar de tijd dan vinden we:

$$\frac{d\vec{e}}{dt} = \left[\frac{\partial \vec{e}}{\partial \vec{q}} \right] \frac{d\vec{q}}{dt} \rightarrow j\omega e^{j\omega t} \hat{\mathbf{e}} = \left[\frac{\partial \vec{e}}{\partial \vec{q}} \right] \hat{\mathbf{v}} e^{j\omega t} \rightarrow \hat{\mathbf{e}} = \frac{1}{j\omega} \left[\frac{\partial \vec{e}}{\partial \vec{q}} \right] \hat{\mathbf{v}} \quad (6.110)$$

In deze uitdrukking is $\hat{\mathbf{e}}$ de vector van amplitudes van de efforts, $\hat{\mathbf{v}}$ is de vector van generaliseerde flows en de matrix is eenvoudig de matrix van partiële differentiaal als gegeven in (6.104-6.105).

Impedantie-matrices

De **impedantiematrix** is de matrix die het verband aangeeft tussen efforts en flows. Het is een gegeneraliseerde vorm van wat normaliter wordt beschouwd als de impedantie van een eenpoort. Met (6.110) wordt de impedantie-matrix:

$$[\mathbf{Z}(j\omega)] = \frac{1}{j\omega} \left[\frac{\partial \vec{e}}{\partial \vec{q}} \right] \quad (6.111)$$

Transmissiematrices

Een kenmerkende matrix voor een transducent is de **transmissiematrix**. Deze matrix geeft aan hoe een signaal dat aan een poort van de transducent wordt aangeboden zich manifesteert bij de andere poort. Zoals de impedantiematrix een gegeneraliseerde impedantie is, zo zou de transmissiematrix als gegeneraliseerde **overdrachtsfunctie** kunnen worden beschouwd. Strikt genomen is deze matrix alleen gedefinieerd voor 2-poort transducenten. Voor multi-poort transducenten is het een tensor. De bijbehorende vectoren kunnen op uiteenlopende wijze worden gedefinieerd, afhankelijk van de overdracht die moet worden weergegeven. In het geval van een tweepoort transducent wordt de transmissiematrix gegeven door:

$$\begin{bmatrix} \hat{e}_1 \\ \hat{v}_1 \end{bmatrix} = [\mathbf{T}(j\omega)] \begin{bmatrix} \hat{e}_2 \\ \hat{v}_2 \end{bmatrix} \quad (6.112)$$

met \hat{e}_i de amplitudes van de efforts en \hat{v}_i de amplitudes van de flows.

Dynamische Systemen

Systeembegrippen

Model: Een geabstraheerde beschrijving van de werkelijkheid.

Competent model: Een geabstraheerde beschrijving van de werkelijkheid die juist voldoende uitgebreid is om die aspecten van het systeemgedrag te beschrijven die voor een gegeven probleemstelling relevant zijn en daarover informatie verschaffen.

Modelvorming: Het maken van een model, met een op de probleemstelling toegesneden functionaliteit.

Systeem: Een systeem bestaat uit een aantal onderlinge samenhangende delen van de fysische werkelijkheid die relevant zijn voor het dynamisch gedrag waarin men geïnteresseerd is.

Omgeving: De rest van het universum.

Systeemgrens: Scheiding tussen systeem en omgeving.

Causaal relatieschema: Schema van het systeem met omgevingsinvloeden.

Element: Onderdeel van een systeem dat niet verder kan worden opgesplitst.

Structuur: Een verzameling relaties tussen samenstellende onderdelen.

Subsysteem: Deel van een systeem.

Hiërarchisch model: Wijze van opbouw van systeem uit subsystemen en elementen.

Concept: Een geïdealiseerde beschrijving.

Component: Fysisch element.

Fysische domeinen

Opslag of buffering van energie: Er kan energie worden opgeslagen in een gebufferde grootheid.

Reversibele omzetting: Omzetting van vermogen van het ene domein naar het andere, die ook omgekeerd kan plaatsvinden.

Irreversibele omzetting: Energieomzetting die niet kan worden omgekeerd, veelal thermisch vermogen.

Transport: Verplaatsing van energie welke veelal ideaal is.

Distributie: Verdeling van energie over verschillende elementen.

Toe- en afvoer: Uitwisseling van behouden grootheid met omgeving.

Elementen kunnen worden weergegeven met symbolen die sterk lijken op de bepaalde verschijningsvormen van reële componenten. De representatie van een systeem gebaseerd op dergelijke symbolen heet een ideaal-fysisch model. In figuur 6.9 staan domeinafhankelijke symbolen voor de ideale elementen.

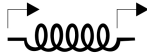
Algemeen

mechanische rotatie



veer

mechanische translatie



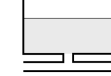
veer

elektrisch



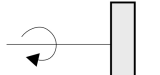
condensator

hydraulisch

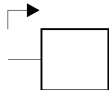


reservoir

Wiskunde



massatraagheid



massa

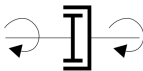


spoel

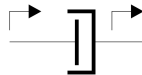


hydraulische inertantie

Informatica



demper



demper

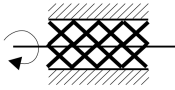


weerstand

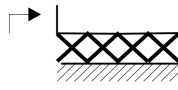


(leiding) weerstand

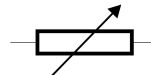
Fysica



wrijving



wrijving

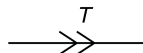


variabele weerstand

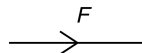


restrictie

Meten



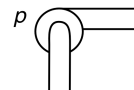
koppelbron



krachtbron

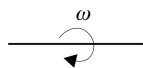


spanningsbron

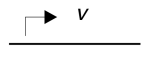


drukbron (centrifugaalpomp)

Signalen



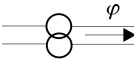
hoeksnelheidsbron



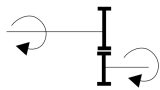
snelheidsbron



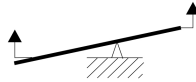
stroombron



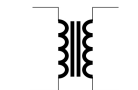
stroombron (verplaatsingspomp)



tandwielkast (transformator)



hefboom (transformator)



transformator



drukversterker

Elektronica

Tabel 6.9: IPM-symbolen in de verschillende domeinen (uit: dictaat Dynamische Systemen [6])

element	constitutieve relatie	vermogen	opgeslagen energie
veer	$F_{\text{veer}} = Kx$	Fv	$\frac{1}{2}Kx^2$
massa	$F_{\text{massa}} = ma$	Fv	$\frac{1}{2}p^2/m$
weerstand	$F_{\text{wrijving}} = Rv$	Fv	0
trans-formator	$v_2 = nv_1$ $F_1 = nF_2$	Fv	0

Tabel 6.10: Elementen in het translatiedomein

element	constitutieve relatie	vermogen	opgeslagen energie
veer	$T_{\text{veer}} = K\theta$	$T\omega$	$\frac{1}{2}K\theta^2$
massa	$T_{\text{massa}} = J\alpha$	$T\omega$	$\frac{1}{2}b^2/J$
weerstand	$T_{\text{wrijving}} = R\omega$	$T\omega$	0
trans-formator	$\omega_2 = n\omega_1$ $T_1 = nT_2$	$T\omega$	0

Tabel 6.11: Elementen in het rotatiedomein

element	constitutieve relatie	vermogen	opgeslagen energie
condensator	$i = C \frac{du}{dt}$	ui	$\frac{1}{2}Cq^2$
spoel	$u = L \frac{di}{dt}$	ui	$\frac{1}{2}L\lambda^2$
weerstand	$u = Ri$	ui	0
transformator	$u_1 = \frac{n}{m}u_2$ $i_2 = \frac{n}{m}i_1$	$u_1i_1 - u_2i_2 = 0$	0
gyrator	$u_1 = gi_2$ $u_2 = gi_1$	$u_1i_1 - u_2i_2 = 0$	0
elektromotor	$T = gi$ $u = g\omega$	$ui = T\omega$	0

Tabel 6.12: Elementen in het elektrische en magnetische domein

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

	f flow	e effort	p gegenera- liseerde impuls	q gegenera- liseerde verplaatsing
elektro- magnetisch	i stroom	u spanning	λ gekoppelde magnetische flux	q lading
translatie	v snelheid	F kracht	p impuls	x verplaatsing
rotatie	ω hoek- snelheid	T koppel	b rotatie- impuls	θ hoek- verdraaiing
hydraulisch	φ flow	p druk	Γ hydraulische inertantie	V volume
materieel	f_N molaire stroom	μ_{tot} totale materie materie potentiaal	fundamenteel haat	N aantal molen
pseudo- thermisch	f_Q warmte- stroom	T tempe- ratuur	fundamenteel haat	Q warmte
thermisch	f_S entropie- stroom	T tempe- ratuur	fundamenteel haat	S entropie

Tabel 6.13: Domeinen in gegeneraliseerde vorm

q-type	flow	behouden grootheid	effort
algemeen	f	$q = \int f dt$	$e = \frac{q}{C}$
elektrisch	i	$q = \int i dt$	$u = \frac{q}{C}$
translatie, veer	v	$x = \int v dt$	$F = \frac{x}{C}$
rotatie, veer	ω	$q = \int \omega dt$	$T = \frac{\theta}{C}$
hydraulisch	φ	$V = \int \varphi dt$	$\rho = \frac{V}{C}$

Tabel 6.14: q-type gebufferde grootheden

p-type	effort	behouden grootheid	flow
algemeen	e	$p = \int e dt$	$f = \frac{p}{I}$
elektrisch	u	$\lambda = \int u dt$	$i = \frac{\lambda}{L}$
translatie, veer	F	$p = \int F dt$	$v = \frac{p}{m}$
rotatie, veer	T	$b = \int T dt$	$\omega = \frac{b}{J}$
hydraulisch	p	$\Gamma = \int p dt$	$\varphi = \frac{\Gamma}{I}$

Tabel 6.15: p-type gebufferde grootheden

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Bondgrafen

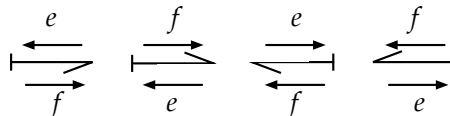
Zoals te zien in tabel 6.9 hebben allerlei componenten analoge eigenschappen (p -buffer, q -buffer, transformator, etc.). Op basis van deze analogie is de bondgraaf ontstaan; een grafische weergave van dynamische systemen met (over fysische domeinen) generaliseerde elementen (tabel 6.17 en 6.18).

element	symbool	relaties
Buffer p -variabele	I	$f = f(p)$
Buffer q -variabele	C	$e = e(q)$
Weerstand	R	$e = Rf$
Effortbron	S_e	$e = S_e$
Flowbron	S_f	$f = S_f$
Transformator	TF	$e_1 = ne_2$ $f_2 = nf_1$
Gyrator	GY	$e_1 = gf_2$ $e_2 = gf_1$
0-junctie	0	$\sum_{i=1}^j f_i = 0$ $e_1 = e_2 = \dots = e_j$
1-junctie	1	$\sum_{i=1}^j e_i = 0$ $f_1 = f_2 = \dots = f_j$

Tabel 6.16: Bondgraafelementen

De elementen van een bondgraaf worden verbonden met *bonds*, voorgesteld als pijlen met een half uiteinde. De richting van de pijl geeft de positieve vermogensoriëntatie aan (richting van het vermogen als $ef > 0$).

Een bond stelt een **bilaterale signaalstroom** voor, dus *effort* heen en *flow* terug of andersom. De oriëntatie van de signaalstroom kan worden aangegeven met een streepje aan één van beide kanten van de bond (de *effort* reist naar het streepje, de *flow* er vandaan).



basiselementen		blokschema expansie		basiselementen		blokschema expansie	
$e_b : S_e \left \begin{array}{l} e \\ f \end{array} \right. \nearrow$ $e = e_b$		$f_b : S_f \left \begin{array}{l} e \\ f \end{array} \right. \nearrow$ $f = f_b$					
1		2					
integrerende causaliteit $C : C \left \begin{array}{l} e \\ f \end{array} \right. \swarrow$ $e = \frac{1}{C} q$ $q = \int f dt + q(0)$		differentiërende causaliteit $C : C \left \begin{array}{l} e \\ f \end{array} \right. \swarrow$ $q = Ce$ $f = \frac{dq}{dt}$					
3a		3b					
integrerende causaliteit $I : I \left \begin{array}{l} e \\ f \end{array} \right. \swarrow$ $f = \frac{1}{I} p$ $p = \int e dt + p(0)$		differentiërende causaliteit $I : I \left \begin{array}{l} e \\ f \end{array} \right. \swarrow$ $p = If$ $e = \frac{dp}{dt}$					
4a		4b					
$R : R \left \begin{array}{l} e \\ f \end{array} \right. \swarrow$ $e = Rf$		$R : R \left \begin{array}{l} e \\ f \end{array} \right. \swarrow$ $f = \frac{1}{R} e$					
5a		5b					

Tabel 6.17: Eénpoorten (uit: dictaat Dynamische Systemen [6])

Systematisch opstellen van een bondgraaf

- Step 1. Stel vast welke verschillende domeinen er in het systeem voorkomen, identificeer alle ideaal-fysische elementen als $C, I, R, S_e, S_f, TF, GY$ en, in het geval van multipoorten, ook hun verschillende poorten; geef ze eenduidige namen om ze van elkaar te kunnen onderscheiden.
- Step 2. Geef per geïdentificeerd domein duidelijk een referentie-effort (referentiesnelheid met positieve richting) aan.
- Step 3. Identificeer alle overige efforts (snelheden) en geef ze eenduidige namen.
- Step 4. Geef deze efforts (snelheden), dus niet de referenties, grafisch weer door 0-juncties (1-juncties).
- Step 5. Identificeer alle effortverschillen (relatieve snelheden) die nodig zijn om alle in stap 1 geïdentificeerde elementpoorten met de structuur te kunnen verbinden en geef ze een eenduidige naam, waaruit bij voorkeur het verschil karakter blijkt. Het verschil tussen e_1 en e_2 heet bijv. e_{12} .

Algemeen
Wiskunde
Informatica
Fysica
Meten
Signalen
Elektronica

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Stap 6. Construeer de effortverschillen (relatieve snelheden) op de in figuur 6.1 aangegeven wijze.



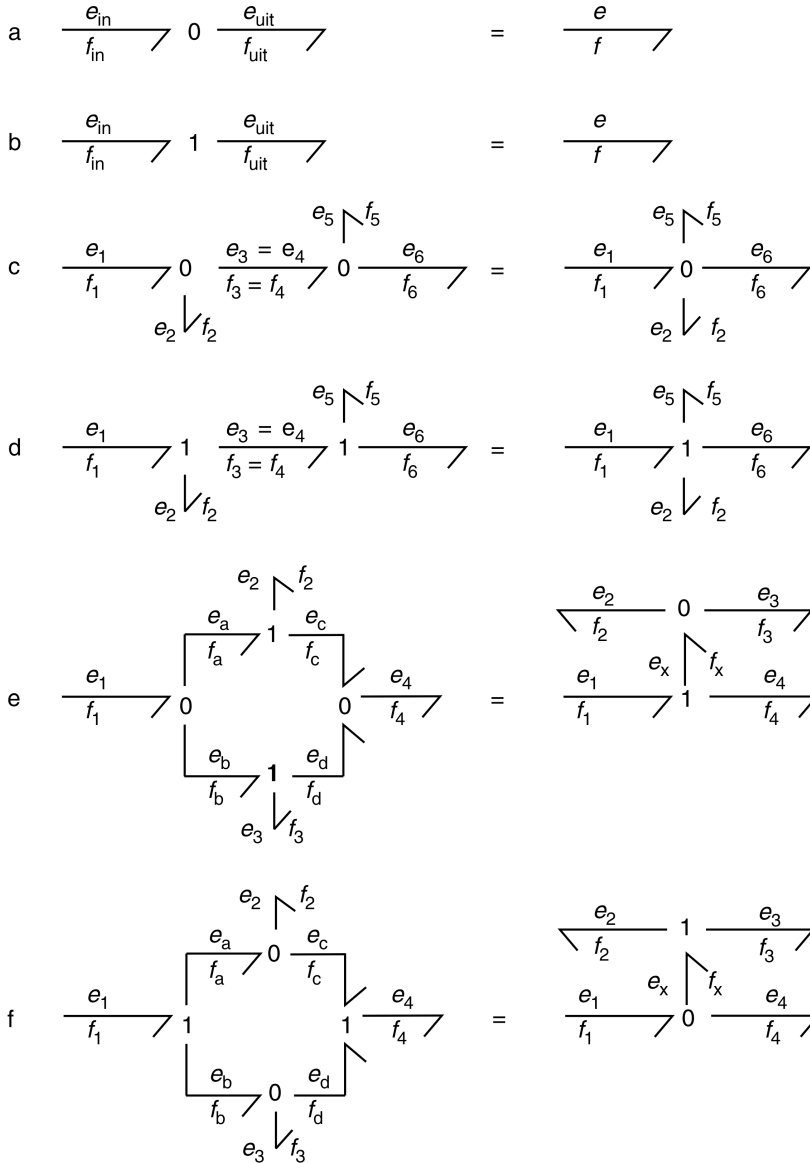
Figuur 6.1: Constructie effortverschillen

Stap 7. Verbind alle in stap 1 geïdentificeerde elementpoorten met de 0-juncties (1-juncties) van de bijbehorende efforts (snelheden) of effortverschillen (relatieve snelheden).

Stap 8. Vereenvoudig de zo verkregen bondgraaf door de vereenvoudigingsregels van figuur 6.2 toe te passen.

basiselementen	blokschema expansie	basiselementen	blokschema expansie
<p>6a</p>		<p>6b</p>	
<p>7a</p>		<p>7b</p>	
<p>8</p>		<p>9</p>	

Tabel 6.18: Multipoorten (uit: dictaat Dynamische Systemen [6])



Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Figuur 6.2: Vereenvoudigingsregels (uit: dictaat Dynamische Systemen [6])

Causaliteitstoekenning

Stap 1. Kies een door een bron gefixeerde causaliteit en propageer deze via de causale constraints. Doe dit tot alle bronnen causaliteit hebben.

Stap 2. Kies een nog niet causaal gemaakte poort met gefixeerde causaliteit en propageer deze via de causale constraints. Doe dit tot alle poorten met gefixeerde causaliteit een causaliteit hebben.

Stap 3. Kies een nog niet causaal gemaakte poort met voorkeurscausaliteit en propageer deze via de causale constraints. Doe dit tot alle poorten met voorkeurscausaliteit een causaliteit hebben.

Stap 4. Doe hetzelfde met alle poorten met vrije causaliteit.

Blokschemaexpansie

Stap 1. Expandeer de bonds tot twee tegengerichte signalen, waarbij de signaalrichting wordt bepaald door de causaliteit.

Stap 2. Vul de blokschema-representatie in van de causale elementen uit tabel 6.1 en 6.2.

Stap 3. Stel de tekens op de ingangen van de sommatoren vast.

Causaal pad

Bufferende poort (C,I) of weerstandspoort (R)



Junctiestructuur



Bufferende poort (C,I) of weerstandspoort (R)

Voorwaarde is dat de causale streepjes in dezelfde richting staan. De orde van het pad wordt bepaald door aantal integratoren onderweg. Een algebraïsche lus is een nulde orde pad.

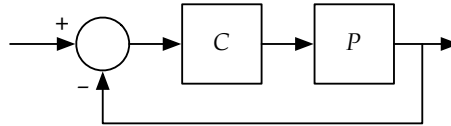
Blokschema naar stroomschema

Stap 1. Vervang de blokken door koorden, waar de overdrachtsfunctie naast staat.

Stap 2. Vervang alle sommatoren en signaalsplitsingen door knooppunten, welke de variabelen voorstellen.

Regeltechniek

Veel verschillende configuraties van regelsystemen zijn in de praktijk in gebruik. Voorbeelden hiervan zijn stuursystemen en feed-forward systemen. Hier wordt met de term regelsystemen echter altijd uitgegaan van een regelsysteem voorzien van een of meerdere negatieve terugkoppelingen.



Figuur 6.3: Regelsysteem met terugkoppeling

Systeembeschrijvingen

In de regeltechniek zijn **systeembeschrijving** zeer belangrijk, deze geven namelijk aan hoe een verandering aan de ingang de uitgang beïnvloedt.

Systeemversterking

Een systeem kan als volgt beschreven worden. Hierin is K de **systeemversterking**. In systemen zonder zuivere integrator of differentiator wordt dit ook wel de **gelijkstroomversterking** genoemd.

$$Y(s) = K \frac{(s\tau z_1 + 1) \dots (s\tau z_i + 1) \dots (s\tau z_m + 1)}{(s\tau p_1 + 1) \dots (s\tau p_i + 1) \dots (s\tau p_n + 1)} \quad (6.113)$$

Poolbaanversterking

Het zelfde systeem kan echter ook beschreven worden met:

$$Y(s) = K' \frac{(s + z_1) \dots (s + z_i) \dots (s + z_m)}{(s + p_1) \dots (s + p_i) \dots (s + p_n)} \quad (6.114)$$

$$K' = K \frac{\tau z_1 \tau z_2 \dots \tau z_m}{\tau p_1 \tau p_2 \dots \tau p_n} = K \frac{\prod_{i=1}^m \tau z_i}{\prod_{i=1}^n \tau p_i} \quad (6.115)$$

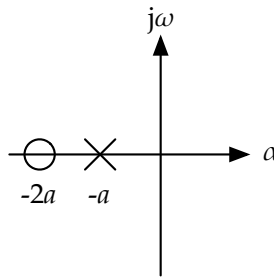
K' wordt de **poolbaanversterking** genoemd.

Polen- en nulpuntenbeeld

De waarden van s waarvoor de noemer gelijk wordt aan nul (de wortels van de noemer) noemen we **polen** van $Y(s)$. De waarden van s waarvoor de teller gelijk wordt aan nul (de wortels van de teller) noemen we **nulpunten** van $Y(s)$. Deze polen en nulpunten kunnen ook grafisch worden weergegeven. Een pool wordt weergegeven met een kruis en een nulpunt met een cirkel. Op de horizontale as staat het reële deel uitgezet en op de verticale as het imaginaire deel. (zie verder pagina 428)

Hieronder staat het polen- en nulpuntenbeeld gegeven voor het systeem:

$$Y(s) = \frac{s + 2a}{s + a} \quad (6.116)$$



Figuur 6.4: polen- en nulpuntenbeeld bij vergelijking 6.116

Serie- en parallelvorm

Systemen kunnen zowel in een **serievorm** (6.117) als in een **parallelle vorm** (6.118) worden weergegeven.

$$Y(s) = K' \frac{(s + z_1) \dots (s + z_i) \dots (s + z_m)}{(s + p_1) \dots (s + p_i) \dots (s + p_n)} = K' \frac{\prod (s + z_i)}{\prod (s + p_j)} \quad (6.117)$$

$$= K' \left(\frac{A_1}{s + p_1} + \dots + \frac{A_i}{s + p_i} + \dots + \frac{A_n}{s + p_n} \right) \quad (6.118)$$

Het bepalen van de coëfficiënten van de parallelle vorm gaat afhankelijk van het aantal en het soort polen.

Systemen met alleen enkelvoudige polen

Indien het systeem alleen enkelvoudige polen bevat kunnen de coëfficiënten berekend worden met de formule:

$$A_k = \lim_{s \rightarrow -p_k} (s + p_k) \frac{\prod_i (s + z_i)}{\prod_j (s + p_j)} \quad (6.119)$$

Met behulp van het polen- en nulpuntenbeeld kunnen de coëfficiënten A_i als volgt bepaald worden. A_i is gelijk aan: *het product van de wijzers van alle nulpunten naar de pool in $-p_i$ gedeeld door het product van de wijzers van alle overige polen naar pool in $-p_i$* . Als er geen nulpunten zijn, wordt 'het product van de wijzers van alle nulpunten naar de pool in $-p_i$ ' vervangen door 1.

Systemen met dubbele polen

Systemen met een dubbele pool hebben als kenmerk dat er een kwadratische term in de noemer van de systeembeschrijving voorkomt. Als voorbeeld wordt genomen:

$$Y(s) = \frac{1}{(s + a)(s + b)s^2} \quad (6.120)$$

In systemen met deze dubbelpolen is het eenvoudiger om de coëfficiënten te berekenen via het polen- en nulpuntenbeeld. Daarom wordt alleen deze omzetting behandeld. De omzetting in parallelvorm verloopt dan als volgt:

$$Y(s) = \frac{A_1}{s + a} + \frac{A_2}{s + b} + \frac{A_3}{s^2} + \frac{A_4}{s} \quad (6.121)$$

A_1 t/m A_3 kunnen berekend worden met dezelfde regel als voor systemen met enkelvoudige polen. A_4 moet echter met volgende regel berekend worden: $A_4 = A_3 \cdot (\text{som van de reciproken van alle wijzers van de nulpunten naar de dubbelpool} - \text{som van de reciproken van alle wijzers van de overige polen naar de dubbelpool})$. Als er geen nulpunten zijn, is de 'som van de reciproken van alle wijzers van de nulpunten naar de dubbelpool' gelijk aan 0.

Systemen met complexe polen

Bij deze systemen wordt gebruik gemaakt van dezelfde regels als bij systemen met enkelvoudige polen. De wijzers zijn nu echter opgebouwd uit de modulus en het bijbehorende argument.

Impulsresponsies

De impulsresponsie van systemen kan ook direct uit het polen- en nulpuntenbeeld afgeschat worden:

Element	Impulsresponsie
Een pool in $-\alpha$	$e^{-\alpha t}$
Een pool in $+\alpha$	$e^{\alpha t}$
Een pool in 0	$e^{0t} = 1$
Een pool in $j\beta$	$e^{j\beta t}$
Een pool in $-j\beta$	$e^{-j\beta t}$
Een pool in $j\beta$ én $-j\beta$	$\sin(\beta t + \varphi)$
Een pool in $-\alpha + j\beta$	$e^{-(\alpha - j\beta)t}$
Een pool in $-\alpha - j\beta$	$e^{-(\alpha + j\beta)t}$
Een pool in $-\alpha + j\beta$ én $-\alpha - j\beta$	$e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi)$

Stapresponsie van een 2e-ordesysteem met complexe polen

Stapresponsies van tweedeordesystemen met complexe polen komen vaak voor in de regeltechniek. Enkele kenmerkende eigenschappen kunnen direct bepaald worden. Hierbij wordt uitgegaan van een systeem met complexe polen in $s = -\alpha \pm j\beta$.

Piektijd

De **piektijd** is de tijd waarop de stapresponsie voor het eerst een maximale waarde bereikt. De overshoot is het verschil tussen de maximale waarde van de stapresponsie en 1 (afhankelijk van de versterkingsfactor). De piektijd wordt gegeven door: $t_{\text{piek}} = \frac{\pi}{\beta}$.

Relatieve demping

De **relatieve demping** z is de sinus van verhouding tussen α en β . Hoe groter β is ten opzichte van α , dat wil zeggen hoe kleiner z , des te groter de overshoot. De relatieve demping zegt dus niets over de snelheid waarmee het overgangssignaal uitdempt, maar wel over de vorm van het overgangssignaal. Een veel gebruikte waarde voor z is 0,7, wat overeenkomt met $\alpha = \beta$.

Absolute demping

Dit is de maat voor de snelheid waarmee het overgangssignaal uitdempt. Deze snelheid wordt bepaald door de term $e^{-\alpha t}$ en α wordt de **absolute demping** genoemd.

Stapresponsies bepalen

Voor het bepalen van de **stapresponsie** wordt gebruik gemaakt van het **beginwaardetheorema**:

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow 0} y(t) &= \lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(1/s)H(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} H(s)\end{aligned}\quad (6.122)$$

$$\begin{aligned}\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{dy(t)}{dt} &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(sY(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} s(s(1/s)H(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow \infty} sH(s)\end{aligned}\quad (6.123)$$

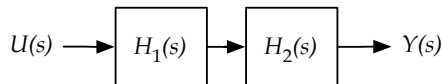
Hierbij is $H(s)$ de overdrachtsfunctie van het systeem.

Blokschema's en stroomschema's

Alle hiervoor behandelde systemen en overdrachten kunnen grafisch weergegeven worden met behulp van blokschema's en stroomschema's.

Basiselementen blokschema's

Alle systemen en overdrachten kunnen met behulp van drie basiselementen in **blokschema's** omgezet worden.



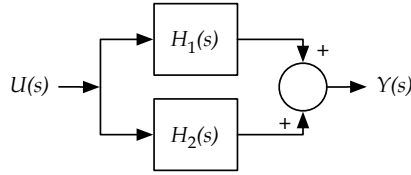
Figuur 6.5: $H = H_1 \cdot H_2$

Vereenvoudigen van complexe blokschema's

Veelal zijn blokschema's complex en het zou handig zijn als ze vereenvoudigd konden worden. Een voorbeeld van een complex blokschema staat in figuur 6.8

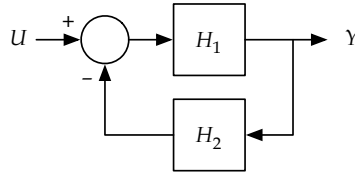
De overdracht is hier op het eerste gezicht niet eenvoudig van te bepalen. Als het schema echter iets anders ingedeeld wordt, wordt het schema in figuur 6.9 verkregen.

Algemeen



Figuur 6.6: $H = H_1 + H_2$

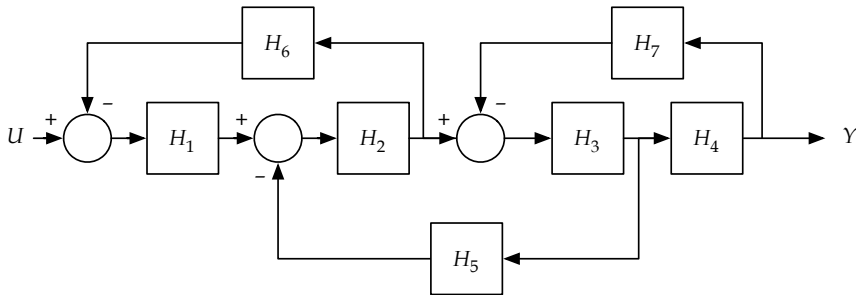
Wiskunde



Figuur 6.7: $H = \frac{\text{directe pad}}{1 - \text{lusoverdracht}} = \frac{H_1}{1 - H_1 \cdot H_2}$ (zie "Mason", pagina 427).

Informatica

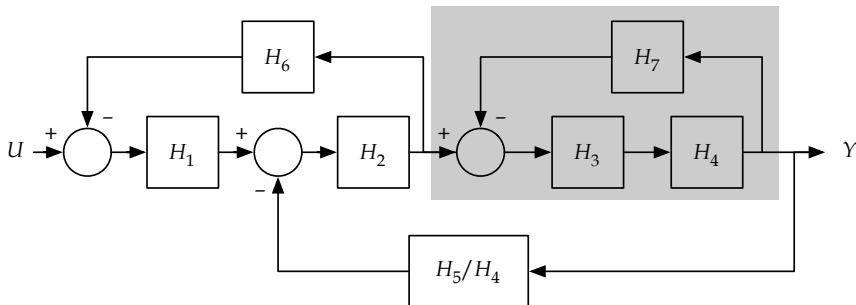
Fysica



Figuur 6.8: Een voorbeeld van een complex blokschema

Meten

Signalen



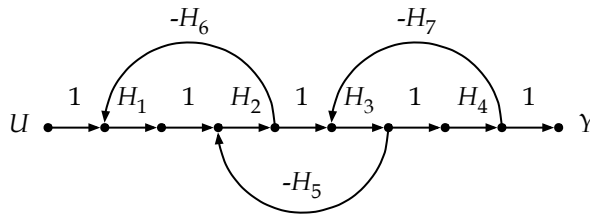
Figuur 6.9: Vereenvoudiging van het blokschema van figuur 6.8

Elektronica

Nu is het mogelijk om met behulp van de hiervoor genoemde basiselementen het gearceerde gebied door een enkele overdracht te vervangen. Dit kan volgens hetzelfde principe ook voor de keten vooraan gedaan worden.

Blok-schema's omzetten in stroomschema's

Stroomschema's zijn een andere manier waarop overdrachten en systemen weergegeven kunnen worden. Het stroomschema van het systeem in figuur 6.8 staat in figuur 6.10. Ten opzichte van het blok-schema worden de blokken vervangen door zogenaamde takken en de signalen in het blok-schema worden vervangen door knooppunten.



Figuur 6.10: Stroomschema bij het blok-schema in figuur 6.8

De regel van Mason

Met deze regel kunnen gemakkelijk de overdrachtsfuncties van ingewikkelde netwerken bepaald worden. De regel is het eenvoudigst te gebruiken in combinatie met stroomschema's. De vier belangrijkste begrippen bij de regel van Mason staan hieronder uitgelegd:

1. **Rechtstreekse weg** (T_n)
Dit zijn alle wegen van de ingang naar de uitgang, waarbij geen van de knooppunten meer dan eenmaal wordt gepasseerd.
2. **Terugkoppellus**
Een weg die begint en eindigt in hetzelfde knooppunt, waarbij geen van de knooppunten vaker dan eenmaal wordt gepasseerd.

3. **Determinant** (Δ)

De determinant is opgebouwd uit combinaties van lusoverdrachten:

$$\Delta = 1 - \text{som}_1 + \text{som}_2 - \text{som}_3 + \dots \quad (6.124)$$

- $\text{som}_1 =$ som van alle lusoverdrachten.
- $\text{som}_2 =$ som van de producten van alle combinaties van twee elkaar niet-rakende lussen.
- \vdots
- $\text{som}_n =$ som van de producten van alle combinaties van n elkaar niet-rakende lussen.

Lussen raken elkaar niet, wanneer ze geen gemeenschappelijke knooppunten hebben.

4. **Cofactor** (Δ_n)

Het deel van de determinant dat intact blijft als alle knooppunten van de rechtstreekse weg T_n uit het systeem worden verwijderd.

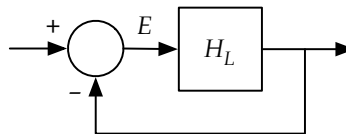
De uiteindelijke overdracht van het systeem wordt dan gegeven door:

$$H = \frac{\sum T_n \Delta_n}{\Delta} \quad (6.125)$$

Polen- en nulpuntenbeeld

Het systeem kan dus weergegeven worden in een polen- en nulpuntenbeeld (zie ook pagina 422). Het kan hiernaast ook gebruikt worden om meer informatie over het dynamische gedrag van het systeem te verkrijgen.

Om het werk te vergemakkelijken wordt er uitgegaan van een systeem met een **eenheidsterugkoppeling** en wordt de overdracht H_L gescheiden in een (stationaire) versterking (K'_L) en een dynamisch gedeelte (G'_L).



Figuur 6.11: Een systeem met eenheidsterugkoppeling

Polen gesloten systeem en karakteristieke vergelijking

De polen van het gesloten systeem worden gevonden door de noemer van de totale overdracht H gelijk aan nul te stellen. De totale overdracht H wordt gegeven door vergelijking 6.126. De vergelijking die de polen van het gesloten systeem weergeeft wordt de **karakteristieke vergelijking** genoemd (vergelijking 6.127).

$$H = \frac{H_L}{1 + H_L} = \frac{K'_L G'_L}{1 + K'_L G'_L} \quad (6.126)$$

$$1 + K'_L G'_L = 0 \quad (6.127)$$

Poolbaanvergelijking of root-locus

De **poolbaanvergelijking (root-locus)** geeft het verloop van de polen van het gesloten systeem weer voor variaties in de poolbaanversterking K'_L . De poolbaanvergelijking luidt als volgt:

$$\begin{aligned} GL' &= -\frac{1}{K'_L} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^m (s + z_i)}{\prod_{j=1}^n (s + p_j)} \end{aligned} \quad (6.128)$$

Als de ligging van de polen echter vastgesteld is, of bekend wordt verondersteld, kan de poolbaanversterking ook bepaald worden met de volgende formule:

$$KL' = \frac{\prod_{j=1}^n |s + p_j|}{\prod_{i=1}^m |s + z_i|} \quad (6.129)$$

Tekenen van de poolbaan

Een van de belangrijkste eigenschappen die gebruikt wordt bij het tekenen van de poolbaan is: *“De punten in het s-vlak waarvoor geldt dat de som van de argumenten van de wijzers vanuit de nulpunten min de som van de argumenten van de wijzers vanuit de polen gelijk is aan $-\pi$ (-180°) behoren tot de poolbaan.”*

Voor ingewikkelde systemen kan dezelfde regel gebruikt worden, maar het zoekwerk wordt eenvoudiger door onderstaande zes vuistregels:

1. De poolbaan voor variaties in K'_L begint voor $K'_L = 0$ in de polen van het open systeem en eindigt voor $K'_L \rightarrow \infty$ in de nulpunten van het open systeem of gaat naar ∞ .
2. Als het aantal polen plus (of min) nulpunten (op de reële as) rechts van een bepaald punt van de reële as oneven is, behoort dat punt van de reële as tot de poolbaan.
3. Als een systeem meer polen dan nulpunten heeft, nadert poolbaan voor $K'_L \rightarrow \infty$ naar één of meer asymptoten. Het aantal asymptoten is gelijk aan het aantal polen min het aantal nulpunten ($n_p - n_z$).
4. De richtingen van de asymptoten (dat wil zeggen: de hoeken die de asymptoten maken met de reële as), worden bepaald door de volgende formule:

$$\frac{-180^\circ + k \cdot 360^\circ}{n_p - n_z} \quad (6.130)$$

Waarbij geldt dat $k \in \mathbb{Z}$ en dat $n_p - n_z$ (weer) het aantal polen min het aantal nulpunten is.

5. Het snijpunt van de asymptoten met de reële as wordt bepaald door het ‘zwaartepunt’ van de polen en de nulpunten. In formulevorm:

$$\frac{\sum p_j - \sum z_j}{n_p - n_z} \quad (6.131)$$

6. In de vertrek- en aankomstpunten van de poolbaan op de reële as geldt:

$$\frac{dK'_L}{ds} = 0 \quad (6.132)$$

Systemen met **dode tijd** zijn lastiger om te tekenen. Het argument heeft namelijk als gevolg van de dode tijd een constante waarde op lijnen die evenwijdig aan de reële as lopen. We beschouwen de overdracht van een systeem met dode tijd, zoals weergegeven in vergelijking 6.133.

$$H_L = \frac{K'_L \cdot e^{-st}}{s + a} \quad (6.133)$$

Het stappenplan voor het tekenen van de poolbaan is dan als volgt:

1. Teken eerst de lijnen waar het argument als gevolg van de dode tijd gelijk is aan -45° , -90° , -135° en -180° .
2. Teken vervolgens de lijnen waar het argument als gevolg van de pool gelijk is aan -45° , -90° , -135° en -180° . de snijpunten van de getekende lijnpaaren zijn punten die tot de poolbaan behoren.
3. Bereken het vertrekpunt op de reële as met

$$-\frac{dK'_L}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{s + a}{e^{-st}} \right) = 0 \quad (6.134)$$

Een systeem met dode tijd heeft echter vanuit dit vertrekpunt *oneindig* veel 'takken' doordat de dode tijd beschouwd kan worden als:

$$e^{-st} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{1 + s \frac{T}{n}} \right)^n \quad (6.135)$$

Echter alleen de primaire tak is van belang, want deze bepaalt de stabiliteit van het gesloten systeem.

Tau-locus

In veel systemen zijn er meer parameters naast de poolbaanversterking die beïnvloed kunnen worden. Daarmee zijn die parameters geschikt om een regelaar mee te ontwerpen en de **tau-locus** geeft de *gevoeligheid* van de poollocaties weer voor variaties in de gekozen parameter. Dezelfde vergelijking als bij de root-locus is van toepassing, alleen wordt in plaats van K'_L nu de gekozen parameter geïsoleerd.

Er moet bij berekening van de tau-locus altijd uitgegaan worden van een systeembeschrijving waarin de poolbaanversterking voorkomt en *niet* de systeemversterking, vandaar dat in sommige gevallen eerst de vergelijking in een andere vorm herschreven moet worden.

Bodeplots, Nicholsdiagrammen en polaire figuren

Naast het polen- en nulpuntenbeeld kan het systeem ook op andere manieren grafisch weer worden gegeven.

Bodeplot

Een **Bodeplot** geeft de **frequentieresponsie** van een systeem weer. Hierin worden de **modulus** (dB) en het **argument** (lineair) uitgezet tegen een logaritmische frequentieschaal.

Met de volgende formules kunnen de modulus en het argument uit het polen- en nulpuntenbeeld berekend worden:

$$|H(j\omega)| = \frac{\prod |j\omega + z_i|}{\prod |j\omega + p_j|} \quad (6.136)$$

$$\text{modulus} = 20^{10} \log(|H(j\omega)|) \quad (6.137)$$

$$\arg(H(j\omega)) = \sum \arg(j\omega + z_i) - \sum \arg(j\omega + p_j) \quad (6.138)$$

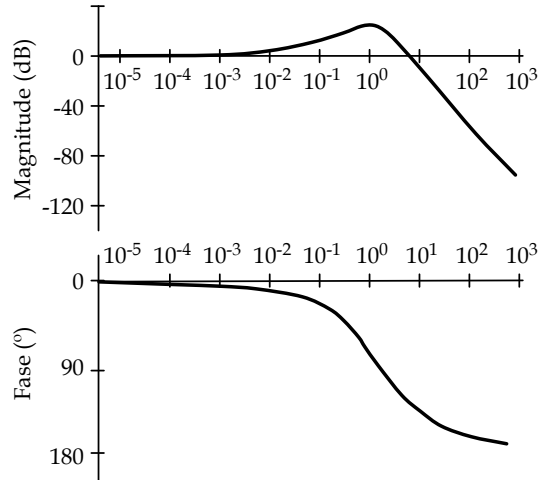
Dit komt voor de modulus neer op het delen van het product van de lengte van de wijzers vanuit de nulpunten naar het punt $s = j\omega$ door het product van de lengte van de wijzers vanuit de polen naar hetzelfde punt. Voor het argument komt het neer op het aftrekken van de som van de hoeken die de wijzers vanuit de polen maken met de positieve reële as van de som van de hoeken die de wijzers vanuit de nulpunten maken met de positieve reële as. Een voorbeeld van een Bodeplot is gegeven in figuur 6.12.

Nicholsdiagram

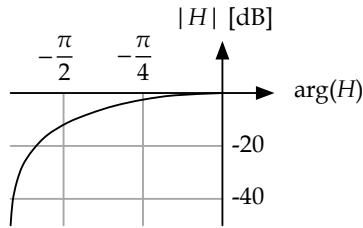
Hier wordt de modulus (dB) uitgezet tegen het argument. In tegenstelling tot bij de Bodeplot kan de fasedraaiing die bij een bepaalde frequentie hoort niet afgelezen worden, tenzij hij langs de karakteristiek gespecificeerd staat. In figuur 6.13 staat een voorbeeld van een Nicholsdiagram.

Polair figuur

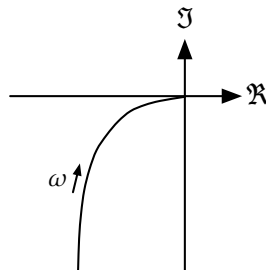
In deze plot worden het reële deel en het imaginaire deel van de overdrachtsfunctie tegen elkaar uitgezet. Het scheiden van een overdrachtsfunctie in een reëel en een imaginair deel gebeurt meestal als in vergelijking 6.139. Een voorbeeld van een polaire figuur is weergegeven in figuur 6.14.



Figuur 6.12: Een voorbeeld van een bodeplot



Figuur 6.13: Een voorbeeld van een Nicholsdiagram



Figuur 6.14: Een voorbeeld van een Polair figuur

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

$$H(j\omega) = \frac{T(j\omega)}{N(j\omega)} = \frac{T(j\omega) \cdot N(-j\omega)}{N(j\omega) \cdot N(-j\omega)} = \Re(H) + \Im(H) \quad (6.139)$$

Polaire figuren zijn vooral handig om snel, schetsmatig, bepaalde eigenschappen van een systeem te illustreren en minder om er daadwerkelijk regelaars mee te ontwerpen. Hieronder staat een stappenplan waarmee globaal het polen- en nulpuntenbeeld bepaald kan worden uit een polair figuur:

1. *Bekijk het gedrag voor lage frequenties*

Het aantal zuivere integraties bepaalt de fasedraaiing voor $\omega = 0$. De fasedraaiing voor $\omega = 0$ is gelijk aan het aantal zuivere integraties maal -90° . Als de polaire figuur voor $\omega = 0$ op de reële as begint, kan hieruit direct de systeemversterking bepaald worden.

2. *Bekijk het gedrag voor hoge frequenties*

De fasedraaiing voor $\omega \rightarrow \infty$ bepaalt het verschil tussen het aantal nulpunten en het aantal polen. Iedere pool geeft voor $\omega \rightarrow \infty$ 90° fasnaijling en ieder nulpunt geeft 90° fasevoorijling. In fysisch realiseerbare systemen is het aantal polen altijd groter dan, of gelijk aan het aantal nulpunten. Voor systemen met dode tijd stopt de fasedraaiing niet op een bepaalde waarde, maar gaat naar oneindig.

3. *Bekijk het middengebied*

In alle gevallen dat de (negatieve) fasedraaiing niet monotoon toeneemt, maar kleiner wordt, of eventueel zelfs positief, zijn er nulpunten aanwezig in het systeem.

Stabiliteit

In de regeltechniek is de analyse van de **stabiliteit** van het geregelde systeem zeer belangrijk. De stabiliteit kan op verschillende manieren geanalyseerd en gekwantificeerd worden. Twee belangrijke begrippen hierbij zijn de versterkings- en fasemarge:

- **Versterkingsmarge**

De versterkingsmarge is de extra versterking die aan het systeem toegevoegd moet worden om het systeem op de grens van instabiliteit te brengen.

- **Fasemarge**

De fasemarge is de extra fasedraaiing die aan het systeem toegevoegd moet worden om het systeem op de grens van instabiliteit te brengen. De fasemarge beïnvloed onder meer het overgangsverschijnsel van het systeem, zoals uitdempen en overshoot.

Als door toedoen van verschillende waarden van de lusversterking het systeem instabiel kan worden, is het systeem voorwaardelijk stabiel.

Polen- en nulpuntenbeeld

Een systeem wordt instabiel als de polen van het gesloten systeem in het rechterhalfvlak van het s -vlak komen te liggen. Via de root-locus kan onderzocht worden bij welke poolbaanversterking de polen van het gesloten systeem in het rechterhalfvlak komen te liggen.

Bodediagrammen

Instabiliteit treedt op wanneer het teruggekoppelde signaal in fase is met het oorspronkelijke signaal. Bij negatieve terugkoppeling komt dit neer op -180° fasedraaiing en als de lusversterking daarbij groter is dan 1.

Polaire figuren

Bij polaire figuren wordt gebruik gemaakt van het Nyquistcriterium:

“Een teruggekoppeld systeem is stabiel als de polaire figuur (getekend voor zowel de positieve en de negatieve frequenties) van het open systeem het punt -1 niet omvat.”

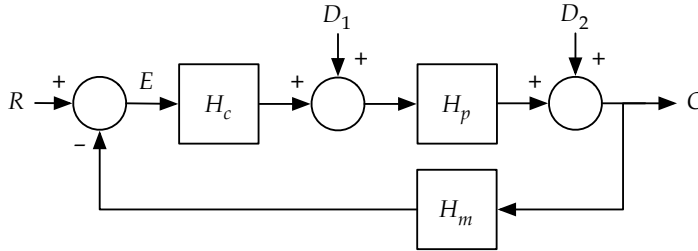
Er is ook een uitgebreid Nyquistcriterium, maar door gebruik te maken van het hierboven genoemde eenvoudige criterium en het gebied rechts van de polaire figuur te markeren kan in principe al het benodigde over de stabiliteit van een systeem te weten worden gekomen.

Open en gesloten systemen

Wanneer een systeem geen terugkoppeling bevat wordt er gesproken van een **open systeem**. Als er wel een terugkoppeling aanwezig is het systeem **gesloten**.

Gevoeligheid

Door het aanbrengen van een terugkoppeling kan het systeem ongevoeliger gemaakt worden voor aanwezige storingen. We zullen hierbij uitgaan van het systeem dat in figuur 6 weergegeven staat.



De verschillende overdrachten die aanwezig zijn in dit systeem:

$$\frac{C}{R} = \frac{H_c H_p}{1 + H_c H_p H_m} \quad (6.140)$$

$$\frac{E}{R} = \frac{1}{1 + H_c H_p H_m} \quad (6.141)$$

$$\frac{D_1}{R} = \frac{H_p}{1 + H_c H_p H_m} \quad (6.142)$$

$$\frac{D_2}{R} = \frac{1}{1 + H_c H_p H_m} \quad (6.143)$$

D_1 en D_2 zijn verstoringen en E is het verschil tussen het gewenste signaal en de uitgang. De gewenste waarden van de overdrachten zijn daarom als volgt:

$$\frac{C}{R} = 1 \quad \frac{E}{R} = 0 \quad \frac{D_1}{R} = 0 \quad \frac{D_2}{R} = 0 \quad (6.144)$$

De gewenste waarden voor $\frac{C}{D_1}$ en $\frac{C}{D_2}$ zijn te realiseren door $H_c \rightarrow \infty$ te laten naderen. Dit zou echter serieuze gevolgen kunnen hebben voor de stabiliteit van het systeem, bijvoorbeeld een zeer lage relatieve en/of absolute demping.

Als het product $H_c H_p$ echter groot gekozen wordt ten opzichte van 1 vereenvoudigt de overdracht $\frac{C}{R}$ tot:

$$\frac{C}{R} = \frac{H_c H_p}{H_c H_p H_m} = \frac{1}{H_m} \quad (6.145)$$

Hieruit valt af te leiden dat de gewenste waarde voor H_m 1 is, wat overeen komt met een **eenheidsterugkoppeling**.

Stationaire fout

Afhankelijk van het systeem zal de uitgang een bepaalde stationaire fout, ϵ_{ss} , bevatten. Deze fout kan berekend worden met behulp van het eindwaarde-theorema:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} c(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{C}{S} \right) S \tag{6.146}$$

Daarbij is S de storing is en $\frac{C}{S}$ de overdracht van de storing naar de uitgang. Het blijkt dat ϵ_{ss} onder meer afhankelijk is van het aantal zuivere integraties in de voorwaartse weg van het systeem. Het aantal zuivere integraties in de voorwaartse weg bepaalt het typenummer van het systeem; een systeem zonder zuivere integraties is een type-0 systeem etc.

Type	S(s)	A/s	A/s ²	A/s ³
0	$\frac{A}{1+K}$	∞	∞	
1	0	$\frac{A}{K}$	∞	
2	0	0	$\frac{A}{K}$	

Tabel 6.19: Stationaire fout bij verschillende typen systemen voor verschillende stoorsignalen

Hieruit blijkt dat de stationaire fout naast het type systeem ook afhangt van het stoorsignaal en de grootte van de versterkingsfactor K .

Afwijkingsverhouding

De afwijkingsverhouding is de verhouding tussen de storingsgevoeligheid van het teruggekoppelde systeem en de storingsgevoeligheid van het open systeem, als functie van de frequentie:

$$AV = \frac{C}{S_{\text{gesl}}} \bigg/ \frac{C}{S_{\text{open}}} \tag{6.147}$$

De afwijkingsverhouding heeft in drie frequentiegebieden verschillende eigenschappen:

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

1. *Het gebied van de lage frequenties*
 Hier is de afwijkingsverhouding kleiner dan 1. Dat wil zeggen dat storingen in dit frequentiegebied in het gesloten systeem minder merkbaar zullen zijn dan in het open systeem.

2. *Het gebied van de middenfrequenties*
 Hier is de afwijkingsverhouding groter dan 1. Dat wil zeggen dat storingen in dit frequentiegebied in het gesloten systeem meer merkbaar zullen zijn dan in het open systeem.

3. *Het gebied van de hoge frequenties*
 Hier is de afwijkingsverhouding ongeveer gelijk aan 1. Dat wil zeggen dat storingen in dit frequentiegebied in het gesloten systeem in dezelfde mate merkbaar zullen zijn als in het open systeem.

Hieruit blijkt dat bij het ontwerpen van de terugkoppeling er voor gezorgd moet worden dat de aanwezige storingen in het eerste gebied vallen. Het bovenstaande komt ook tot uitdrukking in het **theorema van Westcott**, zoals weergegeven in vergelijking 6.148.

$$\int_0^{\infty} \log |AV| d\omega = 0 \quad (6.148)$$

Dit kan beschouwd worden als een **wet van behoud van ellende**. Wat er in het ene frequentiegebied aan verbetering van de storingsgevoeligheid wordt bereikt, is gelijk aan de verslechtering elders.

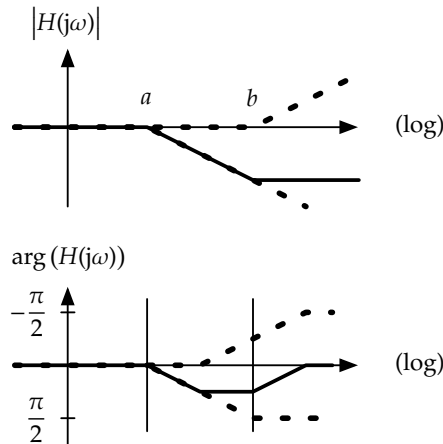
Regelaars met lag- en leadnetwerken

Bij het ontwerpen van regelaars wordt veelal gebruik gemaakt van lag- en leadnetwerken. De term lag en lead slaan op de effecten die deze netwerken hebben op de fasedraaiing van het gesloten systeem. Door deze netwerken op de juiste positie te plaatsen kunnen gewenste specificaties met betrekking tot bijvoorbeeld de versterkingsfactor en relatieve demping gehaald worden.

Lagnetwerk

Dit is een fase-naijlend netwerk en wordt gekenmerkt door de algemene overdracht in vergelijking 6.149. Een Bodeplot van deze overdracht staat gegeven in figuur 6.15.

$$H(j\omega) = \frac{a j\omega + b}{b j\omega + a} \quad a < b \quad (6.149)$$



Figuur 6.15: Bodediagram bij vergelijking 6.149

Het opnemen van een lagnetwerk heeft geen gevolgen voor het dynamische gedrag en de bandbreedte van het systeem. De nauwkeurigheid van het systeem wordt verhoogd doordat de versterking voor lage frequenties wordt verhoogd ten opzichte van de versterking voor hoge frequenties.

Leadnetwerk

Dit is een fase-voorijlend netwerk en wordt gekenmerkt door de algemene overdracht in vergelijking 6.150. Een Bodeplot van deze overdracht staat gegeven in figuur 6.16.

$$H(j\omega) = \frac{a j\omega + b}{b j\omega + a} \quad a > b \quad (6.150)$$

Het opnemen van een leadnetwerk heeft wel gevolgen voor het dynamische gedrag van het systeem. De bandbreedte wordt verhoogd en daardoor wordt het inschakelverschijnsel sneller.

Algemeen

Wiskunde

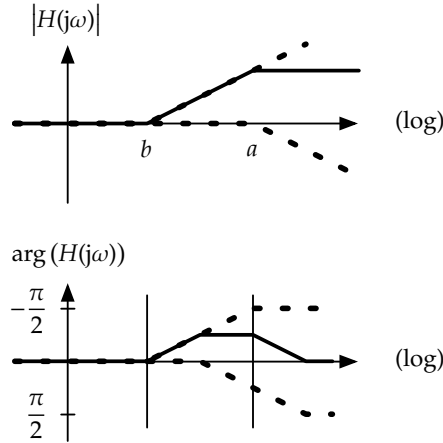
Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica



Figuur 6.16: Bodediagram bij vergelijking 6.150

Plaatsen van lag- en leadnetwerken in het s-domein

Verschillende methoden zijn bruikbaar om lag- en leadnetwerken zodanig te plaatsen dat de polen van het gesloten systeem op de gewenste positie komen te liggen. Te denken is hierbij aan poolplaatsing, plaatsing van netwerken met minimale differentiërende integrerende actie en door gebruik te maken van de tau-locus. Er zijn echter ook algemeen bruikbare vuistregels voor het plaatsen van lag- en leadnetwerken, deze staan hieronder.

De algemene methode voor het plaatsen van een leadnetwerk is dat het nulpunt van het leadnetwerk iets links naast de tweede pool van het systeem vanaf de oorsprong geplaatst wordt. De pool wordt een factor 10 verder van de oorsprong gelegd dan de positie van het nulpunt

Voor het plaatsen van een lagnetwerk geldt dat het nulpunt van het lagnetwerk een factor 10 dichterbij de oorsprong gelegd wordt ten opzichte van de positie van de tweede pool van het systeem. De pool wordt nog eens een factor 10 dichterbij de oorsprong geplaatst.

Plaatsen van lag- en leadnetwerken in het frequentiedomein

Net zoals in het s-vlak kunnen ook met behulp van de Bodeplot de lag- en leadnetwerken op de juiste manier geplaatst worden om het gesloten systeem aan de gewenste specificaties te laten voldoen. Hierbij gaan we uit van de volgende overdracht voor het lag- en leadnetwerk:

$$H_{\text{lead}}(j\omega) = \frac{j\omega a\tau_d + 1}{j\omega\tau_d + 1} \quad (6.151)$$

$$H_{\text{lag}}(j\omega) = \frac{j\omega\tau_i + 1}{j\omega a\tau_i + 1} \quad (6.152)$$

Voor het plaatsen van *leadnetwerken* is er een stappenplan:

1. Bepaal uit het Bodeplot de fasemarge van het ongecompenseerde systeem op de positie waar de versterking aan de vereiste waarde voldoet.
2. Bepaal met behulp van de gewenste fasemarge de extra fasemarge, φ_m , die gerealiseerd dient te worden.
3. Bereken de factor a die de pool en het nulpunt van elkaar verwijderd zijn met behulp van: $\sin(\varphi_m) = \frac{a-1}{a+1}$.
4. Het differentiërende netwerk moet, om de extra fasemarge te realiseren, zo geplaatst worden dat de maximale fasemarge optreedt waar de moduluskarakteristiek van het gecompenseerde systeem de 0 dB-lijn doorsnijdt. Daar waar de maximale fasemarge optreedt, geeft het differentiërende netwerk een extra versterking van $20 \log(a) \text{ dB}$.
5. Bepaal in de moduluskarakteristiek van het ongecompenseerde systeem de frequentie, ω_m , waarbij de moduluskarakteristiek $-20 \log(a)$ is.
6. Bepaal de tijdconstante van het differentiërende netwerk met behulp van:

$$\tau_d = \frac{1}{\omega_m \sqrt{a}} \quad (6.153)$$

Het plaatsen van een *lagnetwerk* gaat meer op een trial- en error-achtige manier en kan alleen gebruikt worden als er geen eisen gesteld worden aan de responsiesnelheid. Lagnetwerken worden altijd in het laagfrequente gebied geplaatst en ook met a gelijk aan 10. Door voor τ_i een waarde te kiezen en de bijbehorende Bodeplot te tekenen kan bepaald worden of het gecompenseerde systeem aan de gewenste specificaties voldoet, of dat het netwerk meer of minder richting de lage frequenties geplaatst moet worden.

Ontwerpen van regelaars met toestandsterugkoppeling

Het terugkoppelen van de toestandsgrootheden, eventueel geschat met een toestandsschatter, stelt ons in staat om de polen van het geregelde systeem op de gewenste positie te plaatsen.

Systemen waarvan niet alle toestandsgrootheden gemeten kunnen worden, worden niet volledig **waarneembaar** genoemd en systemen waarvan toestandsgrootheden niet beïnvloed kunnen worden met een terugkoppeling worden niet volledig **regelbaar** genoemd.

Een wiskundig model, een optimalisatiecriterium, de te optimaliseren parameters en randvoorwaarden zijn gegevens die nodig zijn om een optimale regelaar te kunnen ontwerpen.

Heuvelklimmen en geschikte criteria

Met **heuvelklimmen** wordt het verschil tussen het gewenste gedrag en het gerealiseerde gedrag bepaald voor verschillende instellingen van de regelaar. De parameters van de regelaar worden net zolang aangepast totdat wijzigingen niet meer leiden tot een verbetering van de uitkomst van het gebruikte minimalisatie criterium.

Veel verschillende criteria kunnen gebruikt worden om de optimale instellingen voor de regelaar te achterhalen. Ieder criterium leidt tot verschillende instellingen en daarmee tot een verschillend gedrag van het uiteindelijke systeem. De keuze van het criteria moet dus voor ieder systeem opnieuw gemaakt worden.

De meeste criteria bestaan uit een kostenfunctie die afhangt van het verschil tussen het gewenste en het gerealiseerde gedrag. Door via de in te stellen parameters deze kostenfunctie te minimaliseren, wordt de optimale instelling gevonden. Veel gebruikte criteria zijn:

- **ISE-criterium** (*integral of the square of the error*)

$$J = \int_0^T e^2 dt \quad (6.154)$$

- **IAE-criterium** (*integral of the absolute magnitude of the error*)

$$J = \int_0^T |e| dt \quad (6.155)$$

- **ITSE-criterium** (*integral of time multiplied by the square of the error*)

$$J = \int_0^T t \cdot e^2 dt \quad (6.156)$$

- **ITAE-criterium** (*integral of time multiplied by the absolute magnitude of the error*)

$$J = \int_0^T t \cdot |e| dt \quad (6.157)$$

Niet-lineariteiten

Bij de modelvorming van systemen wordt vaak uitgegaan van een lineair systeem. Dit wordt gedaan omdat voor lineaire systemen op eenvoudige wijze goede regelaars ontworpen kunnen worden. Een dergelijke **lineairisatie** is toegestaan als het systeem in het gebied rondom het werkpunt waarin het systeem gebruikt wordt een ongeveer lineair verloop heeft.

Niet alle niet-lineaire elementen kunnen echter zomaar verwaarloosd worden. Hierbij is te denken aan **verzadigingseffecten**, **hystereselussen** en **relaiswerking** met dode-tijd. Deze niet-lineairiteiten kunnen op een aantal manieren gemodelleerd worden.

Beschrijvende functiemethode

Deze methode wordt gebruikt om de stabiliteit van niet-lineaire systemen te onderzoeken. De methode bestaat uit het achterhalen van de versterkingsfactor en eventuele fasedraaiing van het uitgangssignaal van het op de rand van instabiliteit verkerende systeem, als functie van de amplitude van het sinusvormige ingangssignaal.

Fasevlakmethode

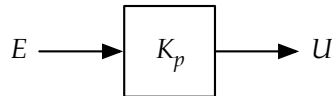
Met de fasevlakmethode kan het gedrag van het niet-lineaire element beter onderzocht worden, maar de toepassing is beperkt tot *tweede-ordesystemen*. De fasevlakmethode bestaat uit het tekenen van de toestandsgrootte x_2 te tekenen als functie van de toestandsgrootte x_1 , hierbij is x_2 altijd de afgeleide van x_1 .

Algemeen toepasbare regelaars

Soms is er geen, of niet voldoende gedetailleerde informatie beschikbaar over het te regelen systeem om een wiskundig model met voldoende nauwkeurigheid op te stellen. Voor zulke gevallen zijn er algemeen toepasbare regelaars ontworpen, die ingesteld kunnen worden aan de hand van standaardregels. Deze regelaars leiden tot redelijke resultaten en vinden veel toepassingen in de industrie. Ook voor het gebruik van deze regelaars is een negatieve eenheidsterugkoppeling van de uitgang van het systeem naar de ingang vereist.

P-regelaar

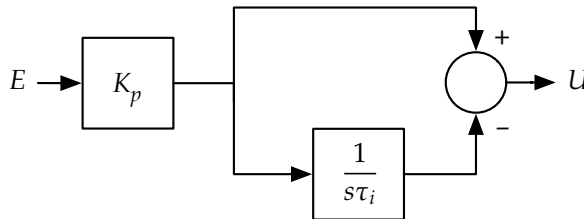
De proportionele regelaar bestaat enkel uit een zuivere versterkingsfactor.



Figuur 6.17: P-regelaar

PI-regelaar

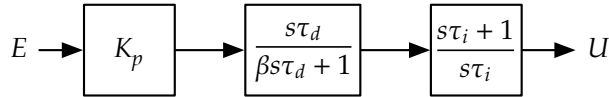
De proportioneel integrerende regelaar bestaat naast een versterkingsfactor ook uit een integrerende bewerking.



Figuur 6.18: PI-regelaar

PID-regelaar

De proportioneel integrerende differentiërende regelaar bevat zowel een versterkingsfactor als een integrerende actie en een differentiërende actie. Deze regelaar wordt van de drie hier genoemde regelaars het meeste toegepast.



Figuur 6.19: PID-regelaar

Ziegler-Nichols

Als het proces onbekend is, zijn er verschillende algemeen toepasbare instelregels voor regelaars opgesteld. Het instellen van een regelaar volgens de **Ziegler-Nichols regels** gaat als volgt:

1. Kies het gewenste werkpunt (dit is alleen van belang bij niet-lineaire systemen). Dat wil zeggen dat we kleine variaties zullen beschouwen rond een gemiddelde waarde van het stuursignaal en het uitgangssignaal van het systeem.
2. Maak $\tau_d = 0$ en $\tau_i \rightarrow \infty$, dit komt neer op het uitschakelen van de differentiërende en integrerende actie van de regelaar.
3. Verklein de proportionele band, dat wil zeggen vergroot K_p , totdat het systeem begint te oscilleren. Noteer de hierbij behorende waarde van de proportionele band, of van K_p . Deze waarde noemen we $K_{p,grens}$. Bepaal tevens de periode van de oscillatie T_{grens} .

Uit de waarden $K_{p,grens}$ en T_{grens} volgen de verschillende regelaar-instellingen:

Type regelaar	Instellingen
P	$K_p = 0.5 \cdot K_{p,grens}$
PI	$K_p = 0.45 \cdot K_{p,grens}$ $\tau_i = 0.8 \cdot T_{grens}$
PID	$K_p = 0.6 \cdot K_{p,grens}$ $\tau_i = 0.5 \cdot T_{grens}$ $\tau_d = 0.125 \cdot T_{grens}$

Hoofdstuk 7 Elektronica

Inhoudsopgave

Netwerkanalyse	447
Begrippen	447
Elementen	447
Wetten van Kirchhoff	451
Weerstandsnetwerken	451
Analysemethoden	452
Responsies van eerste orde RL- en RC- netwerken	456
Responsies van tweede orde RLC-netwerken	459
Werkwijze oplossen DV's	459
Sinusvormige signalen	461
Wijzerdomein	462
Overdrachtfuncties	463
Bodediagrammen	463
Vermogen	470
Tweepoort	472
Elektronische basisschakelingen	474
Kleinsignaal vervangschema's	474
Bipolaire basisschakelingen	477
MOS basisschakelingen	478
BJT verschilpaar	479
MOS verschilpaar	480
Stroomspiegel	481
Elektronische functies	482
Opamp	482
Opamp in inverterende configuratie	483
Opamp in niet-inverterende configuratie	484
Ruis	485
De relaxatieoscillator	486
Harmonische oscillatoren	487

Netwerkanalyse

Begrippen

Elektrische **lading** wordt aangegeven met q of Q (of als functie van tijd: $q(t)$, $Q(t)$) met als eenheid de coulomb (C)¹.

Elektrische **stroom** wordt aangegeven met i of I (of als functie van tijd: $i(t)$, $I(t)$) met als eenheid de ampère (A)² en is de hoeveelheid lading die per eenheid van tijd langs een bepaald punt passeert:

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} \quad (7.1)$$

Elektrische **spanning** wordt aangegeven met v , V , u of U (of als functie van tijd: $v(t)$, $V(t)$, $u(t)$, $U(t)$) met als eenheid de volt (V)³ en is de arbeid verricht per eenheid van gescheiden lading.

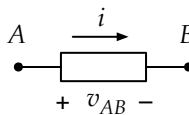
$$v(t) = \frac{dw(t)}{dq(t)} \quad (7.2)$$

Elektrisch **vermogen** wordt aangegeven met p of P (of als functie van tijd: $p(t)$, $P(t)$) met als eenheid de watt (W)⁴ en is de arbeid verricht per eenheid van tijd.

$$p(t) = \frac{dw(t)}{dt} = \frac{dw(t)}{dq(t)} \cdot \frac{dq(t)}{dt} = v(t) \cdot i(t) \quad (7.3)$$

Elementen

Elk netwerkelement als deze (**éénpoort**) heeft twee aansluitklemmen en kan niet (verder) worden verdeeld. Per afspraak (de **passief-teken conventie**) gaat de stroom i door het element in de richting van de spanningsval bij een positieve v . (Als $p(t) > 0$ dissipeert het element vermogen, als $p(t) < 0$ levert het element vermogen.)



¹naar Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806)

²naar André-Marie Ampère (1775-1836)

³naar Alessandro Volta (1745-1827)

⁴naar James Watt (1736-1819)

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

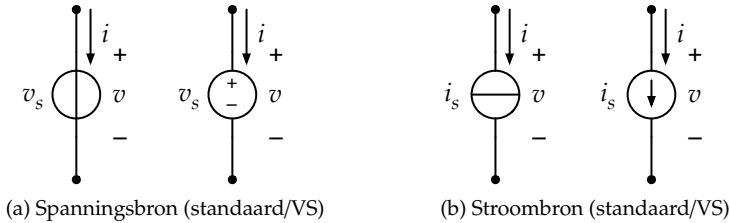
Meten

Signalen

Elektronica

Onafhankelijke bronnen

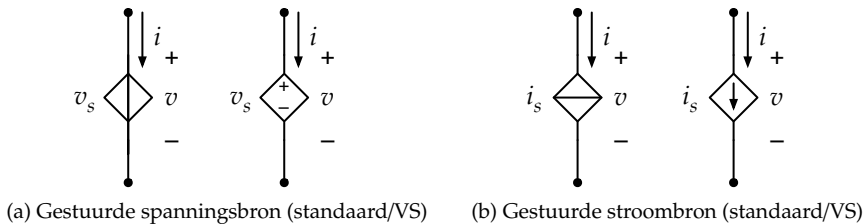
Een onafhankelijke spanningsbron heeft altijd een spanning v_s over de klemmen, eventueel $v_s(t)$ als de spanning varieert als functie van de tijd. Door een onafhankelijke stroombron loop altijd een stroom i_s , eventueel $i_s(t)$ als de stroom varieert als functie van de tijd.



Afhankelijke (gestuurde) bronnen

Gestuurde bronnen leveren een stroom of een spanning afhankelijk van een andere spanning of stroom.

Spanningsgestuurde spanningsbron:	$v_s = \mu v_x$
Stroomgestuurde spanningsbron:	$v_s = \rho i_x$
Spanningsgestuurde stroombron:	$i_s = \alpha v_x$
Stroomgestuurde stroombron:	$i_s = \beta i_x$



Algemeen

Weerstand

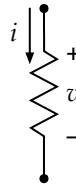
Model voor een lineaire weerstand (lineair en geheugenloos verband tussen spanning en stroom). De ‘echte’ component wordt ook weerstand genoemd.

Symbol: R

Dimensie: ohm (Ω)¹

Elementvergelijking:

$$v = Ri \tag{7.4}$$



Wiskunde

Serieschakeling: $R_{tot} = R_1 + R_2 + R_3 + \dots$ (7.5)

Parallelschakeling: (vereenvoudiging voor twee weerstanden)

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \tag{7.6}$$

Informatica

Fysica

Impedantie

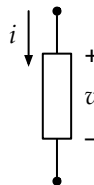
Dit is een gegeneraliseerde weerstand, waarbij de weerstandswaarde R (nu impedantie Z geheten), ook complex mag zijn. Voor serie- en parallelschakeling gelden dezelfde regels.

Symbol: Z

Dimensie: ohm (Ω)

Elementvergelijking:

$$v = Zi \tag{7.7}$$



Meten

Signalen

Verder zijn gedefinieerd de **weerstand** $R = \Re\{Z\}$ en de **reactantie** $X = \Im\{Z\}$ in ohms en de reciproken **admittantie** $Y = 1/Z$, **conductantie** $G = \Re\{1/Z\}$ en **susceptantie** $B = \Im\{1/Z\}$ in siemens².

¹naar Georg Simon Ohm (1789-1854)

²naar Ernst Werner von Siemens (1816-1892)

Elektronica

Inductie

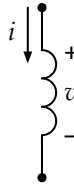
Model voor een **spoel**, een spanningsintegrator.

Symbol: L

Dimensie: henry (H)¹

Elementvergelijking:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \quad (7.8)$$



Serieschakeling: $L_v = L_1 + L_2 + L_3 + \dots$ (7.9)

Parallelschakeling (vereenvoudiging voor twee inducties):

$$\frac{1}{L_v} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2} \quad (7.10)$$

Capaciteit

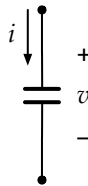
Model voor een **condensator**, een stroomintegrator.

Symbol: C

Dimensie: Farad (F)²

Elementvergelijking:

$$i(t) = C \frac{dv(t)}{dt} \quad (7.11)$$



Serieschakeling: (vereenvoudiging voor twee capaciteiten)

$$\frac{1}{C_v} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \dots = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2} \quad (7.12)$$

Parallelschakeling: $C_v = C_1 + C_2 + C_3 + \dots$ (7.13)

¹naar Joseph Henry (1797-1878)

²naar Michael Faraday (1791-1867)

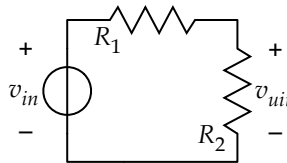
Wetten van Kirchhoff

De **stroomwet van Kirchhoff**¹ luidt: op elk tijdstip is de algebraïsche som van alle stromen die naar een knooppunt toevloeien gelijk aan de stromen die van een knooppunt afvloeien.

De **spanningswet van Kirchhoff** luidt: op elk tijdstip is de algebraïsche som van alle spanningen langs een gesloten pad (kringloop, circuit) in een netwerk gelijk aan nul.

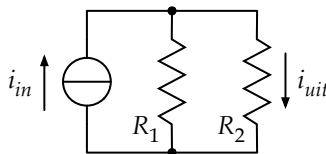
Weerstandsnetwerken

Voor een zelfstandige (onbelaste) **spanningsdeler** geldt:



$$v_{uit} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_{in} \quad (7.14)$$

Voor een zelfstandige (onbelaste) **stroomdeler** geldt:

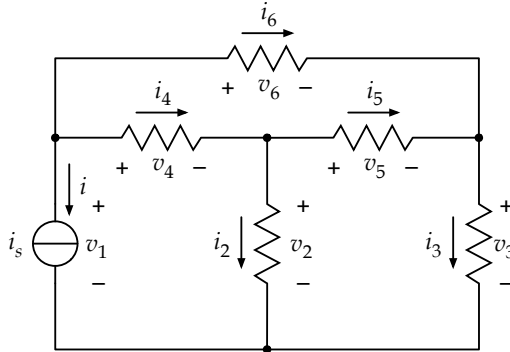


$$i_{uit} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_{in} \quad (7.15)$$

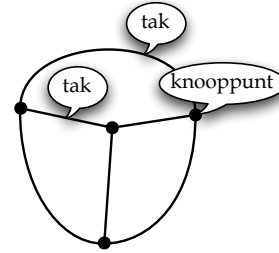
¹naar Gustav Robert Kirchhoff (1824-1887)

Analysemethoden

Begrippen



(a) Netwerk



(b) (Netwerk)graaf

knooppunt:

punt waar twee of meer elementen samen komen.

tak:

verbinding tussen twee knooppunten die geen ander knooppunt bevat.

pad:

rij aaneengesloten takken, waarbij elke tak slechts eenmaal doorlopen wordt.

gesloten pad:

pad waarbij begin- en eindpunt samenvallen.

essentieel knooppunt:

punt waar meer dan twee elementen samenkomen.

essentiële tak:

verbinding tussen twee essentiële knooppunten die geen andere essentiële knooppunten bevat.

Aantal structuurvergelijkingen

Voor een netwerk met n knooppunten is het aantal onafhankelijke **stroomwet-vergelijkingen** gelijk aan $n - 1$. Voor een netwerk met b takken en n knooppunten wordt het aantal onafhankelijke **spanningswet-vergelijkingen** gegeven door $b - (n - 1)$.

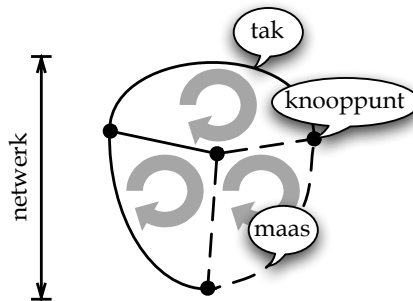
Knooppuntsanalyse

1. Opstellen van de stroomwet-vergelijkingen voor de knooppunten van het netwerk die geen referentieknooppunt zijn.
2. Vervangen van de takstromen door de takspanningen met behulp van de elementvergelijkingen.
3. Vervangen van de takspanningen door de knooppuntsspanningen.

Maasanalyse

Een **planair netwerk** kan in het platte vlak worden getekend zonder kruisende vlakken.

De **mazen** van een planair netwerk zijn alle gesloten paden die geen gesloten pad omsluiten.



1. Opstellen van de spanningswet-vergelijkingen voor de mazen van het netwerk.
2. Vervangen van de takspanningen door de takstromen met behulp van de elementvergelijkingen.
3. Vervangen van de takstromen door de maasstromen.

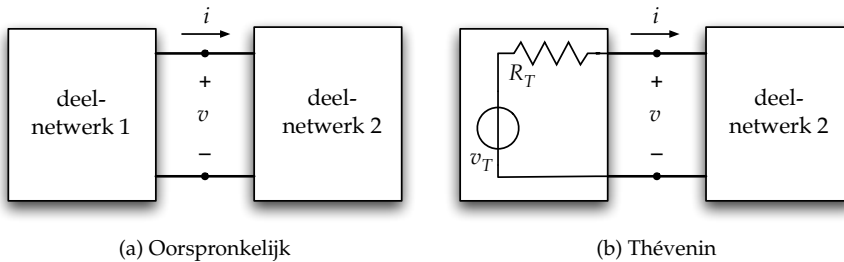
Superpositie

Het **superpositiebeginsel** luidt: de totale responsie is de som van de individuele responsies op de onafhankelijke bronnen.

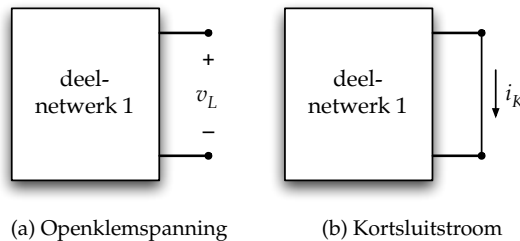
Bij de berekening van een individuele responsie op een onafhankelijke bron worden alle onafhankelijke spanningsbronnen vervangen door kortsluitingen en alle onafhankelijke stroombronnen door open verbindingen.

Theorema van Thévenin en Norton

Indien deelnetwerk 1 een weerstandsnetwerk is, dan is dit te modelleren met een spanningsbron en een weerstand, volgens het **theorema van Thévenin**¹. Dit model met bepaalde waarden voor de spanningsbron en serieweerstand wordt het **Thévenin-equivalent** genoemd.



Hiervoor moet de openklemspanning v_L (zonder belasting) berekend worden en de kortsluitstroom i_K (klemmen kortsluiten).



$$v_T = v_L \quad (7.16)$$

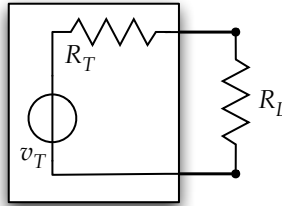
$$R_T = \frac{v_L}{i_K} \quad (7.17)$$

Het **theorema van Norton**² beschouwt ten opzichte van het theorema van Thévenin geen spanningsbron in serie met een weerstand, maar een stroombron parallel met een weerstand. De stroom van deze stroombron is de kortsluitstroom en de waarde van de weerstand is dezelfde als bij Thévenin.

¹Leon Charles Thévenin (1857-1926)

²Edward Lawry Norton (1898-1983)

Maximale vermogenoverdracht



De **vermogenoverdracht** tussen een bronchakeling (Norton of Thévenin) en een last is maximaal als de uitgangsweerstand van de bronchakeling en de (ingangs)weerstand van de last aan elkaar gelijk zijn:

$$R_T = R_L \quad (7.18)$$

$$p_{\max} = \frac{1}{4} \frac{V_T^2}{R_T} \quad (7.19)$$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

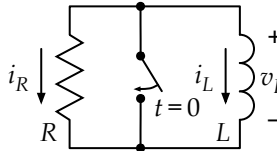
Elektronica

Responsies van eerste orde RL- en RC- netwerken

Begrippen

- excitatie:** stromen en spanningen van onafhankelijke bronnen.
- responsie:** stromen en spanningen van de overige netwerkelementen.
- eerste orde netwerk:** een eerste orde netwerk is een netwerk waarin naast bronnen en weerstanden slechts één spoel of condensator voorkomt.
- tweede orde netwerk:** een netwerk waarin naast bronnen en weerstanden een spoel en een condensator of twee spoelen of twee condensatoren voorkomen.
- natuurlijke responsie:** responsie waarbij geen bronnen actief (meer) zijn.
- responsie met excitatie:** responsie waarbij bronnen actief zijn.

Natuurlijke responsie 1e orde RL-netwerk



Beginwaarde: $i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+) = I_0$ (7.20)

Met Kirchhoff stroomwet:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = 0$$
 (7.21)

Oplossing homogene lineaire differentiaal vergelijking:

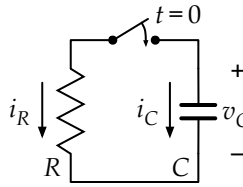
$$i_L(t) = \begin{cases} I_0, & t < 0 \\ I_0 e^{-\frac{R}{L}t}, & t \geq 0 \end{cases}$$
 (7.22)

Tijdconstante:

$$\tau = \frac{L}{R}$$
 (7.23)

Algemeen

Natuurlijke responsie 1e orde RC-netwerk



Wiskunde

Beginwaarde: $v_C(t = 0^-) = v_C(t = 0^+) = V_0$ (7.24)

Met Kirchhoff stroomwet:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$$
 (7.25)

Oplossing homogene lineaire differentiaal vergelijking:

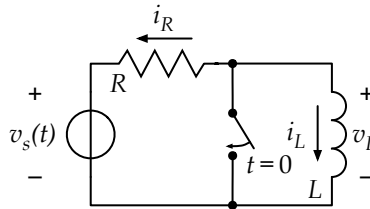
$$v_C(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ V_0 e^{-\frac{t}{RC}}, & t \geq 0 \end{cases}$$
 (7.26)

Informatica

Tijdconstante: $\tau = RC$ (7.27)

Fysica

Responsie met excitatie 1e orde RL-netwerk



Meten

Beginwaarde: $i_L(t = 0^-) = i_L(t = 0^+) = I_0$ (7.28)

Met Kirchhoff stroomwet:

$$\frac{di_L}{dt} + \frac{R}{L}i_L = \frac{v_s}{L}$$
 (7.29)

Oplossing inhomogene lineaire differentiaal vergelijking:

$$i_L(t) = \begin{cases} I_0, & t < 0 \\ (I_0 - I_s)e^{-\frac{R}{L}t} + I_s, & t \geq 0 \end{cases}$$
 (7.30)

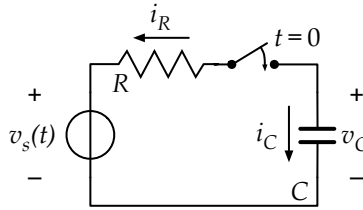
Signalen

Tijdconstante:

$$\tau = \frac{L}{R}$$
 (7.31)

Elektronica

Responsie met excitatie 1e orde RC-netwerk



Beginwaarde: $v_C(t = 0^-) = v_C(t = 0^+) = V_0$ (7.32)

Met Kirchhoff spanningswet:

$$\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{v_s}{RC}$$
 (7.33)

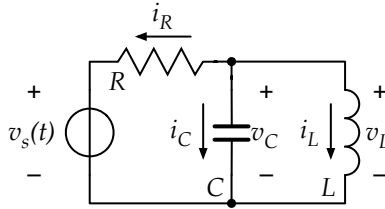
Oplossing inhomogeen lineaire differentiaal vergelijking:

$$v_C(t) = \begin{cases} V_0, & t < 0 \\ (V_0 - V_s)e^{-\frac{t}{RC}} + V_s, & t \geq 0 \end{cases}$$
 (7.34)

Tijdconstante: $\tau = RC$ (7.35)

Responsies van tweede orde RLC-netwerken

RLC-parallel



Beginwaarden:

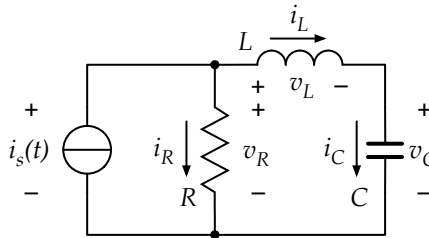
$$v_C(t = 0^-) = v_{C0} \quad (7.36)$$

$$i_L(t = 0^-) = i_{L0} \quad (7.37)$$

Met Kirchhoff stroomwet:

$$\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{di_L}{dt} + \frac{i_L}{LC} = \frac{v_s}{RLC} \quad (7.38)$$

RLC-serie



Beginwaarden:

$$v_C(t = 0^-) = v_{C0} \quad (7.39)$$

$$i_L(t = 0^-) = i_{L0} \quad (7.40)$$

Met Kirchhoff spanningswet:

$$\frac{d^2 v_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{LC} = \frac{i_s R}{LC} \quad (7.41)$$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Werkwijze oplossen DV's

In algemene vorm luidt een (tweede-orde) differentiaalvergelijking: (zie ook pagina 79)

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = x \quad (7.42)$$

Voor een oplossing zijn ook de beginwaarden nodig:

$$y(t = 0^+) = Y_0 \quad (7.43)$$

$$y'(t = 0^+) = Y'_0 \quad (7.44)$$

De totale oplossing is de som van de **homogene** en een **particuliere oplossing** (afhankelijk van hetingangssignaal x):

$$y = y_h + y_p \quad (7.45)$$

De homogene oplossing ($x = 0$) is:

$$s^2 A e^{st} + a_1 s A e^{st} + a_0 A e^{st} = 0 \quad (7.46)$$

$$y_h = A e^{st} \quad (7.47)$$

De zogenaamde **karacteristieke vergelijking** is:

$$s^2 + a_1 s + a_0 = 0 \quad (7.48)$$

$$s_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{a_1}{2}\right)^2 - a_0} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \quad (7.49)$$

$$\alpha^2 - \omega_0^2 \begin{cases} > 0, & -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} & \text{overgedempt} \\ = 0, & -\alpha & \text{kritisch gedempt} \\ < 0, & -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = \alpha \pm j\omega_d & \text{ondergedempt} \end{cases} \quad (7.50)$$

De oplossing voor een **overgedempt** systeem is:

$$y = K_1 e^{(-\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} + K_2 e^{(-\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2})t} + y_p \quad (7.51)$$

De oplossing voor een **kritisch gedempt** systeem is:

$$y = (K_1 t + K_2) e^{-\alpha t} + y_p \quad (7.52)$$

De oplossing voor een **ondergedempt** systeem is:

$$y = (A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)) e^{-\alpha t} + y_p \quad (7.53)$$

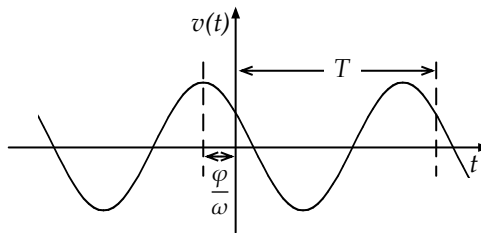
Sinusvormige signalen

Vorm van bronsignalen

We schrijven een signaal als functie van de tijd, **wisselspanning** als $v(t)$ en **wisselstroom** als $i(t)$. Een sinusvormig signaal wordt volledig beschreven door haar **amplitude** (V_m, I_m), **hoekfrequentie** (ω) en **fasedraaiing** (φ).

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.54)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.55)$$



De **frequentie**, hoekfrequentie en **periode** zijn als volgt gerelateerd.

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (7.56)$$

RMS-waarde

Een veelgebruikte maat voor het vermogen in een signaal is de **RMS**¹ waarde. In het algemeen (voor willekeurige signalen) geldt:

$$F_{\text{rms}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} f^2(t) dt} \quad (7.57)$$

(Waarbij $f(t)$ een spanning, stroom of momentaan vermogen is.) Voor sinusvormige signalen geldt:

$$F_{\text{rms}} = \frac{F_m}{\sqrt{2}} \quad (7.58)$$

¹Root Mean Square

Wijzerdomein

Een andere manier om sinusvormige signalen te beschrijven is met behulp van de **fasornotatie** in het **wijzerdomein**. Een **fasor** \tilde{V} is een complex getal dat de amplitude- en fase-informatie van een sinusvormig signaal bevat. Het product van de fasor en $e^{j\omega t}$ is een complex signaal; het reële deel hiervan wordt gebruikt om een (reëel) signaal te beschrijven. (Alles op basis van (7.61)).

$$\tilde{V} = V_m e^{j\varphi} \quad (7.59)$$

$$\Re \{ \tilde{V} e^{j\omega t} \} = \Re \{ V_m e^{j\varphi} e^{j\omega t} \} = V_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.60)$$

$$e^{\pm j\theta} = \cos \theta \pm j \sin \theta \quad (7.61)$$

Elementvergelijkingen

Door signalen in fasornotatie te gebruiken, is het oplossen van de DV's te vermijden. De responsie van een inductie op een harmonisch signaal is:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \rightarrow \tilde{V} e^{j\omega t} = L \frac{d}{dt} \tilde{I} e^{j\omega t} = j\omega L \tilde{I} e^{j\omega t} \rightarrow \frac{\tilde{V}}{\tilde{I}} = j\omega L = Z(j\omega) \quad (7.62)$$

De responsie van een netwerk op een harmonisch signaal is te berekenen door de **impedanties** van de elementen te gebruiken:

$$\text{Weerstand:} \quad Z(j\omega) = R \quad (7.63)$$

$$\text{Capaciteit:} \quad Z(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} \quad (7.64)$$

$$\text{Inductie:} \quad Z(j\omega) = j\omega L \quad (7.65)$$

Rekenregels

- Bronsignalen worden getransformeerd naar het wijzerdomein.
- Netwerkelementen worden in het wijzerdomein weergegeven als impedanties.
- Kirchhoff's stroom- en spanningswet gelden in het wijzerdomein.
- Regels voor serie- en parallelschakeling van weerstanden kunnen worden toegepast op complexe impedanties.
- Thévenin- en Nortonequivalenten voor bronnen met complexe impedanties.
- Knooppuntsanalyse of maasanalyse kunnen worden toegepast in het wijzerdomein.

Overdrachtfuncties

De **overdracht** van een netwerk is de verhouding tussen het uitgangssignaal en het ingangssignaal *na het uitsterven van inschakeleffecten* (de zgn. **steady-state response**). De **overdrachtsfunctie** of **frequentieresponsie** $H(j\omega)$ beschrijft meestal spanningsoverdracht (stroomoverdracht is ook mogelijk):

$$H(j\omega) = \frac{v_{uit}}{v_{in}} \quad (7.66)$$

Ook kan een dergelijke functie worden opgesteld met als ingangssignaal de stroom door een eenpoort en als uitgangssignaal de spanning erover: de **overdrachtsimpedantie**. Andersom wordt de **overdrachtsadmittantie** berekend.

De overdrachtsfunctie is een fasor, die beschrijft met welke factor de amplitude van het ingangssignaal wordt versterkt en hoeveel fasedraaiing van het ingangssignaal optreedt (de frequentie blijft onveranderd). Omdat de overdracht in het algemeen afhankelijk is van de frequentie van het ingangssignaal wordt de notatie $H(j\omega)$ gebruikt, in sommige literatuur $H(\omega)$.

Bij het beschrijven van de overdracht van een netwerk worden vaak de **modulus- (amplitude-) en fasekarakteristiek** als functie van de hoekfrequentie gegeven. De moduluskarakteristiek wordt gegeven door $|H(j\omega)|$ de fasekarakteristiek door $\arg(H(j\omega))$.

Bij filters wordt als **afsnijfrequentie** aangehouden dat $|H(j\omega_c)| = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Bodediagrammen

Een veelgebruikte manier om de overdracht van een systeem weer te geven is het **Bodediagram**¹. Dit zijn een plot van de moduluskarakteristiek en een plot van de fasekarakteristiek. Beide hebben de frequentie op een logaritmische schaal. De plot van de modulus heeft de (vermogens)overdracht in dB op een lineaire schaal (bij spanning en stroomoverdracht wordt een last van 1Ω aangenomen zodat de vermogensverhouding wordt gegeven door $H(j\omega)^2$).

Definitie van de **decibel**²: $A = 10\log_{10}\left(\frac{P_1}{P_2}\right)$ [dB] (7.67)

Overdracht in decibel: $A = 20\log_{10}|H(j\omega)|$ [dB] (7.68)

De afsnijfrequentie ligt nu bij een overdracht van **-3 dB**.

¹naar Hendrik Wade Bode (1905 - 1982)

²naar Alexander Graham Bell (1847-1922)

Moduluskarakteristiek

Met bodediagrammen is het mogelijk om snel op basis van een overdrachtsfunctie een schets van de overdracht te maken. Dit is gebaseerd op basis van de volgende twee regels:

- Vermenigvuldigen (delen) in het lineaire domein is optellen (aftrekken) in het logaritmische domein.
- Optellen (aftrekken) in het lineaire domein kan worden benaderd met het nemen van de hoogste (laagste) waarde in het logaritmische domein.

Teller en noemer van de overdrachtsfunctie zijn te factoriseren als reële 1ste en 2e graads polynomen, bijvoorbeeld:

$$H(j\omega) = K \frac{j\frac{\omega}{\omega_1} \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}{\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) \left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3} \frac{1}{Q} + \left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2\right)} \quad (7.69)$$

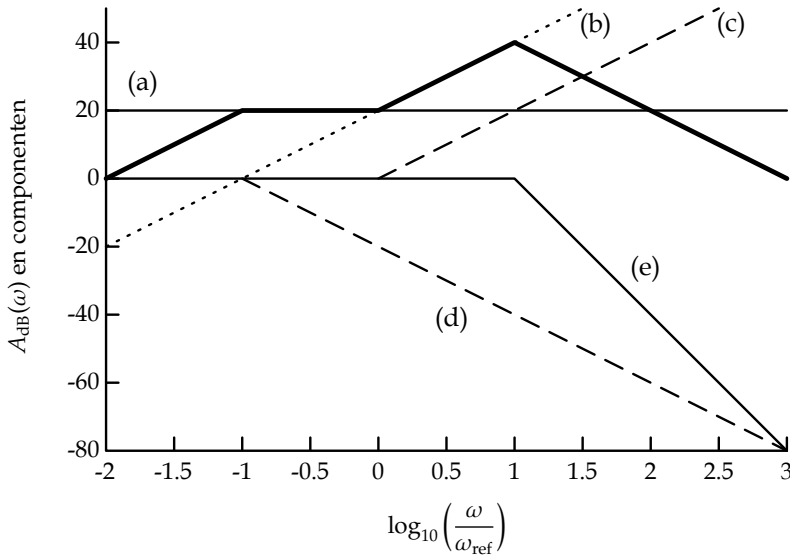
$$A_{dB} = 20\log_{10} |H(j\omega)| \quad (7.70)$$

$$A_{dB} = 20\log_{10} |K| + 20\log_{10} \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) + 20\log_{10} \left|1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right| - 20\log_{10} \left|1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right| - 20\log_{10} \left|1 + j\frac{\omega}{\omega_3} \frac{1}{Q} + \left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2\right| \quad (7.71)$$

(Waarbij de **kwaliteitsfactor** Q een maat voor resonantie/opslingering is. De **relatieve demping** ζ wordt gegeven door 1/2Q.)

Term	Benadering op dB-schaal
K	Horizontale lijn op 20 log ₁₀ (K) (evt. 0 dB).
$\frac{\omega}{\omega_0}$	Lijn met een helling van 20 dB/decade (6 dB/octaaf) die de 0 dB-lijn snijdt op ω ₀ .
$\left 1 + \frac{\omega}{\omega_0}\right $	Horizontale lijn tot ω ₀ , vanaf daar met een helling van 20 dB/decade (6 dB/octaaf).
$\left 1 + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right $	Horizontale lijn tot ω ₀ , vanaf daar met een helling van 40 dB/decade (12 dB/octaaf).

De totale moduluskarakteristiek wordt benaderd door de termen op te tellen:



Bij het benaderen van de overdrachtsimpedantie van een parallelschakeling dat de magnitude van de kleinste impedantie gevolgd moet worden, bij serieschakelingen die van de grootste.

Fasekarakteristiek

Teller en noemer van de overdrachtsfunctie zijn te factoriseren als reële 1ste en 2e graads polynomen, bijvoorbeeld (voor (7.69)):

$$\begin{aligned} \arg(H(j\omega)) &= \arg(K) + \arg\left(j\frac{\omega}{\omega_1}\right) + \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_2}\right) - \\ &\quad \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_1}\right) - \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_3}\frac{1}{Q} + \left(j\frac{\omega}{\omega_3}\right)^2\right) \end{aligned} \quad (7.72)$$

De totale fasekarakteristiek is dus de som van de (benaderde) termen.

Bij het benaderen van de overdrachtsimpedantie van een parallelschakeling geldt dat de fase van de impedantie met de kleinste magnitude (!) gevolgd dient te worden, bij een serieschakeling de impedantie met de grootste magnitude.

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

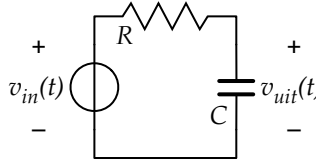
Meten

Signalen

Elektronica

1e orde laagdoorlaatfilter

Een eerste orde LDF¹ of LPF² ziet er zo uit:



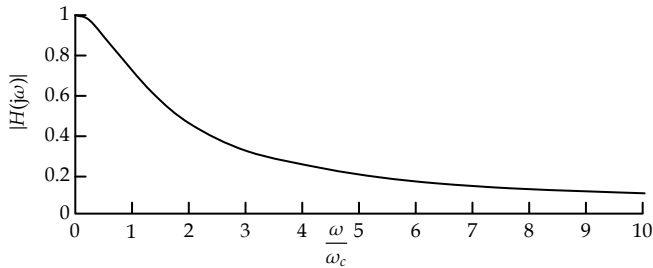
$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega R_1 C_2} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_c)} \quad (7.73)$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + j(\omega/\omega_c)^2}} \quad (7.74)$$

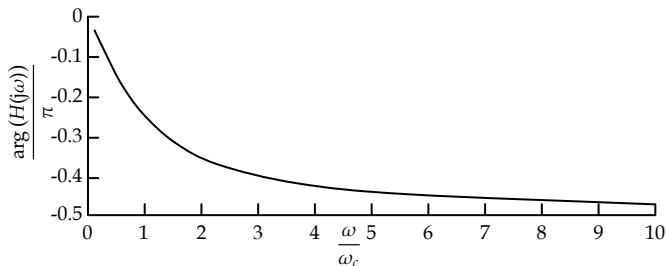
$$\arg(H(j\omega)) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \quad (7.75)$$

In grafiek (let op: lineaire schalen, lineaire overdracht):

Moduluskarakteristiek



Fasekarakteristiek

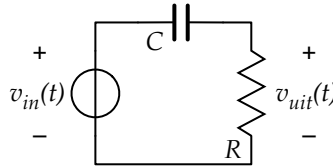


¹laagdoorlaatfilter

²Low Pass Filter

1e orde hoogdoorlaatfilter

Een eerste orde **HDF** (hoogdoorlaatfilter) of **HPF** (*high pass filter*) ziet er zo uit:

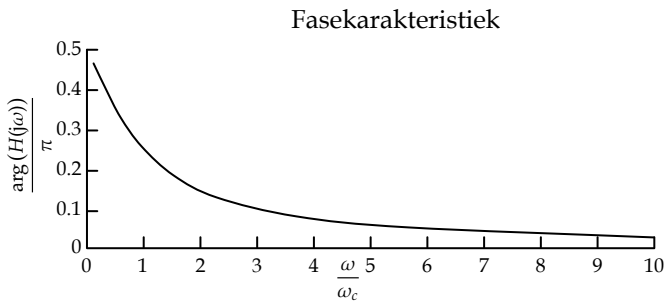
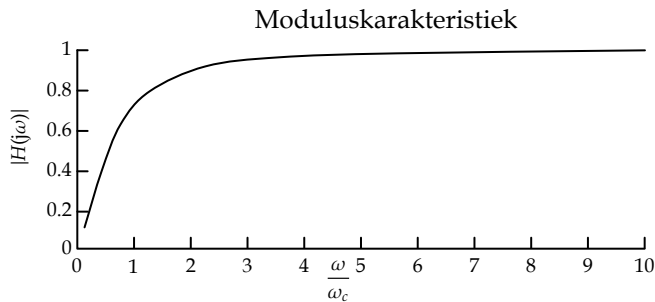


$$H(j\omega) = \frac{j\omega R_2 C_1}{1 + j\omega R_2 C_1} = \frac{j(\omega/\omega_c)}{1 + j(\omega/\omega_c)} \tag{7.76}$$

$$|H(j\omega)| = \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \tag{7.77}$$

$$\arg(H(j\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \tag{7.78}$$

In grafiek (let op: lineaire schalen, lineaire overdracht):



Algemeen

Wiskunde

Informatica

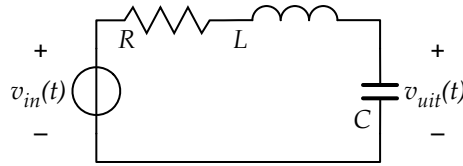
Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

2e orde laagdoorlaatfilter



$$H(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega RC + (j\omega)^2 LC} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_0)\frac{1}{Q} + \left(j\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \quad (7.79)$$

Resonantiefrequentie:

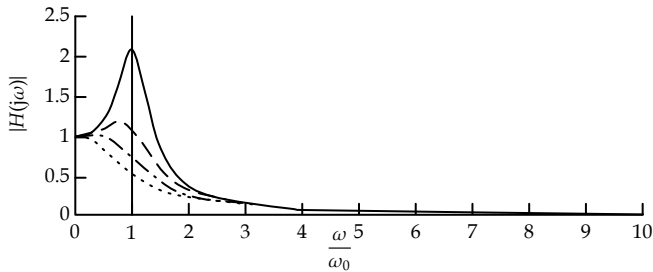
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.80)$$

Kwaliteitsfactor:

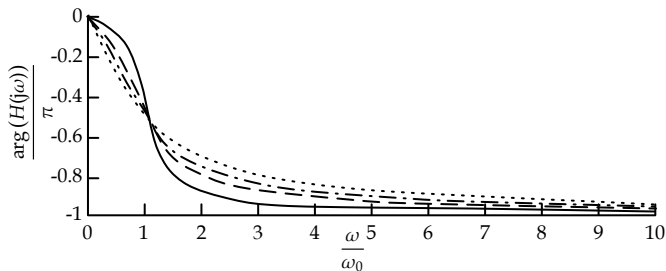
$$Q = \sqrt{\frac{L}{R} \frac{1}{LC}} \quad (7.81)$$

Voor verschillende waarden van Q (lineaire schalen, lineaire overdracht):

Moduluskarakteristiek

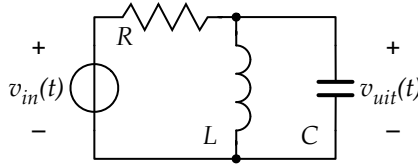


Fasekarakteristiek



2e orde banddoorlaatfilter

Een tweede orde **BDF** (banddoorlaatfilter) of **BPF** (*band pass filter*):



$$H(j\omega) = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R} + (j\omega)^2 LC} = \frac{1}{1 + j(\omega/\omega_0) \frac{1}{Q} + (j \frac{\omega}{\omega_0})^2} \quad (7.82)$$

Resonantiefrequentie:

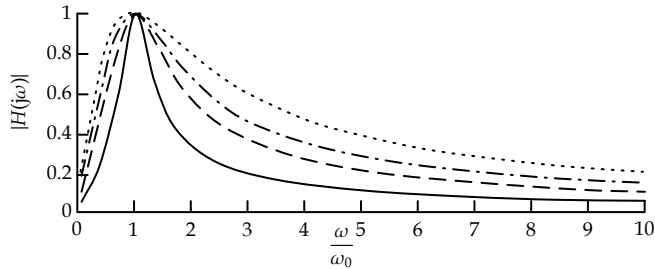
$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (7.83)$$

Kwaliteitsfactor:

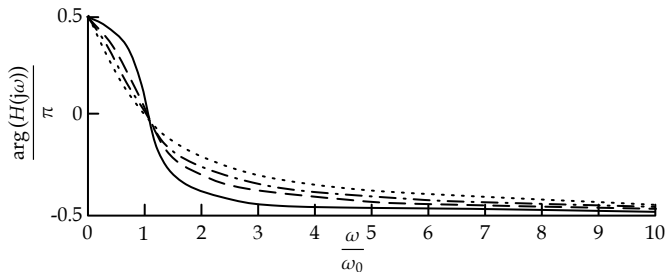
$$Q = \sqrt{RC \frac{R}{L}} \quad (7.84)$$

Voor verschillende waarden van Q (lineaire schalen, lineaire overdracht):

Moduluskarakteristiek



Fasekarakteristiek



Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

Elektronica

Vermogen

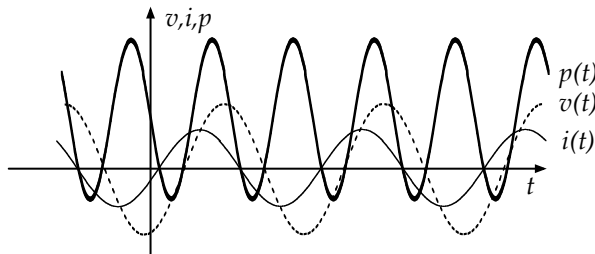
Mometaan vermogen

$p(t) = v(t)i(t)$ is het **momentaan** aan het netwerk geleverde vermogen:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \alpha) \quad (7.85)$$

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \beta) \quad (7.86)$$

$$\begin{aligned} p(t) &= V_m I_m \cos(\omega t + \alpha) \cos(\omega t + \beta) \\ &= V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(2\omega t + \alpha + \beta)) \end{aligned} \quad (7.87)$$



Energie en vermogen

Het tot tijdstip t aan een netwerk geleverde vermogen wordt gegeven door:

$$w(t) = \int_{-\infty}^t p(x) dx \quad (7.88)$$

Voor harmonische signalen (α en β als hierboven):

$$w(t) = w(0) + V_{\text{rms}} I_{\text{rms}} t \cos(\alpha - \beta) + \frac{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}}{2\omega} \sin(2\omega t + \alpha + \beta) - \frac{V_{\text{rms}} I_{\text{rms}}}{2\omega} \sin(\alpha + \beta) \quad (7.89)$$

Gemiddeld reëel vermogen

Het gemiddeld reëel vermogen wordt in het algemeen gegeven door:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t) dt \quad (7.90)$$

Voor harmonische signalen is het gemiddeld reëel vermogen:

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\alpha - \beta) = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\varphi) \quad (7.91)$$

De constante $\cos(\varphi)$ heet de **arbeidsfactor**.

Complex vermogen

Het momentane vermogen kan worden geschreven als (met (7.85) en (7.86)):

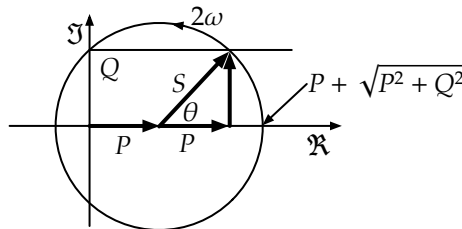
$$p(t) = P + P \cos(2\omega t) - Q \sin(2\omega t) \quad (7.92)$$

$$P = \frac{V_m I_m}{2} \cos(\alpha - \beta) \quad (7.93)$$

$$Q = \frac{V_m I_m}{2} \sin(\alpha - \beta) \quad (7.94)$$

Met de fasors $\tilde{V} = V_m e^{j\alpha}$ en $\tilde{I} = I_m e^{j\beta}$ kunnen de volgende vermogens worden berekend:

$S \equiv \frac{1}{2} \tilde{V} \tilde{I}^* = P + jQ$	complex vermogen	VA (volt ampère)
$P = \Re \{S\}$	reëel (actief) vermogen	W (watt)
$Q = \Im \{S\}$	blind (reactief) vermogen	VAR (volt ampère reactief)
$ S = \sqrt{P^2 + Q^2}$	schijnbaar vermogen	VA (volt ampère)



Vermogens van puur resistieve, capacitieve en inductieve netwerken:

Z	P	Q
R	$\frac{ I ^2 R}{2}$	0
$\frac{1}{j\omega C}$	0	$-\frac{ I ^2}{2\omega C}$
$j\omega L$	0	$\frac{ I ^2 \omega L}{2}$

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

Signalen

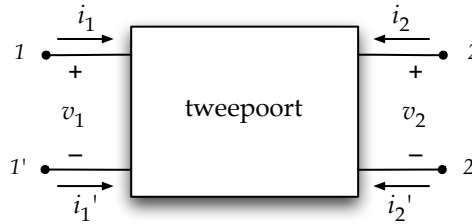
Elektronica

Tweepoort

Definitie

Een **tweepoort** is een netwerk met twee paren klemmen, waarvoor geldt:

$$i_1 + i_1' = 0 \quad i_2 + i_2' = 0 \quad (7.95)$$



Een tweepoort bevat geen onafhankelijke bronnen.

Analyse

Het externe gedrag van een tweepoort kan volledig d.m.v. de poortspanningen v_1 en v_2 en de poortstromen i_1 en i_2 beschreven worden.

Tweepoortanalyse is de berekening van twee van de poortvariabelen als de andere twee gegeven zijn.

Berekening impedantiematrix

Het gedrag van een dergelijke tweepoort wordt beschreven door een **Z-matrix**:

$$\vec{v} = \mathbf{Z}\vec{i} \quad (7.96)$$

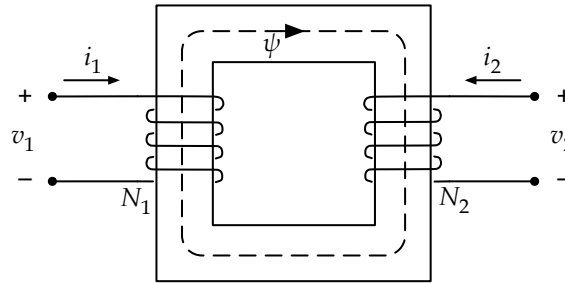
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} \\ z_{21} & z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} \quad (7.97)$$

$$z_{11} = \left. \frac{v_1}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad z_{22} = \left. \frac{v_2}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad z_{12} = \left. \frac{v_1}{i_2} \right|_{i_1=0} \quad z_{21} = \left. \frac{v_2}{i_1} \right|_{i_2=0} \quad (7.98)$$

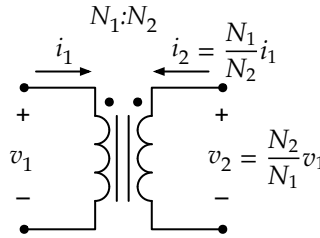
Bij elke impedantiematrix hoort een **admittantie-matrix** $\mathbf{Y} = \mathbf{Z}^{-1}$.

Ideale transformator

Een veelvoorkomende tweepoort is de **transformator**, in schema's voorgesteld als twee **gekoppelde spoelen**. De ideale transformator is **vermogenscontinu**, dat wil zeggen: de som van de vermogens die de transformator ingaan is nul.



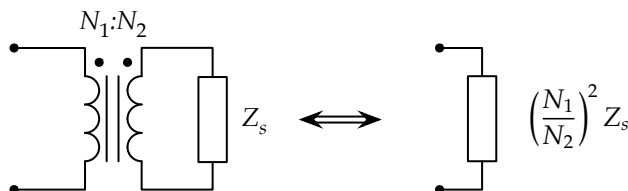
(a) Transformator



(b) Gekoppelde spoelen

Uit bovenstaande is eenvoudig af te leiden dat de impedantie Z_p gezien vanaf de primaire kant wordt gegeven door (waarbij Z_s de impedantie aangesloten aan de secundaire zijde is):

$$Z_p = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 Z_s \tag{7.99}$$



Deze toepassing wordt **impedantiemtransformator** genoemd.

Algemeen

Wiskunde

Informatica

Fysica

Meten

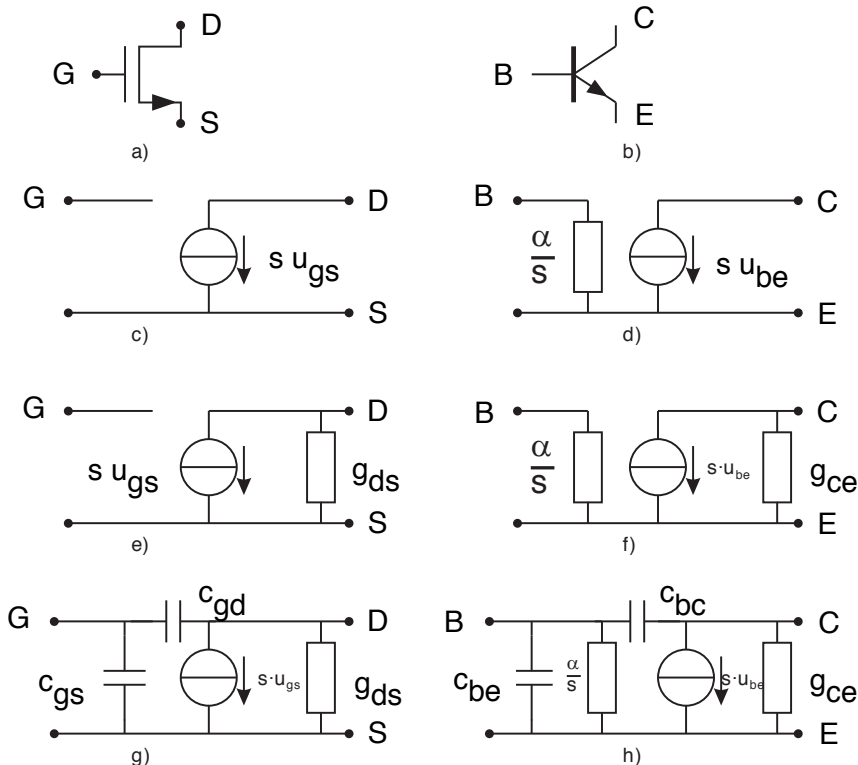
Signalen

Elektronica

Elektronische basisschakelingen

Kleinsignaal vervangschema's

In berekeningen en simulaties van elektronische schakelingen wordt altijd met modellen gewerkt. Hierbij is het van belang een goede balans te vinden tussen modelcomplexiteit en de rekenduur, tussen nauwkeurigheid en tijdsinvestering dus. Grootsignaalmodellen van transistoren zijn niet-lineair en dus vaak moeilijk door te rekenen; als een transistor rondom een instelpunt gebruikt wordt gebruiken we dan bij voorkeur een lineair model: het **kleinsignaalvervangschema**. In figuur 7.1ceg staat het kleinsignaalvervangschema van een MOS transistor; in figuur 7.1dfh die van een bipolaire junctie transistor.



Figuur 7.1: Kleinsignaalvervangschema's van een MOS transistor en BJT

De complexiteit en de nauwkeurigheid is oplopend van boven naar beneden. De diverse modelparameters en relaties van de eenvoudige modellen staan hieronder. (Notatie: i_d is kleinsignaal, i_D is grootsignaal/instelling, I_D is een voorfactor.)

MOS transistor

$$i_D = \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{L} \mu C_{ox} \cdot (v_{GS} - V_T)^2 \quad (\text{sterke inversie, saturatie}) \quad (7.100)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{W}{L} \mu C_{ox} \cdot (v_{GS} - V_T)^2 \cdot (1 + \lambda \cdot v_{DS}) \quad (\text{met uitg. weerst.})(7.101)$$

$$= \frac{W}{L} \mu C_{ox} \cdot \left((v_{GS} - V_T)v_{DS} - \frac{v_{DS}^2}{2} \right) \quad (\text{sterke inv., lin. gebied})(7.102)$$

$$= \frac{W}{L} \cdot I_{D0} \cdot e^{\frac{q(v_{GS}-V_T)}{nkT}} \cdot \left(1 - e^{-\frac{q \cdot v_{DS}}{kT}} \right) \quad (\text{zwakke inversie}) \quad (7.103)$$

$$K = \frac{W}{L} \mu C_{ox} \quad (7.104)$$

$$i_G = 0 \quad (7.105)$$

$$i_g = \frac{v_{gs}}{j\omega C_{gs}} + \frac{v_{gd}}{j\omega C_{gd}} \quad (7.106)$$

met (versimpeld): (v_{SB} (*source-bulk*) is vaak 0, opgenomen voor het alg. geval)

$$C_{gs} = \frac{1}{2} C_{ox} \quad (\text{sterke inversie, saturatie}) \quad (7.107)$$

$$= \frac{2}{3} C_{ox} \quad (\text{sterke inversie, lineair gebied}) \quad (7.108)$$

$$C_{gd} = \frac{1}{2} C_{ox} \quad (\text{sterke inversie, saturatie}) \quad (7.109)$$

$$= 0 \quad (\text{sterke inversie, lineair gebied}) \quad (7.110)$$

$$V_T = V_{T0} + K \cdot \left(\sqrt{2\phi_B + v_{SB}} - \sqrt{2\phi_B} \right) \quad (7.111)$$

$$s = \frac{\partial i_D}{\partial v_{GS}} \quad (7.112)$$

$$= \frac{2 \cdot i_D}{v_{GS} - V_T} = \sqrt{2K \cdot i_D} = K \cdot (v_{GS} - V_T) \quad (\text{sterke inv., sat.})(7.113)$$

$$= K \cdot v_{DS} \quad (\text{sterke inversie, lineair gebied}) \quad (7.114)$$

$$= \frac{q}{nkT} i_D \quad (\text{zwakke inversie}) \quad (7.115)$$

Bipolaire junctie transistor(V_A is de Early-spanning)

$$i_C = I_{C0} \cdot e^{\frac{q \cdot v_{BE}}{kT}} \quad (\text{forward active}) \quad (7.116)$$

$$= I_{C0} \cdot e^{\frac{q \cdot v_{BE}}{kT}} \cdot \left(1 + \frac{v_{CE}}{V_A}\right) \quad (\text{idem, incl. uitgangsweerst.}) \quad (7.117)$$

$$= I_{C0} \cdot e^{\frac{q \cdot v_{BE}}{kT}} \cdot \left(1 - e^{\frac{q \cdot v_{CE}}{kT}}\right) \quad (\text{saturatie}) \quad (7.118)$$

$$i_B = \frac{i_C}{\alpha} \quad (\alpha \text{ is de stroomversterking}) \quad (7.119)$$

met: (versimpeld)

$$C_{be} = \frac{q}{kT} \cdot i_D \cdot \tau \quad \text{diffusiecapaciteit} \quad (7.120)$$

$$C_{bc} = \frac{C_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{BC}}{\phi_0}}} \quad \text{junctiecapaciteit} \quad (7.121)$$

$$s = \frac{\partial i_C}{\partial v_{BE}} = \frac{q}{kT} i_C \quad (7.122)$$

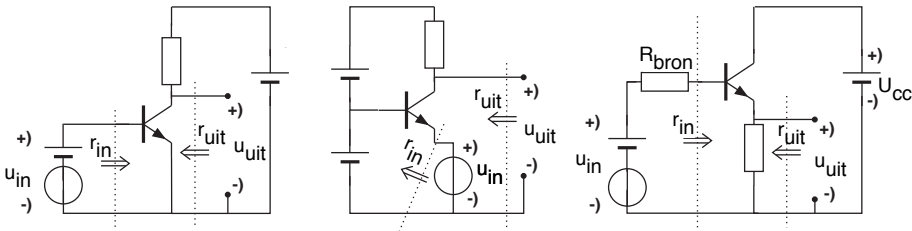
Bipolaire basisschakelingen

Een bipolaire junctie transistor (BJT) is een *device* met 3 aansluitingen. Omdat een ingangssignaal en een uitgangssignaal tussen 2 klemmen zit, zijn er 3 configuraties te realiseren met één BJT. Hieronder worden de NPN versies kort besproken; de PNP versies zijn volledig complementair. De configuraties worden doorgaans genoemd naar de gemeenschappelijke klem (kleinsignaal gezien) in het ingangscircuit en het uitgangscircuit. Er is dus een:

- gemeenschappelijke emitterschakeling, **GES**
- gemeenschappelijke basisschakeling, **GBS** (cascode)
- gemeenschappelijke collectorschakeling, **GCS** (emittervolger)

welke zijn weergegeven in figuur 7.2a-c. De diverse kleinsignaleigenschappen van deze 3 schakelingen staan opgesomd in onderstaande tabel, uitgaande van een simpel kleinsignaal model van de BJT. De **steilheid** van de BJT, s , volgt uit de **grootsignaalinstelling** en bedraagt (bij kamertemperatuur):

$$s = g_m = \frac{\partial i_C}{\partial u_{BE}} = \frac{q}{kT} \cdot i_C (\approx 40 \cdot i_C) \quad (7.123)$$



Figuur 7.2: De GES, GBS en GCS uitgevoerd met een NPN.

configuratie	A_v	r_{in}	r_{uit}
GES	$-s \cdot R_c$	$\frac{\alpha_{fe}}{s}$	R_c
GBS	$s \cdot R_c$	$\frac{\alpha_{fe}}{s} // \frac{1}{s} \approx \frac{1}{s}$	R_c
GCS	$\frac{s \cdot R_e}{1 + s \cdot R_e} \approx 1$	$\frac{\alpha_{fe}}{s} + (\alpha_{fe} + 1) \cdot R_e$	$\frac{\alpha_{fe}}{s} + r_{bron}$ $\alpha + 1$

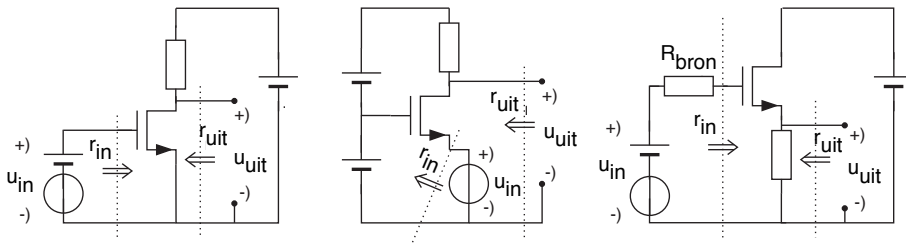
MOS basisschakelingen

Een MOS transistor is een *device* met 4 aansluitingen, waarvan we doorgaans 3 echt gebruiken. Omdat een ingangssignaal en een uitgangssignaal tussen 2 klemmen zit, zijn er 3 configuraties te realiseren met één MOS transistor. Hieronder worden de NMOS transistor versies kort besproken; de PMOS transistor versies zijn volledig complementair. De configuraties worden doorgaans genoemd naar de gemeenschappelijke klem (kleinsignaal gezien) in het ingangscircuit en het uitgangscircuit. Er is dus een:

- gemeenschappelijke sourceschakeling, **GSS**
- gemeenschappelijke gateschakeling, **GGG** (cascode)
- gemeenschappelijke drainschakeling, **GDS** (sourcevolger)

weergegeven in figuur 7.3a-c. De diverse kleinsignaleigenschappen van deze 3 schakelingen staan opgesomd in onderstaande tabel, uitgaande van een simpel kleinsignaal model van de MOS transistor. De steilheid van de MOS transistor, s , volgt uit de grootsignaalinstelling en is in saturatie en sterke inversie:

$$s = \frac{2i_D}{v_{GS} - V_T} = \sqrt{2Ki_D} = K(v_{GS} - V_T) \quad (7.124)$$

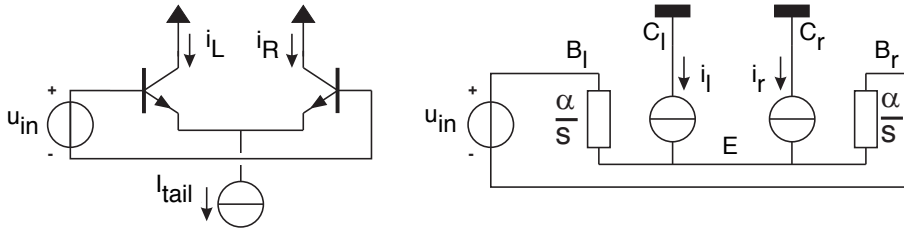


Figuur 7.3: De GSS, GGS en GDS uitgevoerd met een NMOS transistor.

configuratie	A_v	r_{in}	r_{uit}
GSS	$-s \cdot R_d$	∞	R_d
GGG	$s \cdot R_d$	$\frac{1}{s} \approx \frac{1}{s}$	R_d
GDS	$\frac{s \cdot R_s}{1 + s \cdot R_s} \approx 1$	∞	$\frac{1}{s}$

BJT verschilpaar

Een **verschilpaar** is een schakeling die gebruikt wordt om (kleine) spanningsverschillen goed gedefinieerd om te zetten in doorgaans een verschilstroom. Het schema van een verschilpaar met NPN transistoren staat hieronder.



Figuur 7.4: Een BJT verschilpaar (hier NPN) en zijn kleinsignaalvervangschema.

De hierbij behorende (vereenvoudigde) grootsignaal zaken zijn:

$$i_L = I_{TAIL} \cdot \frac{1}{1 + e^{\frac{q \cdot u_{IN}}{kT}}} \quad (7.125)$$

$$i_R = I_{TAIL} \cdot \frac{e^{\frac{q \cdot u_{IN}}{kT}}}{1 + e^{\frac{q \cdot u_{IN}}{kT}}} \quad (7.126)$$

$$i_L - i_R = I_{TAIL} \cdot \frac{1 - e^{\frac{q \cdot u_{IN}}{kT}}}{1 + e^{\frac{q \cdot u_{IN}}{kT}}} \quad (7.127)$$

$$= I_{TAIL} \cdot \tanh\left(\frac{q \cdot u_{IN}}{2kT}\right) \quad (7.128)$$

$$i_{B,L} = \frac{i_L}{\alpha} \quad \text{en} \quad i_{B,R} = \frac{i_R}{\alpha} \quad (7.129)$$

Diverse kleinsignaal eigenschappen zijn:

$$i_l = \frac{1}{2} s_{BJT} \cdot u_{in} = -i_r \quad (7.130)$$

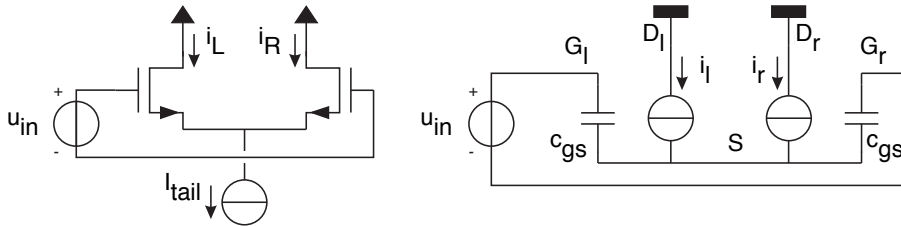
$$i_l - i_r = s_{BJT} \cdot u_{in} \quad (7.131)$$

$$r_{in} = 2 \frac{\alpha}{s_{BJT}} \quad (7.132)$$

$$s_{BJT} = \frac{1}{2} I_{TAIL} \cdot \frac{kT}{q} \quad (7.133)$$

MOS verschilpaar

Een verschilpaar is een schakeling die gebruikt wordt om (kleine) spanningsverschillen goed gedefinieerd om te zetten in doorgaans een verschilstroom. Het schema van een verschilpaar met NMOS transistoren staat hieronder.



Figuur 7.5: Een MOS verschilpaar (hier NMOS) en zijn kleinsignaalvervangschema.

De hierbij behorende (vereenvoudigde) grootsignaal zaken zijn:

$$i_L = \frac{I_{TAIL}}{2} \cdot \left(1 + \frac{K}{2} u_{IN} \sqrt{\frac{4I_{TAIL}}{K} - u_{IN}^2} \right) \quad (7.134)$$

$$i_R = \frac{I_{TAIL}}{2} \cdot \left(1 - \frac{K}{2} u_{IN} \sqrt{\frac{4I_{TAIL}}{K} - u_{IN}^2} \right) \quad (7.135)$$

$$i_L - i_R = \frac{I_{TAIL}}{2} \cdot K u_{IN} \sqrt{\frac{4I_{TAIL}}{K} - u_{IN}^2} \quad (7.136)$$

Vereenvoudigd zijn de diverse kleinsignaleigenschappen:

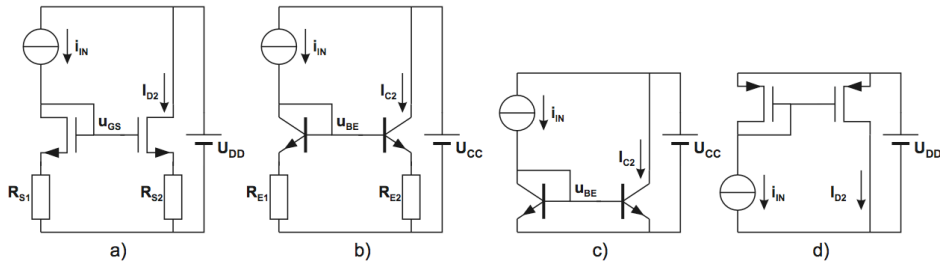
$$i_l = \frac{1}{2} s_{MOST} \cdot u_{in} = -i_r \quad (7.137)$$

$$i_l - i_r = s_{MOST} \cdot u_{in} \quad (7.138)$$

$$z_{in} = \frac{2}{c_{gs}} \quad (7.139)$$

Stroomspiegel

Een **stroomspiegel** wordt vaak gebruikt om stromen van elkaar af te trekken, om stroomrichtingen om te draaien of om stromen te dupliceren. Hieronder staan een paar stroomspiegels weergegeven.



Figuur 7.6: Enige stroomspiegels

De analyse hiervan is altijd eenvoudig te doen door de symmetrie op te zoeken, en die vervolgens als uitgangspunt te nemen. Op deze manier is een (transistor+degeneratieweerstand) gewoon een element met een $v - i$ overdracht. Uitgaande van gelijke transistoren en weerstanden in een stroomspiegel volgt dan een laagfrequent overdracht van (vereenvoudigd):

$$i_{uit} = i_{in} \quad (\text{MOS}) \quad (7.140)$$

$$i_{UIT} = i_{IN} \quad (\text{MOS}) \quad (7.141)$$

$$i_{uit} = i_{in} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 2} \quad (\text{BJT}) \quad (7.142)$$

$$i_{UIT} = i_{IN} \cdot \frac{\alpha}{\alpha + 2} \quad (\text{BJT}) \quad (7.143)$$

Voor hoogfrequente overdrachten moeten de diverse capaciteiten meegenomen worden, met name C_{gs} , C_{gd} , C_{be} en C_{bc} , wat meteen resulteert in harmonische vervorming. Zowel ter verkleining van deze vervorming als voor het verminderen van de invloed van basisstromen worden soms meer complexe stroomspiegels gebruikt.

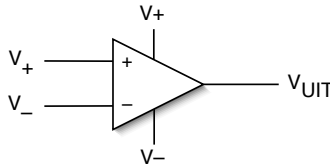
Elektronische functies

Opamp

Een **opamp** (*operational amplifier*, operationele versterker) is een versterker die een verschilspanning versterkt met, in het ideale geval, een erg grote versterkingsfactor A en een hoge ingangsweerstand en een kleine uitgangsweerstand. Er geldt:

$$v_{UIT} = A(v_+ - v_-) \quad (7.144)$$

Tenzij anders vermeld, wordt hierna voor de eenvoud $A \rightarrow \infty$ aangenomen. Bij lineaire toepassingen van de opamp is de uitgangsspanning eindig, waarmee de verschilingangsspanning 0 is.



In het algemeen kan het gedrag van een schakeling met een opamp worden berekend door vergelijking 7.144 in te vullen, waarna vaak **scheiding van variabelen** moet plaatsvinden. Bijvoorbeeld:

$$\begin{aligned} v_{UIT} &= A(v_+ - v_-) = A(v_g - \beta v_{UIT}) \\ &= Av_g - A\beta v_{UIT} \\ v_{UIT} + A\beta v_{UIT} &= Av_g \\ v_{UIT}(1 + A\beta) &= Av_g \\ v_{UIT} &= \frac{Av_g}{1 + A\beta} \\ H &= \frac{v_{UIT}}{v_g} = \frac{A}{1 + A\beta} \end{aligned} \quad (7.145)$$

Deze uitdrukking is 'altijd' waar, om een indruk te krijgen van het gedrag kan de limiet van over A worden genomen:

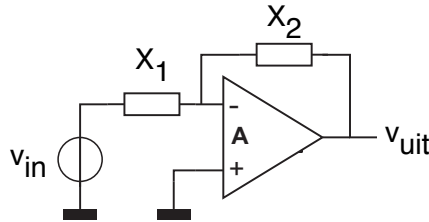
$$H \approx \lim_{A \rightarrow \infty} \frac{A}{1 + A\beta} = \frac{A}{A\beta} = \frac{1}{\beta} \quad (7.146)$$

Opamp in inverterende configuratie

Vanwege deze ingangsspanning gelijk aan 0 V geldt in onderstaande ideale schakeling

$$v_{UIT} = -v_{X2}(i_{X1}(v_{IN})) \quad (7.147)$$

In deze relatie is $i_{X1}(v)$ de stroom in X_1 ten gevolge van een spanning v over dit element. Op dezelfde manier is $v_{X2}(i)$ de spanning over X_2 als er een stroom i doorheen loopt. In onderstaande tabel staan de overdrachten bij verschillende componenten X_1 en X_2 .

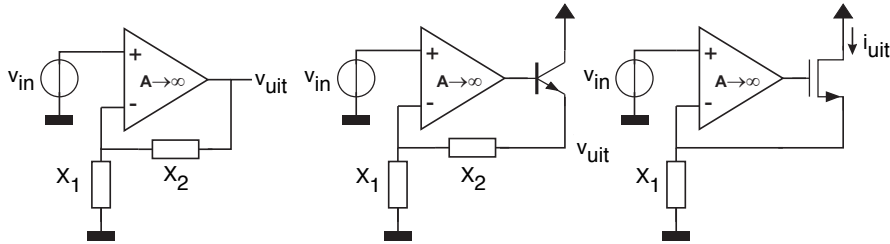


Figuur 7.7: Een ideale opamp in inverterende configuratie.

X_1	X_2	overdracht
weerstand R_1	weerstand R_2	$v_{UIT} = -v_{IN} \cdot R_2/R_1$ $H(j\omega) = -R_2/R_1$
condensator C_1	weerstand R_2	$v_{UIT} = -C_1 R_2 \cdot \partial v_{IN} / \partial t$ $H(j\omega) = -j\omega C_1 R_2$
weerstand R_1	condensator C_2	$v_{UIT} = v_{UIT0} - (1/R_1 C_2) \cdot \int v_{IN}(t) dt$ $H(j\omega) = -1/j\omega R_1 C_2$
condensator C_1	condensator C_2	$v_{UIT} = v_{UIT0} - v_{IN} \cdot C_1 / C_2$ $H(j\omega) = -C_1 / C_2$
spoel L_1	weerstand R_2	$v_{UIT} = v_{UIT0} - (R_2/L_1) \cdot \int v_{IN}(t) dt$ $H(j\omega) = -R_2/j\omega L_1$
weerstand R_1	spoel L_2	$v_{UIT} = -(L_2/R_1) \cdot \partial v_{IN} / \partial t$ $H(j\omega) = -j\omega L_2/R_1$
weerstand R_1	diode D_2	$v_{UIT} = -\frac{kT}{q} \cdot \ln\left(\frac{v_{IN}}{I_S \cdot R_1}\right)$
diode D_1	weerstand R_2	$v_{UIT} = -R_2 \cdot I_S \cdot e^{\frac{q \cdot v_{IN}}{kT}}$

Opamp in niet-inverterende configuratie

Opamps kunnen gebruikt worden in niet-inverterende (stabele) configuraties; een eigenschap hiervan is dat de ingangsimpedantie doorgaans zeer hoog is.



Figuur 7.8: a) Een ideale opamp in niet-inverterende configuratie, b) idem met een hoger uitgangsvermogen, c) idem, met een stroomuitgang

Vanwege deze (idealiter) ingangsspanning gelijk aan 0 V geldt in bovenstaande schakeling met lineaire X_1 en X_2 :

$$v_{UIT} = \frac{X_1 + X_2}{X_1} v_{IN} \quad (7.148)$$

Voor een paar componenten voor X_1 en X_2 krijgen we dan (zolang de schakeling stabiel is):

X_1	X_2	overdracht
weerstand R_1	weerstand R_2	$H(j\omega) = \frac{R_1 + R_2}{R_1}$
condensator C_1	weerstand R_2	$H(j\omega) = 1 + j\omega C_1 R_2$
weerstand R_1	condensator C_2	$H(j\omega) = 1 + \frac{1}{j\omega R_1 C_2}$

Deze schakeling wordt vaak gebruikt als (versterkende) **spanningsbuffer**. Om grotere vermogens te kunnen leveren kan een vermogenstrap (bijvoorbeeld een simpele emittervolger) geplaatst worden tussen de opamp-uitgang en de uitgang van de hele schakeling. Als bijvoorbeeld een uitgangsstroom gewenst is kan de collector- of drainstroom van een transistor die in plaats van X_2 staat gebruikt worden.

Het is eenvoudig in te zien dat met de weerstanden $R_1 = \infty$ en $R_2 = 0$ de overdracht 1 wordt. Deze **spanningsvolger** is eenvoudig te realiseren door de uitgang van de opamp aan de negatieve ingang te hangen, dit kan nuttig zijn om uitgangen te bufferen (één-op-één).

Ruis

Ieder component dat energie dissipeert genereert **ruis**: weerstanden zowel als actieve componenten. Ideale reactieve componenten zoals spoelen en condensatoren genereren géén ruis. Het ruisvermogen hangt af van de componentwaarde, de bandbreedte en bij niet-lineaire componenten van de DC-instelling. Voor een aantal componenten hebben we:

component	ruisvermogen $\overline{i_n^2}$	
weerstand	$4kT/R$	
condensator/spoel	0	
diode	$2q \cdot I_D$	
BJT	$2q \cdot I_C$ $2q \cdot I_B + 4kT/R_{bb'}$	(collectorruis) (basisruis)
MOST	$4kT \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{I_D}{V_{GS} - V_T} = 4kT \cdot \frac{2}{3} \cdot g_m$ $4kT \cdot \frac{I_D}{V_{DS}} = 4kT \cdot g_{ds}$ $2q \cdot I_D$	(sterke inversie, sat.) (sterke inversie, lin.) (zwakke inversie)

Van ongecorreleerde ruisbijdragen dienen de vermogens (of v_n^2 of i_n^2) gesommeerd te worden; bij gecorreleerde ruisbijdragen moet de momentane waarde (v_n of i_n) gesommeerd worden.

Om **ruisdichtheid** om te rekenen in effectieve ruis hebben we:

$$i_{n,\text{eff}} = \sqrt{\overline{i_n^2} \cdot BW_n} \quad (7.149)$$

Voor de ruisbandbreedte geldt:

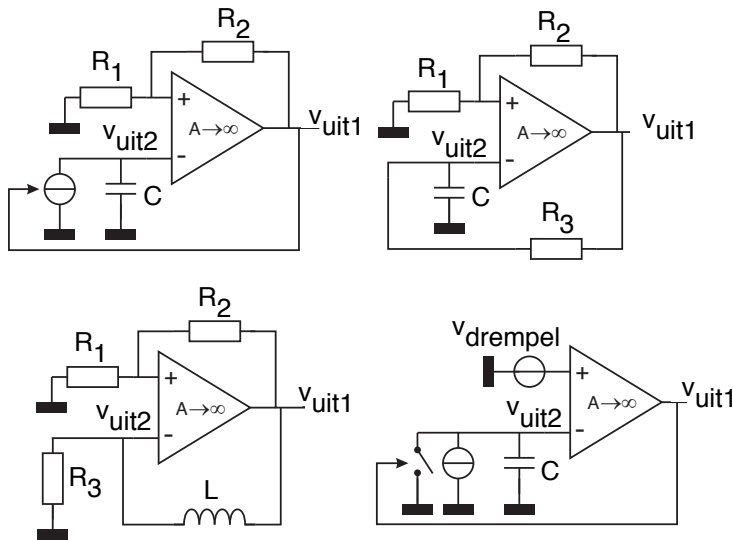
scherpe begrenzing tussen $[f_{\min}, f_{\max}]$	$BW_n = f_{\max} - f_{\min}$
1 ^e orde afval vanaf f_{-3dB}	$BW_n = \frac{\pi}{2} \cdot f_{-3dB}$
nette 2 ^e orde afval vanaf f_{-3dB}	$BW_n \approx 1,11 \cdot f_{-3dB}$
nette 3 ^e orde afval vanaf f_{-3dB}	$BW_n \approx 1,05 \cdot f_{-3dB}$

De relaxatieoscillator

Een **relaxatieoscillator** is een circuit dat een uitgangssignaal maakt met een bepaalde schakelfrequentie. Dit uitgangssignaal wordt in een relaxatieoscillator opgewekt door gebruik te maken van òn integrerende componenten òn schakelende componenten.

- De *schakelende component* zorgt ervoor dat een bepaald signaal in de oscillator zich in slechts twee toestanden kan bevinden.
- De *integrerende component* zorgt ervoor dat als er een rusttoestand bereikt is, de schakeling *na verloop van tijd* naar de andere rusttoestand zal gaan.

Uitgevoerd met een versterker met voldoende versterking is een aantal relaxatieoscillatoren te realiseren zoals weergegeven in onderstaande figuur.



Figuur 7.9: De relaxatieoscillator: a) principe b) een implementatie

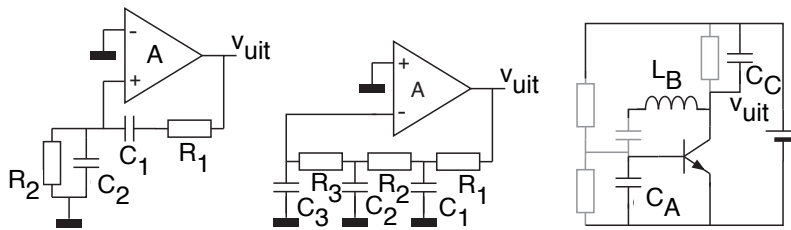
Omdat een relaxatieoscillator een niet-lineair systeem is, is het alleen door te rekenen in het tijddomein. Voor de schakeling in figuur b volgt voor de periodeduur:

$$T_{\text{periode}} = 2R_3 \cdot C \cdot \ln\left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta}\right) \quad \text{met} \quad \beta = \frac{R_1}{R_1 + R_2} \quad (7.150)$$

Harmonische oscillatoren

Harmonische oscillatoren zijn systemen die een harmonisch signaal (een sinus) genereren. Dit wordt gedaan door lusversterking exact gelijk aan 1 te maken op alléén de gewenste oscillatiefrequentie. Merk op dat we dan een stabiele oscillatie krijgen, terwijl het systeem regeltechnisch gezien instabiel is.

Het maken van de lusversterking $A\beta = 1$ bij $f_{oscillatie}$ kan op vele manieren. Voorbeelden zijn de *phaseshift*-, de Wien-brug, de kristaloscillator en de één transistoroscillatoren zoals de Colpitts, Clapp en Hartleyoscillator.



Figuur 7.10: Harmonische oscillatoren: a) **Wien-brug** b) **phase-shift** c) **Colpitts**

Wien-brug achtige oscillatoren hebben bij oscillatie doorgaans:

$$\omega_o = 1/\sqrt{R_1 R_2 C_1 C_2} \quad (7.151)$$

$$A = 1 + \frac{R_1}{R_2} + \frac{C_2}{C_1}$$

Voor phase-shiftachtigen met 3 secties hebben we, als de secties elkaar niet significant beïnvloeden:

$$\omega_o = \frac{\sqrt{3}}{RC} \quad (7.152)$$

$$A = 1/8$$

Ook alle één-transistorschakelingen zijn varianten van elkaar. De weerstanden en één condensator zijn voor biasing van de BJT. Voor de Colpitts-oscillator hebben we (bij goede benadering):

$$\omega_o \cong \sqrt{\frac{C_A + C_C}{L_B C_A C_C}} \quad (7.153)$$

$$s \cdot R_C \cong C_A / C_C \quad (7.154)$$

—

—

Deel II

Praktijk

Hoofdstuk 8 Componenten

Inhoudsopgave

Passieve componenten	491
Weerstand	491
Condensatoren	494
Spoelen	502
Condensatoren en spoelen meten	505
Kabels	508
Transistoren	508
Transistorbehuizingen	510
BJT	511
MOSFET	518
JFET	520
Thyristor	521
Triacs	524
IC's	530
Logica IC's	530
NE555	534
Displays	537
LED's	537
LCD's	538
VFD's	542
Thermokoppels	544
Stappenmotoren	545
Unipolaire stappenmotor	545
Bipolaire stappenmotoren	547
Printplaten etsen	551
Belichten met fotogevoelige printplaat	551
Overtekenen op koperprintplaat	552
Strijken op koperprintplaat	552
Plotten op koperprintplaat	553

Passieve componenten

Weerstand

De naam weerstand is voor dit component een beetje verwarrend. De component is slechts een benadering van een weerstand want hij heeft ook een parasitaire zelfinductie en capaciteit. De waarde van de weerstand is ook nog afhankelijk van externe factoren zoals de temperatuur en de aangelegde spanning. Bovendien is een weerstand ook een bron van ruis. Hieronder worden verschillende typen weerstanden beschreven. Hieruit volgen ook de toepassingsgebieden van de weerstanden. Aan het einde van deze opsomming is een tabel opgenomen die een gemakkelijke vergelijking geeft tussen de verschillende typen.

Koolfilmweerstand Deze weerstanden zijn het meest gebruikt. De tolerantie bedraagt meestal 5%. Als je zo'n weerstand doorknipt, zie je de witte keramische kern waarop de koolfilm zit. Bij de vervaardiging van de weerstand wordt een koolwaterstofgas gekraakt bij zeer hoge temperatuur, waardoor er grafiet op de keramische kern neerslaat. De dikte van de laag grafiet bepaalt de weerstandswaarde. Voor hogere weerstandswaarden wordt in de grafietlaag een spiraal gegraveerd. Aan beide uiteinden van de keramische drager wordt een aansluitdraad geklemd en het geheel wordt met een harde lak behandeld. Deze weerstanden worden gemaakt van 1 Ω tot 10 G Ω en van 1/16 tot 2 Watt.

Metaalfilmweerstand Deze hebben een kleinere afwijking en een lagere ruis dan koolweerstand en zijn bovendien minder gevoelig voor invloeden van buitenaf. Het weerstandsmateriaal (nikkelfosfor of nikkelchrom) wordt opgedampt op een keramische drager, waarna er een groef in gemaakt wordt om de gewenste waarde te verkrijgen. Deze weerstanden zijn herkenbaar aan het grote aantal kleurringgetjes, namelijk vijf of zes. In dat laatste geval geeft het zesde ringetje de temperatuurscoëfficiënt aan.

Metaalfilmweerstand zijn duurder dan koolfilmweerstand, maar het verschil in prijs is tegenwoordig niet zo groot meer.

Dikke filmweerstand Bij de vervaardiging van deze weerstanden wordt een pasta gemaakt van glas en kleine deeltjes edelmetaal. Deze pasta wordt nauwkeurig uitgesmeerd op een drager van aluminiumoxide, waarna het geheel gesinterd (gebakken) wordt. Aan beide einden krijgt de drager metalen

aansluitvakjes en de weerstandslaag wordt met een laser getrimd. Zo krijgt men een SMD¹-weerstand. Door het lasertrimmen is de tolerantie erg laag. Met dezelfde pasta maakt men ook gewone 'through-hole'-weerstand, die geschikt zijn voor hogere vermogens dan koolweerstand. Zulke weerstanden worden cermet-weerstand genoemd. Dikke filmweerstand tref je ook aan op geïntegreerde schakelingen in dikke-film-techniek, vaak gecombineerd met SMD componenten.

Dunne filmweerstand Deze weerstanden bestaan uit nikkelchroom dat op een keramisch substraat wordt opgedampt. Op het geheel wordt fotogevoelige lak aangebracht, zodat door belichten en etsen de juiste weerstandswaarde wordt verkregen. In dit proces worden ook de metalen aansluitingen aangebracht, en zo ontstaat weer een SMD-weerstand. Deze weerstanden hebben een nog grotere stabiliteit dan dikke filmweerstand en een lagere tolerantie. Door hun kleine afmetingen hebben ze geringe parasitaire capaciteit en zelfinductie.

Draadgewonden weerstanden Koolfilmweerstand worden gemaakt voor vermogens tot 2W. Wil men meer verstoken, dan is men aangewezen op draadgewonden weerstanden. Het draad, dat op een keramische drager wordt gewikkeld, is een legering van metalen. Door hun hoge zelfinductie en de capaciteit tussen de wikkelingen zijn deze weerstanden niet geschikt voor hoge frequenties. Ze worden gemaakt voor veel verschillende vermogens. In principe zijn de verwarmingselementen die in wasmachines en strijkijzers te vinden zijn ook telgen uit deze familie. Wie met hoge frequenties werkt, is voor grotere vermogens aangewezen op 'non-inductive' cermet-weerstand. Ook wordt er soms op een speciale manier gewikkeld (**ambivalent wikkelen**), zodat er een zo klein mogelijke zelfinductie ontstaat.

Compoundweerstand Dit type weerstand is achterhaald, komt men in antieke apparaten nog veelvuldig tegen. Om deze weerstand te maken mengt men koolstof met klei, die gebakken wordt. Een voordeel van deze constructie is dat men er gemakkelijk vermogensweerstand mee kan maken die een overbelasting gewoon overleven. De tolerantie is echter niet erg klein, 20% is normaal.

Bovendien genereren deze weerstanden erg veel ruis. Dat komt omdat de stroom door de weerstand verschillende wegen kiest: de kooldeeltjes in de klei maken nu eens wel, dan weer geen contact.

¹Surface Mounted Device

Toepassingen Aan de hand van deze tabel kan men de verschillende constructies van weerstanden vergelijken. Ook kan men eruit opmaken welk type weerstand het meest geschikt is voor een bepaalde toepassing.

De waarden in de tabel geven slechts een indicatie. Het kan dus zijn dat een fabrikant deze waarden overtreft. De technieken worden voortdurend doorontwikkeld.

soort weerstand	draad-gewonden	kool-film	metaal film	dikke film	dunne film
Waarden (Ω)	$0,1 - 10^5$	$1 - 10^7$	$10^{-2} - 10^6$		
Max. vermogen (W)	500	2	10	2	0,2
Max. precisie (%)	0,1	0,1	0,02	0,1	0,05
Max. stabiliteit (%)	0,1	0,1	0,03	2	0,1
Max. temp. ($^{\circ}\text{C}$)	(legering)	200	300	150	125
spannings-afh. (%/V)	0	10^{-2}	10^{-3}	–	–
temp. coëff. (ppm/ $^{\circ}\text{C}$)	50	-10^3	50	100-300	10-200
stroomruis ($\mu\text{V}/\text{V}$)	0,1	0,2	0,05		
HF-eigenschappen	slecht	goed	goed	goed	z. goed

De waarde van de weerstand is af te lezen aan de aangebrachte kleurcodering:

kleur	ring 1/2/3	ring factor	tolerantie ring	kwaliteit faalkans
zwart	0	1		
bruin	1	10	1%	1,0%
rood	2	10^2	2%	0,1%
oranje	3	10^3		0,01%
geel	4	10^4		0,001%
groen	5	10^5	0,5%	
blauw	6	10^6	0,25%	
violet	7	10^7	0,1%	
grijs	8	10^8		
wit	9	10^9		
goud		10^{-1}	5%	
zilver		10^{-2}	10%	
geen			20%	

De volgorde van de getallen is te onthouden met het volgende ezelsbruggetje: "Zij bracht rozen op Gerrits graf bij vies, grauw weer. Gerrit zij niets."

De kwaliteitsring komt zelden voor; deze geeft de kans aan dat een weerstand het na 1000 uur maximale belasting begeeft. Meestal is de tolerantiering te

herkennen aan een iets grotere afstand tot de andere ringen.

Voorbeeld: rood - rood - oranje - goud → 22kΩ (5% tolerantie), bruin - zwart - zwart - bruin - bruin → 1,00kΩ (1% tolerantie).

De beschikbare weerstandswaarden hangen af van de **E-reeks** waarin zij vallen. De tolerantie van de weerstanden is afhankelijk van hun reeks:

reeks	tol	weerstandswaarden
E3	50%	10, 22, 47
E6	20%	10, 15, 22, 33, 47, 68
E12	10%	10, 12, 15, 18, 22, 27, 33, 39, 47, 56, 68, 82
E24	5%	10, 11, 12, 13, 15, 16, 18, 20, 22, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42, 47, 51, 56, 62, 68, 75, 82, 91
E48	2%	100, 105, 110, 115, 121, 127, 133, 140, 147, 154, 162, 169, 178, 187, 196, 205, 215, 226, 237, 249, 261, 274, 287, 301, 316, 332, 348, 365, 383, 402, 422, 442, 464, 487, 511, 536, 562, 590, 619, 649, 681, 715, 750, 787, 825, 866, 909, 953
E96	1%	100, 102, 105, 107, 110, 113, 115, 118, 121, 124, 127, 130, 133, 137, 140, 143, 147, 150, 154, 158, 162, 165, 169, 174, 178, 182, 187, 191, 196, 200, 205, 210, 215, 221, 226, 232, 237, 243, 249, 255, 261, 267, 274, 280, 287, 294, 301, 309, 316, 324, 332, 340, 348, 357, 365, 374, 383, 392, 402, 412, 422, 432, 442, 453, 464, 475, 487, 499, 511, 523, 536, 549, 562, 576, 590, 604, 619, 634, 649, 665, 681, 698, 715, 732, 750, 768, 787, 806, 825, 845, 866, 887, 909, 931, 953, 976
E192	0,5%	100, 101, 102, 104, 105, 106, 107, 108, 109, 110, 111, 113, 114, 115, 117, 118, 120, 121, 123, 124, 126, 127, 129, 130, 132, 133, 135, 137, 138, 140, 142, 143, 145, 147, 149, 150, 152, 154, 156, 158, 160, 162, 164, 165, 167, 169, 172, 174, 176, 178, 180, 182, 184, 187, 189, 191, 193, 196, 198, 200, 203, 205, 208, 210, 213, 215, 218, 221, 223, 226, 229, 232, 234, 237, 240, 243, 246, 249, 252, 255, 258, 261, 264, 267, 271, 274, 277, 280, 284, 287, 291, 294, 298, 301, 305, 309, 312, 316, 320, 324, 328, 332, 336, 340, 344, 348, 352, 357, 361, 365, 370, 374, 379, 383, 388, 392, 397, 402, 407, 412, 417, 422, 427, 432, 437, 442, 448, 453, 459, 464, 470, 475, 481, 487, 493, 499, 505, 511, 517, 523, 530, 536, 542, 549, 556, 562, 569, 576, 583, 590, 597, 604, 612, 619, 626, 634, 642, 649, 657, 665, 673, 681, 690, 698, 706, 715, 723, 732, 741, 750, 759, 768, 777, 787, 796, 806, 816, 825, 835, 845, 856, 866, 876, 887, 898, 909, 920, 931, 942, 953, 965, 976

Condensatoren

De **condensator** is er in de meest uiteenlopende uitvoeringen. Dat komt omdat er veel verschillende diëlektrica gebruikt worden, elk met hun eigen voor- en nadelen. Hierbij is te denken aan lage verliezen, hoge doorslagspanning, goedkope productie of een grote capaciteit per volume. Helaas gaan deze eigenschappen niet samen en daarom worden er zoveel verschillende condensatoren gebruikt. De condensatoren worden hieronder ingedeeld volgens de gebruikte diëlektrica.

Luchtcondensatoren Lucht is een eenvoudig te gebruiken diëlektricum met prima eigenschappen. De diëlektrische verliezen zijn vrijwel nihil, en de doorslagspanning is hoog. Helaas is de diëlektrische constante laag, zodat in de meeste toepassingen de keuze op een andere, compactere condensator valt.

Variabele condensatoren in radio's met een analoge afstemming hebben vaak lucht als diëlektricum, hoewel er ook afstemcondensatoren met folie tussen de platen bestaan. Luchtcondensatoren worden ook gebruikt in zenders, waar lage verliezen cruciaal zijn en waar met hoge spanningen wordt gewerkt. Een te hoge spanning leidt ertoe dat de lucht tussen de platen geïoniseerd wordt, zodat er doorslag ontstaat. Daarom bestaan er ook vacuümcondensatoren, die vanwege de geringere plaatafstand compacter zijn.

Keramische condensatoren Een grote groep materialen valt onder de noemer keramiek. Deze materialen bieden als diëlektricum erg geringe verliezen. De diëlektrische constante verschilt per materiaal en is in sommige keramieken erg afhankelijk van invloeden van buitenaf. Keramische condensatoren worden vanwege hun geringe verliezen veel toegepast in hoogfrequenteschakelingen. In de uitvoering als schijf- of plaatcondensator vind je zelden capaciteiten groter dan 100nF, maar in de zogenaamde *multilayer*-vorm realiseert men waarden tot in het μF -bereik. Voor deze grote capaciteiten valt de keuze echter vaak op foliecondensatoren. Meer over keramische condensatoren op pagina 500.

Foliecondensatoren Kunststoffolies doen het ook prima als diëlektricum en hebben het voordeel dat ze, samen met het aluminium dat als elektrode dient, opgerold kunnen worden. Zo verkrijgt men grote capaciteiten met een relatief compacte condensator. Foliecondensatoren bestaan er in soorten en maten. Niet alleen worden er verschillende soorten folie gebruikt, ook de manier

waarop er een condensator van wordt gemaakt verschilt. De uiteindelijke uitvoeringen lopen ook erg uiteen. Dikwijls vindt men foliecondensatoren ingegoten in een kunststoffen huisje, maar men vindt ze ook vaak gedipt in een harde kunststof. Foliecondensatoren bestaan er in capaciteiten tot tientallen microFarads. Ze vinden hun toepassing in het audiobereik, in schakelvoedingen en in netfilters. Zie verder pagina 497.

Elco's Elco is een afkorting voor elektrolytische condensator. In een elco vindt dus elektrolyse plaats. In plaats van twee platen en een isolator is er sprake van een anode, een kathode en een elektrolyt. Op de anode ontstaat door elektrolyse een oxydelaag, die als isolator dient. Omdat dit laagje heel dun is en een hoge diëlektrische constante heeft, verkrijgt men zo een grote capaciteit. Er bestaan droge en natte elco's. In de natte zit een laagje papier, gedrenkt in het elektrolyt, tussen twee lagen aluminiumfolie. Het aluminiumfolie is door beitsen poreus gemaakt, zodat er een groot oppervlakte is waarop de oxydelaag kan ontstaan. De droge elco werkt ook met een gebeitste anode met oxydelaag, alleen is hier het natte papier vervangen door een laag mangaandioxyde. Deze constructie geeft een betrouwbaardere condensator, waarvan de capaciteit beter bestand is tegen invloeden van buitenaf. Omdat de capaciteit per volume-eenheid geringer is en de constructie duurder, tref je meestal natte elco's aan. Elco's met tantaal als anode hebben een andere constructie: het tantaal is door sinteren tot een soort spons gevormd, dat van binnen door elektrolyse bedekt wordt met een laag oxyde. De poriën van de 'spons' worden gevuld met een nat elektrolyt of met mangaandioxyde, dat als kathode dient. Zodoende is hier ook weer sprake van een natte en een droge variant, waarbij de natte weer een grotere capaciteit geeft en de droge betrouwbaarder is. Tantaalpentoxyde heeft een hogere diëlektrische constante dan aluminiumoxide, en geeft dus compactere elco's. Bovendien hebben tantaal-elco's een langere levensduur, een groter temperatuurbereik en een betere stabiliteit dan aluminium-elco's.

Behalve de grote lekstroom, die nodig is om het elektrolyseproces in stand te houden, heeft de elco nog een aantal andere nadelen. De capaciteit wijkt veel af van de opgegeven waarde (meestal -10 tot $+50$ %) en men moet de polariteit en de werkspanning in acht nemen. De verliesfactor en de zelfinductie zijn erg groot, zodat de elco zich alleen bij zeer lage frequenties (<10 kHz) als een capaciteit gedraagt. De resonantiefrequentie ligt rond de 100 kHz en voor frequenties daarboven is de elco dus een zelfinductie. Elco's worden gemaakt voor werkspanningen tot 500 V en capaciteiten tot in het mF-bereik. Vanwege die grote capaciteiten, die bij compacte afmetingen en een lage prijs bereikt

worden, vindt men elco's veelvuldig als afvlakcondensator in zowel klassieke als schakelvoedingen. Omdat de oxydelaag door het elektrolyseproces constant in stand wordt gehouden, is de elco zelfherstellend na een doorslag. Toch overleven elco's zo'n doorslag niet altijd. Moderne elco's zijn dan ook voorzien van een inkerving in de behuizing, zodat deze bij gasontwikkeling na doorslag netjes openklapt. Als de elco lange tijd niet gebruikt is, is de oxydelaag dunner geworden en dus niet meer geschikt voor de opgegeven werkspanning. Het kan dus zijn dat oma's oude radio na het afstoffen en aansluiten een fikse klap geeft. Wil men dat voorkomen, dan laadt men de oude elco eerst via een grote weerstand op, zodat de oxydelaag in alle rust zijn oude dikte weer kan aannemen.

Foliecondensatoren

Foliecondensatoren, ook wel filmcondensatoren of kunststofcondensatoren genoemd, zijn een logisch voortvloeisel uit het streven naar compacte componenten. Kunststoffolies hebben een goede diëlektrische constante en kunnen opgerold worden voor een compacte constructie.

Er zijn verschillende technieken om van kunststoffolie een condensator te maken. In de eenvoudigste vorm worden twee lagen aluminiumfolie en twee lagen kunststof samen opgerold. Aan het aluminium worden dan twee aansluitdraden gelast, die aan beide kanten uit de rol komen. Wil men de zelfinductie van de condensator beperken, dan laat men de beide metaalfolies ieder aan een kant uit de uit de rol steken. De aansluitdraden worden dan op de beide kopse kanten van de rol gelast. Deze constructie wordt nog veel gebruikt voor condensatoren met hogere werkspanningen. Een modernere en meer toegepaste methode is om metaal (meestal tin of aluminium) op te dampen op de kunststoffolie en deze folie dan in twee lagen op te rollen. Ook hier wordt weer aan beide kopse kanten een aansluitdraad aangebracht, maar dat gebeurt nu door te solderen. Deze constructie geeft compacte condensatoren, omdat de opgedampte laag heel dun kan blijven (enkele tientallen nm).

Zo'n opgedampte foliecondensator is zelfherstellend na doorslag. Door de warmteontwikkeling bij doorslag verdampt het metaal, om vervolgens weer op de oude plaats neer te slaan. Dit is slechts merkbaar als een stoorimpuls en kan vele malen herhaald worden.

Foliecondensatoren vinden hun toepassing overwegend in laagfrequent-toepassingen. Door de grote afmetingen gedragen zulke condensatoren zich voor hogere frequenties meer en meer als zelfinductie. De resonantiefrequentie ligt voor de meeste typen tussen de 1 en 10 MHz.

Kleine condensatoren hebben een hoge resonantiefrequentie, grotere typen

een lagere.

Kunststoffen Er zijn veel verschillende kunststoffen die zich als diëlektricum lenen, elk met hun eigen voor- en nadelen. Het zal dus van de toepassing afhangen welke foliekondensator men kiest. De meestgebruikte folies worden hieronder behandeld. Er zit veel overlap in de eigenschappen van de kunststoffolies, daarom zullen er voor een bepaalde toepassing verschillende condensatoren voldoen.

Om het nog verwarrender te maken, schrijven de verschillende fabrikanten hun condensatoren tegenstrijdige eigenschappen toe. Onderstaande beschrijvingen geven voor de meeste toepassingen uitsluitsel over het te gebruiken type condensator. Er blijkt in de wereld van de foliecondensatoren een verschuiving gaande te zijn naar nieuwe materialen. Voor de hobbyist zullen waarschijnlijk alleen de oude materialen (polyester en polypropyleen) in aanmerking komen. Niet alleen omdat de nieuwe materialen niet veel beter zijn dan de oude, maar vooral ook vanwege de verkrijgbaarheid.

Polyester Deze kunststof wordt hier als eerste behandeld omdat veruit de meeste foliecondensatoren van polyester gemaakt worden. De polyester die het meest voor condensatoren wordt gebruikt, is polyethyleen tereftalaat oftewel het van kleding en verpakkingen bekende PET. Polyester is niet allen de goedkoopste van de gebruikte folies, maar heeft ook de hoogste diëctrische constante. Dit geeft een goedkope, compacte condensator, die bovendien lage diëlektrische verliezen en een hoge isolatieweerstand heeft en erg betrouwbaar is. Vandaar dat het veruit de meest universeel ingezette foliecondensator is. De tamelijk hoge positieve temperatuurcoëfficiënt geldt in sommige toepassingen als een nadeel. Polyestercondensatoren vindt men bijna uitsluitend in de opgedampte variant, die zelfherstellend is. Voor deze condensatoren wordt volgens DIN 41379 / EN 60062 de code MKT gebruikt. Voor een polyestercondensator met losse aluminiumfolie komt dan de code KT in aanmerking. (M betekent metallized, K is kunststof en T staat voor polyesTer). Helaas worden door sommige fabrikanten de codes MKS, MKH en FKS gebruikt, waarbij de F dan een niet-opgedampte condensator aanduidt en de S polyester betekent.

Polypropyleen Polypropyleen heeft in vergelijking tot het toch al niet slechte polyester nog betere eigenschappen. De isolatieweerstand is nog hoger en de diëlektrische verliezen zijn nog lager. Daardoor is polypropyleen beter bestand tegen hoge dV/dt en daardoor kom je deze condensatoren tegen in schakelvoedingen en in netstorings-onderdrukkers. Je komt ze ook tegen als

aanloopcondensator voor wisselstroom-motoren. De temperatuurcoëfficiënt is klein en negatief. Bovendien zijn polypropyleencondensatoren verkrijgbaar in kleine toleranties van 1%, terwijl MKT-condensatoren slechts tot 10 gaan.

Vanwege de hoge prijs en grote afmetingen worden polypropyleencondensatoren alleen daar toegepast, waar MKT echt niet volstaat. De gebruikte codes zijn MKP en KP, waar MKP weer voor de opgedampte variant met zelfherstellende eigenschappen staat. FKP kom je ook tegen in plaats van KP.

Polystyreen Veel fabrikanten maken deze condensatoren niet meer, omdat de eigenschappen van polypropyleen vrijwel met die van polystyreen overeenkomen. Bovendien is polypropyleen bruikbaar binnen een groter temperatuurbereik. Fabrikanten richten zich meer en meer op surface-mount en de maximale werktemperatuur van 85°C laat dat voor polystyreen niet toe. Polystyreencondensatoren zijn ideaal in filters, omdat ze zeer stabiel zijn, nauwelijks frequentie- en temperatuurafhankelijk en verkrijgbaar in kleine toleranties. De DIN-notering voor polystyreen is KS en de opgedampte versie heet MKS. Verwarrend genoeg zijn de rode Wima-condensatoren, waar MKS op staat, gewone polyestercondensatoren. Vaak hoort men de woorden styroflex of trolitul als het over polystyreencondensatoren gaat.

Polycarbonaat Ook polycarbonaat is een uitstervende soort. Ideaal in timers vanwege zijn stabiele capaciteit, maar tegenwoordig veelal vervangen door polyphenyl sulfide PPS. Ook het keramische materiaal C0G is vanwege de geringe temperatuurafhankelijkheid een goede vervanger. De DIN-aanduiding voor polycarbonaat met opgedampte elektroden is MKC.

Polyethyleen-naftalaat Polyethyleen-naftalaat is net als PET een polyester. Het is een relatief nieuw diëlektricum met ongeveer dezelfde eigenschappen als het gebruikelijke PET, maar is bestand tegen hogere temperaturen (tot 125°C). Dit maakt het geschikt voor oppervlaktmontage. Het heeft ook een iets lagere temperatuurafhankelijkheid dan PET. De DIN-aanduiding is MKN.

Polyphenyl-sulfide Is ook een van de nieuwere diëlektrica. Heeft een hele lage dissipatie en is bestand tegen temperaturen tot 150°C. Zou uit die overweging dus daar gebruikt kunnen worden, waar de hoge temperatuur het gebruik van polypropyleen niet toelaat. De naam volgens DIN is MKI, waarbij M weer voor de opgedampte variant staat.

Keramische condensatoren

Waar hoogfrequente stromen lopen, tref je dikwijls keramische condensators aan. Op deze condensators staat vaak naast de capaciteit een aantal letters die de temperatuurscoëfficiënt en de tolerantie aangeven. De capaciteit zelf wordt aangegeven door drie cijfers. Net als bij de weerstandscode vormen de eerste twee cijfers een getal, dat wordt vermenigvuldigd met de macht van tien die door het derde cijfer wordt aangegeven. De waarde is in pF. De tolerantie wordt aangegeven door een letter. Daaronder is er vaak nog plaats voor een code die de temperatuurscoëfficiënt aangeeft. Voor deze code worden de condensators op grond van hun diëlektricum verdeeld in twee klassen.

In de klasse-I vallen condensators waarvan de capaciteit zeer stabiel is. Zulke condensators vinden hun toepassing in oscillators en filters, waar de gedefinieerde temperatuurscoëfficiënt wordt gebruikt om het gedrag van andere componenten te compenseren.

De capaciteit van condensators uit klasse-II is sterk afhankelijk van de temperatuur, de aangelegde spanning en de frequentie, en verandert bovendien met de tijd. Deze condensators bieden een grote verhouding tussen capaciteit en afmetingen en worden veel als ontkoppelcondensator gebruikt. Hieronder staan de verschillende codes, die men op een keramische condensator aan kan treffen, uitgelegd.

Letters die de tolerantie aangeven en kleurcodes voor de temperatuurscoëfficiënt gebruikt door BC components.

Letter	Capaciteits-tolerantie	Kleur	Temp coëf. in PPM/K
C	$\pm 0,25\text{pF}$	rood/violet	100
D	$\pm 0,55\text{pF}$	zwart	0
F	$\pm 1\%$	bruin	-33
G	$\pm 2\%$	rood	-75
H	$\pm 3\%$	oranje	-150
J	$\pm 5\%$	geel	-220
K	$\pm 10\%$	groen	-330
M	$\pm 20\%$	blauw	-470
		violet	-570
		rood/geel	-1500

Temperatuurscoëfficiënt van klasse-I keramische condensators in PPM/K.

Eerste karakter Temperatuurs- coëfficiënt	Tweede karakter Vermenigvuldigings- factor	Derde Karakter Tolerantie
C=0,0	0=-1,0	G=±30PPM
M=1,0	1=-10	H=±60PPM
P=1,5	2=-100	J=±120PPM
R=2,2	3=-1000	K=±250PPM
S=3,3	4=-10000	L=±500PPM
T=4,7	5=1	M=±1000PPM
U=7,5	6=10	N=±2500PPM
	7=100	
	8=1000	
	9=10000	

Temperatuurscoëfficiënt van klasse-II keramische condensators in PPM/K.

Eerste karakter Laagste temperatuur	Tweede karakter Hoogste temperatuur	Derde karakter Capaciteits verandering als temp. verandert van kamertemp naar max of min
X=-55 °C	2=45 °C	A=±-1,0%
Y=-30 °C	4=65 °C	B=±-1,5%
Z=+10 °C	5=85 °C	C=±-2,2%
	6=105 °C	D=±-3,3%
	7=125 °C	E=±-4,7%
		F=±-7,5%
		P=±-10%
		R=±-15%
		S=±-22%
		T=±+22% / -33%
		U=±+22% / -56%
		V=±+22% / -82%

Spoelen

Zelfinductie is een veelgebruikt verschijnsel in de elektrotechniek. Helaas is een zelfinductie als zodanig niet verkrijgbaar, men gebruikt dan een spoel. Er bestaat een grote verscheidenheid aan spoelen, elk met zijn eigen voor- en nadelen. Vaak wordt er in schema's niet aangegeven welke spoel men in gedachten had. In dit hoofdstuk worden de verschillende typen spoelen kort behandeld, zodat men de juiste spoel kan kiezen. Voor deze uitleg wordt onderscheid gemaakt tussen spoelen met kern en luchtspoelen, die allebei apart behandeld worden.

Spoelen met kern

Een kern bestaat uit een ferromagnetisch materiaal en geeft een spoel, met een gegeven aantal windingen, een grotere zelfinductie. Het gebruik van een kern bespaart dus wikkeldraad, maar het heeft ook nadelen. In kernen treden verliezen op ten gevolge van hysteresis en wervelstromen. Hysteresis is kortgezegd het verschijnsel dat elke keer als de stroomrichting in de spoel verandert, een zekere permanente magnetisatie van de kern overwonnen moet worden. Wervelstromen worden door het magnetische veld van de spoel in de kern geïnduceerd. De spoel is als het ware een transformator met zijn eigen kern als secundaire wikkeling. Beide verschijnselen worden in de praktijk succesvol tegengegaan op een drietal manieren. Kernen voor lage frequenties tot bovenin het audiobereik maakt men van lamellen, die met lak op elkaar gelijmd worden. De lamellen zijn gemaakt van transformatorblik, een ijzer-nikkel-of een ijzer-silicium-legering, waarin de hysteresis gering is. Omdat de lamellen door de lak elektrisch van elkaar gescheiden zijn, worden wervelstromen beperkt. Voor hogere frequenties gebruikt men ferriet- of ijzerpoederkernen. Deze laatste bestaan uit verlijmd ijzerpoeder, waarbij de lijm (of hars) als elektrische isolator tegen wervelstromen dient. Ferriet is een verzamelnaam voor keramische materialen bestaande uit ijzeroxide met een toevoeging van een metaal. Door de hoge soortelijke weerstand is het verlies door wervelstromen gering. Poederijzerkernen zijn geschikt voor hogere frequenties dan ferrietkernen, maar ferrietkernen hebben een hoger relatieve permeabiliteit dan poederijzerkernen. De verschillende kernmaterialen zijn ontworpen voor een gedefinieerd frequentiebereik, dat in de datasheets van de fabrikant staat. In die sheets staat ook de relatieve permeabiliteit en vaak een zelfinductie-per-wikkeling, zodat je het benodigde aantal wikkelingen kunt berekenen.

Luchtspoelen

Bij hoge frequenties verdient het gebruik van luchtspoelen meestal de voorkeur. Omdat de benodigde zelfinducties hier klein zijn, is het niet nodig het aantal windingen met een kern te verminderen. Bovendien is de permeabiliteit van een spoelkern, en daarmee de zelfinductie van de spoel, temperatuursafhankelijk. Het verlies van een goede luchtspoel is minder dan dat van een spoel met kern. Toch zijn er wel degelijk verliezen waar men rekening mee moet houden. Allereerst is er de ongewenste capaciteit tussen de windingen. Om deze klein te houden kan men de windingen op enige afstand van elkaar leggen. Gebruikt men een spoeldrager, dan moet deze van een materiaal zijn met kleine diëlektrische verliezen. Een ander verschijnsel dat verlies oplevert, is de stroomverdringing in het wikkeldraad, ook bekend als het *skineffect*. Dit effect zorgt ervoor dat bij hoge frequenties de stroom hoofdzakelijk aan de oppervlakte van een geleider loopt en dus een hogere weerstand ondervindt. Om deze verliezen tegen te gaan wikkelt men spoelen van dik of plat draad (groter oppervlakte), of van verzilverd draad (lagere oppervlakteweerstand). Het skin-effect wordt ook tegengegaan door de windingen verder van elkaar te leggen, wat toch al gedaan werd om de onderlinge capaciteit te verminderen. Voor cilindrische spoelen met één laag windingen staat hieronder een formule om de zelfinductie te benaderen. In de praktijk zal men door *trial-and-error* tot een definitieve spoel komen.

Algemene formule voor een cilindrische éénlaags spoel met of zonder kern:

$$L = \mu_0 \mu_r N^2 (A/l) \quad (8.1)$$

Hierbij is L de zelfinductie in H, μ_0 de permeabiliteit van vacuüm ($4\pi * 10^{-7}$ H/m), μ_r de relatieve permeabiliteit van de kern (1 voor een luchtspoel), A de oppervlakte in m², l de lengte van de spoel in m en N het aantal windingen. Deze formule geldt als $l > D$

Kleurcodes voor Amidon ijzerpoeder-ringkernen

Ringkernspoelen hebben het voordeel ten opzichte van cilindrische spoelen dat het magnetisch veld ingesloten wordt door de windingen. Zulke spoelen storen niet en worden ook niet gestoord, wat in hoogfrequent-schakelingen van groot belang is. Ijzerpoederringkernen zijn zeer geschikt voor breedbandige toepassingen zoals **impedantie-transformatoren** en **baluns**¹, maar ook in afgestemde kringen doen ze het prima. Tabel 8.1 geeft de frequentiebereiken voor verschillende ijzerpoederkernen. De verschillende materialen zijn te

¹balanced-unbalanced-transformatoren

Materiaal	Kleur	Relatieve permeabiliteit	Frequentiebereik MHz
41	Groen	75	-
3	Grijs	35	0,5 - 0,5
15	Rood-Wit	25	0,1 - 2
1	Blauw	20	0,5 - 5
2	Rood	10	1 - 30
6	Geel	8	10 - 90
10	Zwart	6	60 - 150
12	Groen-Wit	3	100 - 200
0	Bruin	1	150 - 300

Tabel 8.1: Kleurcodering en eigenschappen van verschillend kernmateriaal

herkennen aan de kleur. Wordt in een schema verwezen naar een ijzerpoeder- of ferrietringkern, dan doet men dat vaak met een aanduiding zoals T-50-2. In deze code staat de T voor ijzerpoeder, TF wordt gebruikt voor ferriet. De 50 geeft de diameter in honderdsten van inches, en de 2 geeft het materiaal aan. In tabel 8.1 kunnen we dan zien dat het een rode kern betreft.

Om de zelfinductie van een spoel op een ringkern te berekenen wordt de AL-waarde gebruikt. Deze waarde is de zelfinductie die verkregen wordt door 100 windingen op de betreffende kern te leggen. De AL-waarden voor verschillende kernen zijn te vinden in tabel 8.2. De kerndiameters in deze tabel zijn in honderdsten van inches, omdat dat de maat is die in de type-aanduiding gebruikt wordt.

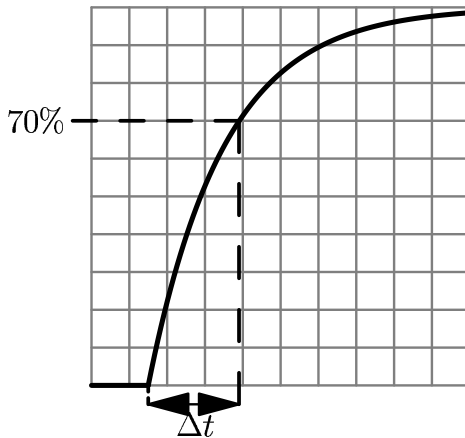
Afm 1"/100	Kernmateriaal							
	3	15	1	2	6	10	12	0
12	60	50	48	20	17	12	7	3
16	61	55	44	22	19	13	8	3
20	90	65	52	27	22	16	10	3,5
37	120	90	80	40	30	25	15	4,9
50	175	135	100	49	40	31	18	6,4
68	195	180	115	57	47	32	21	7,5
94	248	200	160	84	70	58	32	10,6
130	350	250	200	110	96	-	-	15
200	425	-	250	120	100	-	-	-

Tabel 8.2: De AL-waarden voor verschillende ringkernen

Condensatoren en spoelen meten

Voor het bepalen van de (ohmse) waarde van een weerstand kan een multimeter of een combinatie van een stroom- en een spanningsmeter worden gebruikt. Om de waarde van een condensator of een spoel te bepalen is echter een dynamische meetmethode nodig omdat het gedrag van deze componenten afhankelijk is van de tijdsafgeleiden van spanning en stroom. Hier wordt een methode beschreven om de waarden van condensatoren en spoelen te bepalen met behulp van een functiegenerator en een oscilloscoop. Er wordt gewerkt in het tijddomein. Het is ook mogelijk de waarden te bepalen in het frequentiedomein door een overdracht te meten, maar dit is over het algemeen lastiger te doen en vereist een tweekanaals oscilloscoop.

Condensatoren



Figuur 8.1: Meting van capaciteit

Wanneer een condensator wordt geladen en ontladen via de interne weerstand van de functiegenerator dan ziet de spanning eruit zoals figuur 8.1 weergeeft. De meting gaat als volgt:

1. Sluit de oscilloscoop en de uitgang van de functiegenerator aan op de te meten condensator
2. Stel de functiegenerator in op een blokgolf

3. Stel de frequentie zodanig in dat de eindwaarde bereikt wordt voordat het signaal van de functiegenerator weer laag wordt
4. Stel de tijdbasis zodanig in dat de complete puls inclusief eindwaarde zichtbaar is. Om het begin ook goed te kunnen zien is het, vooral bij een analoge oscilloscoop, aan te bevelen om te triggeren op de sync uitgang van de functiegenerator.
5. Stel de verticale positie, verticale versterking en de amplitude van de functiegenerator zodanig in dat het begin op de onderste lijn van het raster ligt, en de eindwaarde op de bovenste lijn.
6. Bepaal het snijpunt met de 70%-lijn en bepaal de bijbehorende tijd Δt . Om de tijd nauwkeuriger af te lezen kan de tijdbasis van de oscilloscoop worden aangepast, de eindwaarde hoeft niet meer zichtbaar te zijn.
7. Bereken de capaciteit: $C = 0,83\Delta t/R$. Hier is R de interne weerstand van de functiegenerator; C is in Farad, R in Ohm en Δt in seconden.

— Bij deze meting moet op het volgende gelet worden om een zo goed mogelijk resultaat te krijgen: —

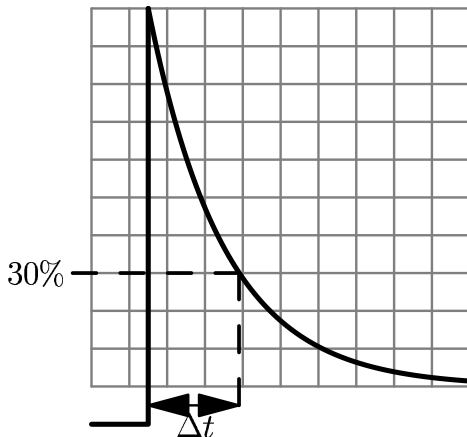
- De stijgtijd van het signaal moet zodanig zijn dat de stijgtijd van het uitgangssignaal van de functiegenerator te verwaarlozen is. Dit betekent dat bij het meten van kleine condensatoren een extra serieweerstand moet worden opgenomen tussen de functiegenerator en de condensator. De som van deze serieweerstand en de interne weerstand van de functiegenerator moet worden gebruikt voor de berekening in de laatste stap.
- De ingangsweerstand van de oscilloscoop(-probe) moet verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de meetweerstand
- De capaciteit van de oscilloscoop(-probe) moet verwaarloosbaar zijn ten opzichte van de te meten condensator, of het eindresultaat moet gecorrigeerd worden
- Als de gemeten curve begint met een verticaal deel dan is dit te wijten aan de parasitaire weerstand (ESR) van de condensator. Meestal is de ESR echter zo klein dat deze de meting niet beïnvloedt

Spoelen

Het meten van een spoel gaat op vrijwel dezelfde wijze als het meten van een condensator. Het beeld zal er nu uit zien zoals figuur 8.2. Opmerkelijk is dat bij spoelen de parasitaire weerstand nu vaak wel van invloed is. De stappen voor de meting tot en met stap 4 zijn hetzelfde, daarna verandert de procedure:

5. Stel de verticale positie, verticale versterking en de amplitude van de functiegenerator zodanig in dat de eindwaarde op de onderste lijn van het raster ligt, terwijl de piek op de bovenste rasterlijn ligt.
6. Bepaal het snijpunt met de 30%-lijn en bijbehorende Δt
7. Bereken de inductiviteit: $L = 0,83R\Delta t$. Hier is L in Henry, R in Ohm en Δt in seconden.

Bij het meten van de inductiviteit gelden dezelfde aandachtspunten als bij het meten van een capaciteit.



Figuur 8.2: Meting van inductiviteit

Kabels

In meer-aderige (data-)kabels wordt vaak de **DIN 47100** kleurcodering gebruikt om de verschillende aders te kunnen onderscheiden. Deze codering is opgenomen in tabel 8.3

De draaddikte van een kabel wordt vaak in mm² gegeven. Soms wordt echter ook de Amerikaanse **AWG**¹-maat gebruikt. Tabel 8.4 kan dan worden gebruikt om de bijbehorende draaddiameter of draaddoorsnede te berekenen. De AWG-maat wordt overigens niet alleen voor draaddiameters gebruikt, maar bijvoorbeeld ook voor de dikte van staalplaat.

¹American Wire Gauge

1	wit	20	roze/bruin
2	bruin	21	wit/blauw
3	groen	22	bruin/blauw
4	geel	23	wit/rood
5	grijs	24	bruin/rood
6	roze	25	wit/zwart
7	blauw	26	bruin/zwart
8	rood	27	grijs/groen
9	zwart	28	geel/grijs
10	violet	29	roze/groen
11	grijs/roze	30	geel/roze
12	rood/blauw	31	groen/blauw
13	wit/groen	32	geel/blauw
14	bruin/groen	33	groen/rood
15	wit/geel	34	geel/rood
16	geel/bruin	35	groen/zwart
17	wit/grijs	36	geel/zwart
18	grijs/bruin	37	grijs/blauw
19	wit/roze		

Tabel 8.3: De kleurcodering van aders volgens DIN 47100

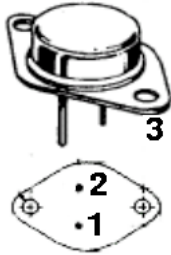
AWG	Dia. mm	Opp. mm ²	Weerst. Ω/km	AWG	Dia. mm	Opp. mm ²	Weerst. Ω/km
46	0,04	0,0013	13700	24	0,51	0,2	87,5
44	0,05	0,002	8750	22	0,64	0,33	51,7
42	0,06	0,0028	6070	20	0,81	0,5	34,1
41	0,07	0,0039	4460	18	1,02	0,82	21,9
40	0,08	0,005	3420	16	1,29	1,3	13
39	0,09	0,0064	2700	14	1,63	2	8,54
38	0,1	0,0078	2190	13	1,8	2,6	6,76
37	0,11	0,0095	1810	12	2,05	3,3	5,4
36	0,13	0,013	1300	10	2,59	5,26	3,4
35	0,14	0,015	1120	8	3,25	8,296	2,2
34	0,16	0,02	844	6	4,115	13,298	1,5
33	0,18	0,026	676	4	5,189	21,15	0,8
32	0,2	0,031	547	2	6,543	33,62	0,5
30	0,25	0,049	351	1	7,348	42,41	0,4
28	0,33	0,08	232	1/0	8,252	53,49	0,31
27	0,36	0,096	178	2/0	9,266	67,43	0,25
26	0,41	0,13	137	3/0	10,4	85,01	0,2
25	0,45	0,16	108	4/0	11,684	107,219	0,16

Tabel 8.4: AWG conversietabel

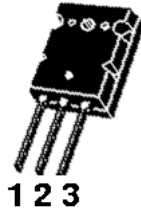
Transistoren

Transistorbehuizingen

TO-3/66



TO-3PBL



TO-18



TO-39



TO-92(L)



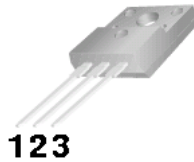
TO-126



TO-218/220/220AB



TO-220F



TO-225AA



BJT

Legenda tabel:

- **naam:** de naam of het nummer van de transistor. Let op dat niet altijd het complete nummer op een transistor staat. Zo wordt een 2SCxxx vaak als Cxxx aangegeven op de behuizing.
- **behuizing:** De naam van de behuizing. Deze wordt weergegeven op pagina 510.
- **pinout:** De pinout van de transistor op volgorde van de nummering weergegeven bij de behuizingen. Voorbeeld: BEC= pin1: Basis, pin2: Emitter, pin3:Collector.
- I_c : De maximale stroom die door de collector mag lopen onder constante spanning in mA
- h_{FE} : De minimale gelijkstroom versterking onder de meest gunstige omstandigheden die op de datasheet worden gegeven.
- f_T : Het (*current-)*gain bandwidth product in MHz

general purpose transistors						
Naam	Behuizing		pinout	I_c	h_{FE}	f_T
2N1711	TO-39	NPN	ECB	500	100	70
2N1893	TO-39	NPN	ECB	500	40	x
2N2219	TO-39	NPN	ECB	800	100	250
2N2219A	TO-39	NPN	ECB	800	100	300
2N3440	TO-39	NPN	ECB	1000	40	15
2N2905	TO-39	PNP	ECB	600	100	200
2N2905A	TO-39	PNP	ECB	600	100	200
2N4033	TO-39	PNP	ECB	1000	100	150
2N5415	TO-39	PNP	ECB	1000	30	15
2N5416	TO-39	PNP	ECB	1000	30	15
2N2222	TO-18	NPN	ECB	800	100	250
2N2222A	TO-18	NPN	ECB	800	100	300
2N2369	TO-18	NPN	ECB	200	20	500
2N2484	TO-18	NPN	ECB	50	250	50
BC107	TO-18	NPN	ECB	100	110	100
BC108	TO-18	NPN	ECB	100	110	100
BC109	TO-18	NPN	ECB	100	200	100
2N2906	TO-18	PNP	ECB	600	40	200
2N2906A	TO-18	PNP	ECB	600	40	200
2N2907	TO-18	PNP	ECB	600	100	200
2N2907A	TO-18	PNP	ECB	600	100	200

Naam	Behuizing		pinout	I_c	h_{FE}	f_T
BC177	TO-18	PNP	ECB	100	125	100
2N3583	TO-66	NPN	BEC	1000	40	x
2N3584	TO-66	NPN	BEC	2000	40	x
2N3585	TO-66	NPN	BEC	2000	40	x
2N4240	TO-66	NPN	BEC	2000	40	x
2N6420	TO-66	PNP	BEC	1000	40	x
2N6421	TO-66	PNP	BEC	2000	40	x
2N6422	TO-66	PNP	BEC	2000	40	x
2N6423	TO-66	PNP	BEC	2000	40	x
2N3702	TO-92	PNP	BCE	500	60	100
2N3703	TO-92	PNP	BCE	500	30	100
2SA1015	TO-92	PNP	BCE	150	70	80
2N3903	TO-92	NPN	EBC	200	50	250
2N3904	TO-92	NPN	EBC	200	100	300
2N4123	TO-92	NPN	EBC	200	50	250
2N4214	TO-92	NPN	EBC	200	120	300
2N4400	TO-92	NPN	EBC	600	50	200
2N4401	TO-92	NPN	EBC	600	100	250
2N4410	TO-92	NPN	EBC	250	60	60
2N5088	TO-92	NPN	EBC	50	350	50
2N5089	TO-92	NPN	EBC	50	450	50
2N5550	TO-92	NPN	EBC	600	60	100
2N5551	TO-92	NPN	EBC	600	80	100
PN100A	TO-92	NPN	EBC	500	300	250
2N3905	TO-92	PNP	EBC	200	50	200
2N3906	TO-92	PNP	EBC	200	100	250
2N4126	TO-92	PNP	EBC	200	120	250
2N4402	TO-92	PNP	EBC	600	50	150
2N4403	TO-92	PNP	EBC	600	100	200
2N5087	TO-92	PNP	EBC	50	250	40
2N5400	TO-92	PNP	EBC	600	40	100
2N5401	TO-92	PNP	EBC	600	60	100
BC212	TO-92	PNP	EBC	100	60	280
BC213	TO-92	PNP	EBC	100	80	320
BC214	TO-92	PNP	EBC	100	140	360
2N3704	TO-92	NPN	ECB	500	100	100
BC182	TO-92	NPN	CBE	100	120	150
BC183	TO-92	NPN	CBE	100	120	150

Naam	Behuizing		pinout	I_c	h_{FE}	f_T
BC184	TO-92	NPN	CBE	100	250	150
BC237x	TO-92	NPN	CBE	100	120	
BC237B	TO-92	NPN	CBE	100	200	150
BC238B	TO-92	NPN	CBE	100	200	150
BC237C	TO-92	NPN	CBE	100	380	150
BC238C	TO-92	NPN	CBE	100	380	150
BC239C	TO-92	NPN	CBE	100	380	150
2N4921	TO-225AA	NPN	BCE	1000	40	3
2N4922	TO-225AA	NPN	BCE	1000	40	3
2N4923	TO-225AA	NPN	BCE	1000	40	3
2N5038	TO-3	NPN	BEC	20k	20	x
2N5039	TO-3	NPN	BEC	20k	20	x
2N6052	TO-3	NPN	BEC	12k	750	4
2N6059	TO-3	NPN	BEC	12k	750	4
2N6052	TO-3	PNP	BEC	12k	750	4
2N6040	TO-220AB	PNP	BCE	8000	1000	x
2N6041	TO-220AB	PNP	BCE	8000	1000	x
2N6042	TO-220AB	PNP	BCE	8000	1000	x
2N6107	TO-220AB	PNP	BCE	7000	30	10
2N6109	TO-220AB	PNP	BCE	7000	30	10
2N6111	TO-220AB	PNP	BCE	7000	30	10
2N6043	TO-220AB	NPN	BCE	8000	1000	x
2N6044	TO-220AB	NPN	BCE	8000	1000	x
2N6045	TO-220AB	NPN	BCE	8000	1000	x
2N6107	TO-220AB	NPN	BCE	7000	30	4
2N6109	TO-220AB	NPN	BCE	7000	30	4
2N6111	TO-220AB	NPN	BCE	7000	30	4
BC337	TO-92	NPN	CBE	800	100	210
BC33716	TO-92	NPN	CBE	800	100	210
BC33725	TO-92	NPN	CBE	800	160	210
BC33740	TO-92	NPN	CBE	800	250	210
BC338	TO-92	NPN	CBE	800	100	210
BC33816	TO-92	NPN	CBE	800	100	210
BC33825	TO-92	NPN	CBE	800	160	210
BC33840	TO-92	NPN	CBE	800	250	210
BC368	TO-92	NPN	ECB	1000	85	65
BC369	TO-92	PNP	ECB	1000	85	65
BC546	TO-92	NPN	CBE	100	110	150
BC546B	TO-92	NPN	CBE	100	200	150

Naam	Behuizing		pinout	I_c	h_{FE}	f_T
BC548A	TO-92	NPN	CBE	100	110	150
BC547A	TO-92	NPN	CBE	100	110	150
BC547C	TO-92	NPN	CBE	100	420	150
BC548C	TO-92	NPN	CBE	100	420	150
BC547	TO-92	NPN	CBE	100	110	150
BC548	TO-92	NPN	CBE	100	110	150
BC547	TO-92	NPN	CBE	100	200	150
BC548	TO-92	NPN	CBE	100	200	150
BC546	TO-92	NPN	CBE	100	110	300
BC547	TO-92	NPN	CBE	100	110	300
BC548	TO-92	NPN	CBE	100	110	300
BC549	TO-92	NPN	CBE	100	110	300
BC550	TO-92	NPN	CBE	100	110	300
BC556	TO-92	PNP	CBE	100	120	280
BC557	TO-92	PNP	CBE	100	120	320
BC557A	TO-92	PNP	CBE	100	120	320
BC557B	TO-92	PNP	CBE	100	180	320
BC557C	TO-92	PNP	CBE	100	420	320
BC558B	TO-92	PNP	CBE	100	180	360
BC558	TO-92	PNP	CBE	100	120	360
BC556B	TO-92	PNP	CBE	100	180	180
BC559	TO-92	PNP	CBE	100	120	250
BC559C	TO-92	PNP	CBE	100	380	250
BC560C	TO-92	PNP	CBE	100	380	250
BC559B	TO-92	PNP	CBE	100	180	250
BC636	TO-92	PNP	ECB	500	40	150
BC638	TO-92	PNP	ECB	500	40	150
BC640	TO-92	PNP	ECB	500	40	150
BC635	TO-92	PNP	ECB	500	40	200
BC637	TO-92	PNP	ECB	500	40	200
BC639	TO-92	PNP	ECB	500	40	200
Bf257	TO-39	NPN	ECB	100	25	90
Bf258	TO-39	NPN	ECB	100	25	90
Bf259	TO-39	NPN	ECB	100	25	90
Bf420	TO-92	NPN	ECB	500	50	60
Bf422	TO-92	NPN	ECB	500	50	60
Bf421	TO-92	PNP	ECB	500	50	60
Bf423	TO-92	PNP	ECB	500	50	60
Bf469	TO-126	NPN	ECB	50	50	60

Naam	Behuizing		pinout	I_c	h_{FE}	f_T
Bf471	TO-126	NPN	ECB	50	50	60
Bfy50	TO-39	NPN	ECB	1000	80	60
Bfy51	TO-39	NPN	ECB	1000	60	50
Bfy52	TO-39	NPN	ECB	1000	40	50
C945	TO-92	NPN	BCE	150	70	150
C1815	TO-92	NPN	ECB	150	70	80
C2233	TO-220	NPN	BCE	4000	30	10
C2330	TO-92L	NPN	ECB	100	40	50
2SC2482	TO-92	NPN	BCE	100	30	50
C9012	TO-92	PNP	CBE	500	64	150
C9013	TO-92	NPN	CBE	500	64	140
C9014	TO-92	NPN	CBE	500	60	60
C9015	TO-92	PNP	CBE	500	60	60
SS9014	TO-92	NPN	EBC	100	60	150
2SC1815	TO-92	NPN	BCE	150	70	80

Power transistors

Naam	Behuizing		pinout	I_c	h_{FE}	f_T
BD135	TO-225AA	NPN	BCE	1500	40	x
BD137	TO-225AA	NPN	BCE	1500	40	x
BD139	TO-225AA	NPN	BCE	1500	40	x
BD136	TO-225AA	PNP	BCE	1500	40	x
BD138	TO-225AA	PNP	BCE	1500	40	x
BD140	TO-225AA	PNP	BCE	1500	40	x
BD14010	TO-225AA	PNP	BCE	1500	63	x
BD234	TO-126	PNP	ECB	2000	40	3
BD236	TO-126	PNP	ECB	2000	40	3
BD238	TO-126	PNP	ECB	2000	40	3
BD239x	TO-220	NPN	BCE	2000	40	x
BD240x	TO-220	PNP	BCE	2000	40	x
BD241x	TO-220	NPN	BCE	3000	25	x
BD242x	TO-220	PNP	BCE	3000	25	x
BD243x	TO-220	NPN	BCE	6000	30	x
BD244x	TO-220	PNP	BCE	6000	30	x
BD249x	TO-247	NPN	BCE	25000	25	3
BD250x	TO-247	PNP	BCE	25000	25	3
BD434	TO-126	PNP	ECB	4000	85	3
BD436	TO-126	PNP	ECB	4000	85	3

Naam	Behuizing		pinout	I_c	h_{FE}	f_T
BD438	TO-126	PNP	ECB	4000	85	3
BD441	TO-225AA	NPN	BCE	4000	40	3
BD435	TO-126	NPN	ECB	4000	85	3
BD437	TO-126	NPN	ECB	4000	85	3
BD439	TO-126	NPN	ECB	4000	85	3
BD440	TO-225AA	PNP	BCE	4000	40	3
BD442	TO-225AA	PNP	BCE	4000	40	3
BD675x	TO-225AA	NPN	BCE	4000	750	x
BD677x	TO-225AA	NPN	BCE	4000	750	x
BD679x	TO-225AA	NPN	BCE	4000	750	x
BD681	TO-225AA	NPN	BCE	4000	750	x
BD678x	TO-225AA	PNP	BCE	4000	750	x
BD680x	TO-225AA	PNP	BCE	4000	750	x
BD682	TO-225AA	PNP	BCE	4000	750	x
BU208A	TO-3	NPN	BEC	8000	2	7
BU508x	TO-3	NPN	BEC	8000	x	7
BDT60x	TO-220	PNP	BCE	4000	750	x
BDT61x	TO-220	NPN	BCE	4000	750	x
BUT11Fx	TO-220F	NPN	BCE	5000	x	x
MJ15001	TO-3	NPN	BEC	5000	25	2
MJ15002	TO-3	PNP	BEC	5000	25	2
MJ15003	TO-3	NPN	BEC	20000	25	2
MJ15004	TO-3	PNP	BEC	20000	25	2
2N3055A	TO-3	NPN	BEC	15000	20	0.8
MJ15015	TO-3	NPN	BEC	15000	20	0.8
MJ2955A	TO-3	PNP	BEC	15000	20	2.2
MJ15016	TO-3	PNP	BEC	15000	20	2.2
MJ15022	TO-3	NPN	BEC	16000	15	4
MJ15024	TO-3	NPN	BEC	16000	15	4
MJ15023	TO-3	PNP	BEC	16000	15	4
MJ15025	TO-3	PNP	BEC	16000	15	4
MJE340	TO-126	NPN	ECB	500	30	x
MJE350	TO-126	PNP	ECB	500	30	x
MJE2955T	TO-220	PNP	BCE	10000	20	2
MJE3055T	TO-220	NPN	BCE	10000	20	2
MJE4342	TO-218	NPN	CEB	16000	15	1
MJE4343	TO-218	NPN	CEB	16000	15	1
MJE4352	TO-218	PNP	CEB	16000	15	1
MJE4353	TO-218	PNP	CEB	16000	15	1

Naam	Behuizing		pinout	I_c	h_{FE}	f_T
MJE15028	TO-220AB	NPN	BCE	8000	40	30
MJE15030	TO-220AB	NPN	BCE	8000	40	30
MJE15029	TO-220AB	PNP	BCE	8000	40	30
MJE15031	TO-220AB	PNP	BCE	8000	40	30
MJL21193	TO-3PBL	PNP	BCE	16000	25	4
MJL21194	TO-3PBL	NPN	BCE	16000	25	4
MJE13005	TO-220	NPN	BCE	4000	10	x
TIP29x	TO-220AB	NPN	BCE	1000	40	3
TIP20x	TO-220AB	PNP	BCE	1000	40	3
TIP31x	TO-220AB	NPN	BCE	3000	25	3
TIP32x	TO-220AB	PNP	BCE	3000	25	3
TIP33x	TO-220AB	NPN	BCE	10000	40	3
TIP34x	TO-220AB	PNP	BCE	10000	40	3
TIP35x	TO-220AB	NPN	BCE	25000	25	3
TIP36x	TO-220AB	PNP	BCE	25000	25	3
TIP41x	TO-220AB	NPN	BCE	6000	30	3
TIP42x	TO-220AB	PNP	BCE	6000	30	3
TIP47	TO-220AB	NPN	BCE	1000	30	25
TIP48	TO-220AB	NPN	BCE	1000	30	25
TIP49	TO-220AB	NPN	BCE	1000	30	25
TIP50	TO-220AB	NPN	BCE	1000	30	25
TIP100	TO-220AB	NPN	BCE	1000	30	25
TIP101	TO-220AB	NPN	BCE	8000	1000	x
TIP102	TO-220AB	NPN	BCE	8000	1000	x
TIP105	TO-220AB	PNP	BCE	8000	1000	x
TIP106	TO-220AB	PNP	BCE	8000	1000	x
TIP107	TO-220AB	PNP	BCE	8000	1000	x
TIP3055	TO-220AB	NPN	BCE	1500	20	2.5
TIP3055	TO-220AB	PNP	BCE	1500	20	2.5
2N2955	TO-3	PNP	BEC	15000	15	2.5
2N3055	TO-3	NPN	BEC	15000	20	2.5
2N3771	TO-3	NPN	BEC	30000	15	0.2
2N3772	TO-3	NPN	BEC	20000	15	0.2
2N3773	TO-3	NPN	BEC	16000	15	x
2N6609	TO-3	PNP	BEC	16000	15	x
2N5884	TO-3	PNP	BEC	25000	35	4
2N5886	TO-3	NPN	BEC	25000	35	4

MOSFET

- **Naam:** De naam of het nummer van de transistor.
- **Behuizing:** De naam van de behuizing. Deze wordt weergegeven op pagina 510.
- **Pinout:** De pinout van de transistor op volgorde van de nummering weergegeven bij de behuizingen. Voorbeeld: GDS = pin1: Gate, pin2: Drain, pin3: Source.
- V_{DS} : De maximale Drain-Source spanning in Volts.
- I_D : De maximale stroom in ampère (A) die door de Drain mag lopen onder constante spanning.
- P_{tot} : Totaal gedissipeerd vermogen bij 25 °C in watt (W).
- **Th:** De threshold spanning in volt (V).
- R_{DS} : De drain-source weerstand in ohm (Ω).
- g_{fs} : De voorwaartse geleiding in siemens (S).
- t_{on} : De benodigde tijd om van laag naar hoog te schakelen, inclusief vertraging (*Turn-on delay time + rise time*) in nanoseconden (ns).
- t_{off} : De benodigde tijd om van hoog naar laag te schakelen, inclusief vertraging (*Turn-off delay time + Fall time*) in nanoseconden (ns).

Naam	Behuizing	Pinout	V_{DS}	I_D	P_{tot}	Th	R_{DS}	g_{fs}	t_{on}	t_{off}
IRL2203N	TO-220AB	N GDS	30	116	180	>1.0	<7m	>73	171	89
BS170	TO-92	N DGS	60	0.5	0.35	2	1.8	0.2	4	4.0
BS250	TO-92	P DGS	45	0.25	0.83	2.25	9	0.125	4	10
BUZ11	TO-220	N GDS	50	33	0.9	3	0.03	17	240	330
BUZ21	TO-220AB	N GDS	100	19	75	3	0.09	8	80	250
BUZ22	TO-220AB	N GDS	100	34	125	3	0.05	17.5	100	350
BUZ31	TO-220AB	N GDS	200	14.5	95	3	0.16	10	62	210
BUZ41A	TO-220AB	N GDS	500	4.5	75	3	1.4	2.5	70	160
BUZ60	TO-220AB	N GDS	400	5.5	75	3	0.9	2.5	70	160
BUZ71	TO-220AB	N GDS	50	14	40	3	0.09	5.2	75	150
BUZ72	TO-220AB	N GDS	100	10	40	3	0.15	4.3	55	95
BUZ74	TO-220AB	N GDS	500	2.4	40	3	2.5	2.1	48	90
BUZ77A	TO-220AB	N GDS	600	2.7	75	3	3.5	3	38	80
BUZ80	TO-220AB	N GDS	800	3.4	100	3	3.3	3.5	160	145
BUZ80FI	TO-220AB	N GDS	800	2.1	40	3	3.3	3.5	160	145
BUZ90	TO-220AB	N GDS	600	4.5	75	3	1.5	3.8	70	190
BUZ91	TO-220AB	N GDS	600	8.5	150	3	0.7	8.5	90	330
IRF510	TO-220AB	N GDS	100	5.6	43	3.0	0.4	2	75	66
IRF520	TO-220	N GDS	100	10	70	2.9	0.23	4.5	60	55

Naam	Behuizing	Pinout	V_{DS}	I_D	P_{tot}	Th	R_{DS}	g_{fs}	t_{on}	t_{off}
IRF520FI	TO-220	N GDS	100	7	35	2.9	0.23	4.5	60	55
IRF530	TO-220AB	N GDS	100	14	88	3.0	<0.16	>5.1	44	47
IRF540	TO-220	N GDS	100	30	150	3	0.05	20	80	55
IRF540FI	TO-220	N GDS	100	17	45	3	0.05	20	80	55
IRF560	TO-220	N GDS	200	6	70	3	0.55	20	100	180
IRF560FI	TO-220	N GDS	200	4	30	3	0.55	3.5	100	180
IRF630	TO-220	N GDS	200	9	75	3	0.35	4	25	24
IRF630FP	TO-220	N GDS	200	9	25	3	0.35	4	25	24
IRF640	TO-220	N GDS	200	11	125	3	0.15	11	40	46
IRF640FP	TO-220	N GDS	200	11	40	3	0.15	11	40	46
IRF730	TO-220	N GDS	400	5.5	100	3	0.75	>2.9	19	18.5
IRF740	TO-221	N GDS	400	10	125	3	0.48	>5.8	27	20
IRF820	TO-222	N GDS	500	2.5	80	3	2.5	1.9	19	13
IRF830	TO-223	N GDS	500	4.5	100	3	1.35	>2.5	19.5	12
IRF840	TO-224	N GDS	500	8	125	3	0.75	>4.9	30	22.5
IRF9530	TO-220AB	N GDS	100	12	75	3.0	0.25	3.8	100	140
IRF9531	TO-220AB	P GDS	60	12	75	3.0	0.25	3.8	100	140
IRF9532	TO-220AB	P GDS	100	10	75	3.0	0.3	3.8	100	140
IRF9533	TO-220AB	P GDS	60	10	75	3.0	0.3	3.8	100	140
IRF9540	TO-220AB	P GDS	100	23	140	3.0	<0.12	>5.3	82	102
IRFP150N	TO-247AC	N GDS	100	42	160	3.0	<36m	>14	67	85
IRFP250	TO-247AC	N GDS	200	33	180	3.0	0.07	19	140	149
IRFP251	TO-247AC	N GDS	150	33	180	3.0	0.07	19	140	149
IRFP252	TO-247AC	N GDS	200	27	180	3.0	85m	19	140	149
IRFP253	TO-247AC	N GDS	150	27	180	3.0	85m	19	140	149
IRFP350	TO-247AC	N GDS	400	16	190		<0.30	>10	65	134
IRFP450	TO-247AC	N GDS	500	14	190	3	0.33	13	38	40
IRFZ14	TO-220AB	N GDS	60	10	43	3.0	<0.20	>2.4	60	31
IRFZ34	TO-220AB	N GDS	55	26	56		<40m	>6.5	56	71
IRFZ44N	TO-220AB	N GDS	55	49	94		<18m	>19	72	89
IRFZ46	TO-220AB	N GDS	50	50	150		<24m	>27	142	137
IRFZ48R	TO-220AB	N GDS	60	50	190		<18m	>27	258.1	460
IRL2203N	TO-220AB	N GDS	30	116	180	>1.0	<7m	>73	171	89

JFET

- **Naam:** De naam of het nummer van de transistor.
- **behuizing:** De naam van de behuizing. Deze wordt weergegeven op pagina 510.
- **pinout:** De pinout van de transistor op volgorde van de nummering weergegeven bij de behuizingen. Voorbeeld: GDS = pin1: Gate, pin2: Drain, pin3: Source.
- V_{DG} : De maximale drain-gate spanning in volt (V).
- V_{GS} : De maximale gate-source spanning in volt (V).
- P_{tot} : Totaal gedissipeerd vermogen bij 25 °C in watt (W).
- R_{DS} : De drain-source weerstand in ohm (Ω).
- C_{SG} : De gate-source capaciteit in picofarad (pF).

Naam	Behuizing	Pinout		V_{DG}	V_{GS}	P_{tot}	R_{DS}	C_{SG}
MPF102	TO-92	N	DSG	25	-25	350	0.5	7
J111	TO-92	N	DSG	35	-35	350	30	28
J112	TO-92	N	DSG	35	-35	350	50	28
J113	TO-92	N	DSG	35	-35	350	100	28
J174	TO-92	P	DSG	-30	30	350	85	x
J175	TO-92	P	DSG	-30	30	350	125	x
J176	TO-92	P	DSG	-30	30	350	250	x
J177	TO-92	P	DSG	-30	30	350	300	x

Thyristor

- **Naam:** De naam of het nummer van de thyristor.
- **behuizing:** De naam van de behuizing. Deze wordt weergegeven op pagina 510.
- **pinout:** De pinout van de transistor op volgorde van de nummering weergegeven bij de behuizingen. Voorbeeld: GKA = pin1: Gate , pin2: Kathode(-), pin3: Anode(+).
- V_{DRM} : De maximale *Peak off-state* spanning (V).
- I_T : De maximale *RMS on-state* stroom (A).
- V_{GM} : De maximale piek gatespanning (V).
- I_h : De houdstroom (mA).

Naam	Behuizing, Pinout		V_{DRM}	I_T	V_{GM}	I_h
BT169B	TO-92	KGA	200	0.8	5	5
BT169D	TO-92	KGA	400	0.8	5	5
BT139G	TO-92	KGA	600	0.8	5	5
BT169BW	sot223	KAG	200	1	5	5
BT169DW	sot223	KAG	400	1	5	5
BT169EW	sot223	KAG	500	1	5	5
BT169GW	sot223	KAG	600	1	5	5
2N5064	TO-92	KGA	200	0.8	5	5
2S2M	TO-202AA	KAG	200	x	x	10
2S4M	TO-202AA	KAG	400	x	x	10
3P4MH	TO-202AA	KAG	500	4.7	x	5
3P6MH	TO-202AA	KAG	700	4.7	x	5
BT145-500R	TO-220AB	KAG	500	25	5	60
BT145-600R	TO-220AB	KAG	600	25	5	60
BT145-800R	TO-220AB	KAG	800	25	5	60
BT148-400R	sot82	KAG	400	4	5	6
BT148-500R	sot82	KAG	500	4	5	6
BT148-600R	sot82	KAG	600	4	5	6
BT148M-600Z	sot428	KAG	600	4	5	6
BT148W-400R	SOT223	KAG	400	1	5	6
BT148W-500R	SOT223	KAG	500	1	5	6
BT148W-600R	SOT223	KAG	600	1	5	6
BT149B	TO-92	AGK	200	0.8	5	5
BT149D	TO-92	AGK	400	0.8	5	5
BT149E	TO-92	AGK	500	0.8	5	5
BT149G	TO-92	AGK	600	0.8	5	5

Naam	Behuizing,	Pinout	V_{DRM}	I_T	V_{GM}	I_h
BT150-500R	TO-220AB	KAG	500	4	5	6
BT150-600R	TO-220AB	KAG	600	4	5	6
BT150-800R	TO-220AB	KAG	800	4	5	6
BT150M-500R	SOT428	KAG	500	4	5	6
BT150M-600R	SOT428	KAG	600	4	5	6
BT150M-800R	SOT428	KAG	800	4	5	6
BT151-500R	TO-220AB	KAG	500	12	5	20
BT151-650R	TO-220AB	KAG	650	12	5	20
BT151-800R	TO-220AB	KAG	800	12	5	20
BT151B-500R	SOT404	KAG	500	12	5	20
BT151B-650R	SOT404	KAG	650	12	5	20
BT151B-800R	SOT404	KAG	800	12	5	20
BT151F-500R	SOT186	KAG	500	9	5	20
BT151F-650R	SOT186	KAG	650	9	5	20
BT151F-800R	SOT186	KAG	800	9	5	20
BT151M-500R	SOT428	KAG	500	12	5	20
BT151M-650R	SOT428	KAG	650	12	5	20
BT151M-800R	SOT428	KAG	800	12	5	20
BT151X-500R	SOT186A	KAG	500	9	5	20
BT151X-650R	SOT186A	KAG	650	9	5	20
BT151X-800R	SOT186A	KAG	800	9	5	20
BT152-400R	TO-220AB	KAG	450	20	5	60
BT152-600R	TO-220AB	KAG	650	20	5	60
BT152-800R	TO-220AB	KAG	800	20	5	60
BT152B-400R	SOT404	KAG	450	20	5	60
BT152B-600R	SOT404	KAG	650	20	5	60
BT152B-800R	SOT404	KAG	800	20	5	60
BT152X-400R	SOT186A	KAG	450	20	5	60
BT152X-600R	SOT186A	KAG	650	20	5	60
BT152X-800R	SOT186A	KAG	800	20	5	60
BT168B	TO-92	KGA	200	0.8	5	5
BT168D	TO-92	KGA	400	0.8	5	5
BT168E	TO-92	KGA	500	0.8	5	5
BT168G	TO-92	KGA	600	0.8	5	5
BT168BW	TO-92	KGA	200	1	5	5
BT168DW	TO-92	KGA	400	1	5	5
BT168EW	TO-92	KGA	500	1	5	5
BT168GW	TO-92	KGA	600	1	5	5
BT258-500R	TO-220AB	KAG	500	8	5	6

Naam	Behuizing,	Pinout	V_{DRM}	I_T	V_{GM}	I_h
BT258-600R	TO-220AB	KAG	600	8	5	6
BT258-800R	TO-220AB	KAG	800	8	5	6
BT258B-500R	SOT404	KAG	500	8	5	6
BT258B-600R	SOT404	KAG	600	8	5	6
BT258B-800R	SOT404	KAG	800	8	5	6
BT258U-500R	SOT533	KAG	500	8	5	6
BT258U-600R	SOT533	KAG	600	8	5	6
BT258U-800R	SOT533	KAG	800	8	5	6
BT258X-500R	SOT186A	KAG	500	8	5	6
BT258X-600R	SOT186A	KAG	600	8	5	6
BT258X-800R	SOT186A	KAG	800	8	5	6
BT300-500R	TO-220AB	KAG	500	8	5	6
BT300-600R	TO-220AB	KAG	600	8	5	6
BT300-800R	TO-220AB	KAG	800	8	5	6
BT300B-500R	SOT404	KAG	500	8	5	6
BT300B-600R	SOT404	KAG	600	8	5	6
BT300B-800R	SOT404	KAG	800	8	5	6
BT300M-500R	SOT428	KAG	500	8	5	6
BT300M-600R	SOT428	KAG	600	8	5	6
BT300M-800R	SOT428	KAG	800	8	5	6
BT300X-500R	SOT186A	KAG	500	8	5	6
BT300X-600R	SOT186A	KAG	600	8	5	6
BT300X-800R	SOT186A	KAG	800	8	5	6
BTA151-500R	SOT82	KAG	500	12	5	16
BTA151-650R	SOT82	KAG	650	12	5	16
BTA151-800R	SOT82	KAG	800	12	5	16
BTH151S-650R	SOT428	KAG	650	12	5	20
10RIA	TO-48	GKA	10	25	5	130
20RIA	TO-48	GKA	20	25	5	130
40RIA	TO-48	GKA	40	25	5	130
60RIA	TO-48	GKA	60	25	5	130
80RIA	TO-48	GKA	80	25	5	130
100RIA	TO-48	GKA	100	25	5	130
120RIA	TO-48	GKA	120	25	5	130

Triacs

- **Naam:** De naam of het nummer van de triac. Tekens tussen { } zijn keuzes van toevoegingen, tekens tussen [] zijn optionele toevoegingen.
- **behuizing:** De naam van de behuizing. Deze wordt weergegeven op pagina 510.
- **pinout:** De pinout van de transistor op volgorde van de nummering weergegeven bij de behuizingen. Voorbeeld: G12 = pin1: Gate , pin2: Terminal 1, pin3: terminal 2.
- V_{DRM} : Het maximale *Peak off-state* voltage (V).
- I_T : De maximale *RMS on-state* stroom in Ampère (A).
- I_{DRM} : De *peak off-state* stroom in Ampère (μA).
- V_{GM} : Het maximale piek Gate voltage (V).
- I_h : De houdstroom in Ampère (mA).

Naam	Behuizing, Pinout	V_{DRM}	I_T	I_{DRM}	V_{GM}	I_h
2N6071x	TO-225AA G21	200	4	10	5	15
2N6073x	TO-225AA G21	400	4	10	5	15
2N6075x	TO-225AA G21	600	4	10	5	15
2N6342	TO-220AB G21	200	8	10	10	40
2N6343	TO-220AB G21	400	8	10	10	40
2N6344	TO-220AB G21	600	8	10	10	40
2N6345	TO-220AB G21	800	8	10	10	40
2N6346	TO-220AB G21	200	8	10	10	40
2N6347	TO-220AB G21	400	8	10	10	40
2N6348	TO-220AB G21	600	8	10	10	40
2N6349	TO-220AB G21	800	8	10	10	40
BCR10CM-8x	TO-220 G21	400	10	2000	10	40
BCR10CM-12	TO-220 G21	600	10	2000	10	40
BCR12M-8	TO-220 G21	400	12	2000	10	40
BCR12M-12	TO-220 G21	600	12	2000	10	40
BCR16M-8	TO-220 G21	400	16	2000	10	40
BCR16M-12	TO-220 G21	600	16	2000	10	40
BCR20AM-8	TO-220 G21	400	20	2000	10	40
BCR20AM-12	TO-220 G21	600	20	2000	10	40
BCR30AM-8	TO-220 G21	400	30	2000	10	40
BCR30AM-12	TO-220 G21	600	30	2000	10	40
BCR3AM-8	TO-220 G21	400	3	2000	10	40
BCR3AM-12	TO-220 G21	600	3	2000	10	40

Naam	Behuizing, Pinout		V_{DRM}	I_T	I_{DRM}	V_{GM}	I_h
BCR5AM-8	TO-220	G21	400	5	2000	10	40
BCR5AM-12	TO-220	G21	600	5	2000	10	40
BCR6AM-8	TO-220	G21	400	6	2000	10	40
BCR6AM-12	TO-220	G21	600	6	2000	10	40
BCR8AM-8	TO-220	G21	400	8	2000	10	40
BCR8AM-12	TO-220	G21	600	8	2000	10	40
BT134-500[E/F]	SOT82	12G	500	4	x	5	15
BT134-500D	SOT82	12G	500	4	x	5	10
BT134-500G	SOT82	12G	500	4	x	5	30
BT134-600[E/F]	SOT82	12G	600	4	x	5	15
BT134-600D	SOT82	12G	600	4	x	5	10
BT134-600G	SOT82	12G	600	4	x	5	30
BT134-800[E/F]	SOT82	12G	800	4	x	5	15
BT134-800G	SOT82	12G	800	4	x	5	30
BT134W-500[E/F]	SOT223	12G	500	1	x	5	15
BT134W-500D	SOT223	12G	500	1	x	5	10
BT134W-500G	SOT223	12G	500	1	x	5	30
BT134W-600[E/F]	SOT223	12G	600	1	x	5	15
BT134W-600D	SOT223	12G	600	1	x	5	10
BT134W-600G	SOT223	12G	600	1	x	5	30
BT134W-800[E/F]	SOT223	12G	800	1	x	5	15
BT134W-800G	SOT223	12G	800	1	x	5	30
BT136-500[E/F]	TO-220AB	12G	500	4	x	5	15
BT136-500D	TO-220AB	12G	500	4	x	5	10
BT136-500G	TO-220AB	12G	500	4	x	5	30
BT136-600[E/F]	TO-220AB	12G	600	4	x	5	15
BT136-600D	TO-220AB	12G	600	4	x	5	10
BT136-600G	TO-220AB	12G	600	4	x	5	30
BT136-800[E/F]	TO-220AB	12G	800	4	x	5	15
BT136-800G	TO-220AB	12G	800	4	x	5	30
BT136B-500[E/F]	SOT404	12G	500	4	x	5	15
BT136B-500D	SOT404	12G	500	4	x	5	10
BT136B-500G	SOT404	12G	500	4	x	5	30
BT136B-600[E/F]	SOT404	12G	600	4	x	5	15
BT136B-600D	SOT404	12G	600	4	x	5	10
BT136B-600G	SOT404	12G	600	4	x	5	30
BT136B-800[E/F]	SOT404	12G	800	4	x	5	15
BT136B-800G	SOT404	12G	800	4	x	5	30
BT136F-500[F]	SOT186	12G	500	4	x	5	15

Naam	Behuizing, Pinout	V_{DRM}	I_T	I_{DRM}	V_{GM}	I_h
BT136F-500G	SOT186 12G	500	4	x	5	30
BT136F-600[F]	SOT186 12G	600	4	x	5	15
BT136F-600G	SOT186 12G	600	4	x	5	30
BT136F-800[F]	SOT186 12G	800	4	x	5	15
BT136F-800G	SOT186 12G	800	4	x	5	30
BT136{M/S}-500[E/F]	SOT428 12G	500	4	x	5	15
BT136{M/S}-500D	SOT428 12G	500	4	x	5	10
BT136{M/S}-500G	SOT428 12G	500	4	x	5	30
BT136{M/S}-600[E/F]	SOT428 12G	600	4	x	5	15
BT136{M/S}-600D	SOT428 12G	600	4	x	5	10
BT136{M/S}-600G	SOT428 12G	600	4	x	5	30
BT136{M/S}-800[E/F]	SOT428 12G	800	4	x	5	15
BT136{M/S}-800G	SOT428 12G	800	4	x	5	30
BT136X-500[E/F]	TO-220AB 12G	500	4	x	5	15
BT136X-500D	TO-220AB 12G	500	4	x	5	10
BT136X-500G	TO-220AB 12G	500	4	x	5	30
BT136X-600[E/F]	TO-220AB 12G	600	4	x	5	15
BT136X-600D	TO-220AB 12G	600	4	x	5	10
BT136X-600G	TO-220AB 12G	600	4	x	5	30
BT136X-800[E/F]	TO-220AB 12G	800	4	x	5	15
BT136X-800G	TO-220AB 12G	800	4	x	5	30
BT137-500[E/F]	TO-220AB 12G	500	8	x	5	20
BT137-500D	TO-220AB 12G	500	8	x	5	10
BT137-500G	TO-220AB 12G	500	8	x	5	40
BT137-600[E/F]	TO-220AB 12G	600	8	x	5	20
BT137-600D	TO-220AB 12G	600	8	x	5	10
BT137-600G	TO-220AB 12G	600	8	x	5	40
BT137-800[E/F]	TO-220AB 12G	800	8	x	5	20
BT137-800G	TO-220AB 12G	800	8	x	5	40
BT137B-500[E/F]	SOT404 12G	500	8	x	5	20
BT137B-500D	SOT404 12G	500	8	x	5	10
BT137B-500G	SOT404 12G	500	8	x	5	40
BT137B-600[E/F]	SOT404 12G	600	8	x	5	20
BT137B-600D	SOT404 12G	600	8	x	5	10
BT137B-600G	SOT404 12G	600	8	x	5	40
BT137B-800[E/F]	SOT404 12G	800	8	x	5	20
BT137B-800G	SOT404 12G	800	8	x	5	40
BT137F-500[F]	SOT186 12G	500	8	x	5	20
BT137F-500G	SOT186 12G	500	8	x	5	40

Naam	Behuizing, Pinout	V_{DRM}	I_T	I_{DRM}	V_{GM}	I_h
BT137F-600[F]	SOT186 12G	600	8	x	5	20
BT137F-600G	SOT186 12G	600	8	x	5	40
BT137F-800[F]	SOT186 12G	800	8	x	5	20
BT137F-800G	SOT186 12G	800	8	x	5	40
BT137{M/S}-500[E/F]	SOT428 12G	500	8	x	5	20
BT137{M/S}-500D	SOT428 12G	500	8	x	5	10
BT137{M/S}-500G	SOT428 12G	500	8	x	5	40
BT137{M/S}-600[E/F]	SOT428 12G	600	8	x	5	20
BT137{M/S}-600D	SOT428 12G	600	8	x	5	10
BT137{M/S}-600G	SOT428 12G	600	8	x	5	40
BT137{M/S}-800[E/F]	SOT428 12G	800	8	x	5	20
BT137{M/S}-800G	SOT428 12G	800	8	x	5	40
BT137X-500[E/F]	SOT186A 12G	500	8	x	5	20
BT137X-500D	SOT186A 12G	500	8	x	5	10
BT137X-500G	SOT186A 12G	500	8	x	5	40
BT137X-600[E/F]	SOT186A 12G	600	8	x	5	20
BT137X-600D	SOT186A 12G	600	8	x	5	10
BT137X-600G	SOT186A 12G	600	8	x	5	40
BT137X-800[E/F]	SOT186A 12G	800	8	x	5	20
BT137X-800G	SOT186A 12G	800	8	x	5	40
BT138-500[E/F]	TO-220AB 12G	500	12	x	5	30
BT138-500G	TO-220AB 12G	500	12	x	5	60
BT138-600[E/F]	TO-220AB 12G	600	12	x	5	30
BT138-600G	TO-220AB 12G	600	12	x	5	60
BT138-800[E/F]	TO-220AB 12G	800	12	x	5	30
BT138-800G	TO-220AB 12G	800	12	x	5	60
BT138B-500[E/F]	SOT404 12G	500	12	x	5	30
BT138B-500G	SOT404 12G	500	12	x	5	60
BT138B-600[E/F]	SOT404 12G	600	12	x	5	30
BT138B-600G	SOT404 12G	600	12	x	5	60
BT138B-800[E/F]	SOT404 12G	800	12	x	5	30
BT138B-800G	SOT404 12G	800	12	x	5	60
BT138F-500[F]	SOT186 12G	500	12	x	5	30
BT138F-500G	SOT186 12G	500	12	x	5	60
BT138F-600[F]	SOT186 12G	600	12	x	5	30
BT138F-600G	SOT186 12G	600	12	x	5	60
BT138F-800[F]	SOT186 12G	800	12	x	5	30
BT138F-800G	SOT186 12G	800	12	x	5	60

Naam	Behuizing, Pinout	V_{DRM}	I_T	I_{DRM}	V_{GM}	I_h
BT138X-500[E/F]	SOT186A 12G	500	12	x	5	30
BT138X-500G	SOT186A 12G	500	12	x	5	60
BT138X-600[E/F]	SOT186A 12G	600	12	x	5	30
BT138X-600G	SOT186A 12G	600	12	x	5	60
BT138X-800[E/F]	SOT186A 12G	800	12	x	5	30
BT138X-800G	SOT186A 12G	800	12	x	5	60
BT139-500[E/F]	TO-220AB 12G	500	16	x	5	30
BT139-500{G/H}	TO-220AB 12G	500	16	x	5	60
BT139-600[E/F]	TO-220AB 12G	600	16	x	5	30
BT139-600{G/H}	TO-220AB 12G	600	16	x	5	60
BT139-800[E/F]	TO-220AB 12G	800	16	x	5	30
BT139-800{G/H}	TO-220AB 12G	800	16	x	5	60
BT139B-500[E/F]	SOT404 12G	500	16	x	5	30
BT139B-500{G/H}	SOT404 12G	500	16	x	5	60
BT139B-600[E/F]	SOT404 12G	600	16	x	5	30
BT139B-600{G/H}	SOT404 12G	600	16	x	5	60
BT139B-800[E/F]	SOT404 12G	800	16	x	5	30
BT139B-800{G/H}	SOT404 12G	800	16	x	5	60
BT139F-500[F]	SOT186 12G	500	16	x	5	30
BT139F-500G	SOT186 12G	500	16	x	5	60
BT139F-600[F]	SOT186 12G	600	16	x	5	30
BT139F-600G	SOT186 12G	600	16	x	5	60
BT139F-800[F]	SOT186 12G	800	16	x	5	30
BT139F-800G	SOT186 12G	800	16	x	5	60
BT139X-500[E/F]	SOT186A 12G	500	16	x	5	30
BT139X-500G	SOT186A 12G	500	16	x	5	60
BT139X-600[E/F]	SOT186A 12G	600	16	x	5	30
BT139X-600G	SOT186A 12G	600	16	x	5	60
BT139X-800[E/F]	SOT186A 12G	800	16	x	5	30
BT139X-800G	SOT186A 12G	800	16	x	5	60
TIC201D	TO-220 12G	400	2.5	1000	x	30
TIC201M	TO-220 12G	600	2.5	1000	x	30
TIC201S	TO-220 12G	700	2.5	1000	x	30
TIC201N	TO-220 12G	800	2.5	1000	x	30
TIC206D	TO-220 12G	400	4	1000	x	15
TIC206M	TO-220 12G	600	4	1000	x	15
TIC206S	TO-220 12G	700	4	1000	x	15
TIC206N	TO-220 12G	800	4	1000	x	15
TIC216A	TO-220 12G	100	6	2000	x	30

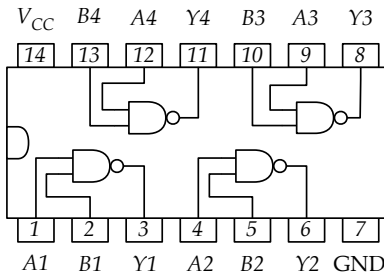
Naam	Behuizing, Pinout		V_{DRM}	I_T	I_{DRM}	V_{GM}	I_h
TIC216B	TO-220	12G	200	6	2000	x	30
TIC216C	TO-220	12G	300	6	2000	x	30
TIC216D	TO-220	12G	400	6	2000	x	30
TIC216E	TO-220	12G	500	6	2000	x	30
TIC216M	TO-220	12G	600	6	2000	x	30
TIC216S	TO-220	12G	700	6	2000	x	30
TIC216N	TO-220	12G	800	6	2000	x	30
TIC225D	TO-220	12G	400	8	2000	x	20
TIC225M	TO-220	12G	600	8	2000	x	20
TIC225S	TO-220	12G	700	8	2000	x	20
TIC225N	TO-220	12G	800	8	2000	x	20
TIC226D	TO-220	12G	400	8	2000	x	30
TIC226M	TO-220	12G	600	8	2000	x	30
TIC226S	TO-220	12G	700	8	2000	x	30
TIC226N	TO-220	12G	800	8	2000	x	30
TIC246D	TO-220	12G	400	16	2000	x	40
TIC246M	TO-220	12G	600	16	2000	x	40
TIC246S	TO-220	12G	700	16	2000	x	40
TIC246N	TO-220	12G	800	16	2000	x	40
TIC253D	SOT-93	12G	400	20	2000	x	40
TIC253M	SOT-93	12G	600	20	2000	x	40
TIC253S	SOT-93	12G	700	20	2000	x	40
TIC253N	SOT-93	12G	800	20	2000	x	40
TIC256D	TO-220	12G	400	20	2000	x	40
TIC256M	TO-220	12G	600	20	2000	x	40
TIC256S	TO-220	12G	700	20	2000	x	40
TIC256N	TO-220	12G	800	20	2000	x	40
TIC263D	SOT-93	12G	400	25	2000	x	40
TIC263M	SOT-93	12G	600	25	2000	x	40
TIC263S	SOT-93	12G	700	25	2000	x	40
TIC263N	SOT-93	12G	800	25	2000	x	40
TIC266D	TO-220	12G	400	25	2000	x	40
TIC266M	TO-220	12G	600	25	2000	x	40
TIC266S	TO-220	12G	700	25	2000	x	40
TIC266N	TO-220	12G	800	25	2000	x	40

IC's

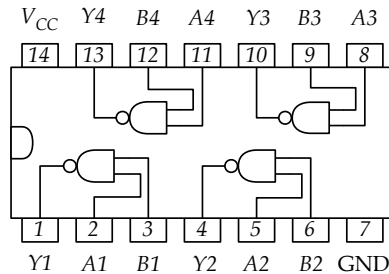
Logica IC's

Logica IC's zijn er in verschillende series. De oudste serie is de standaard **TTL**¹ (74xx). Hiervan zijn series afgeleid die qua functie compatible zijn, bijvoorbeeld de **74LSxx**², de **74ALSxx**³, **74HCxx**⁴ en **74HCTxx**⁵. De functies van de 4000-serie zijn anders dan de 74xx-serie, maar een aantal functies uit de 4000-serie is wel als 74HC4000 en 74HCT4000 serie beschikbaar.

serie	TTL			(H)CMOS		
	7400	74LS	74ALS	4000	74HC	74HCT
voedings- spanning	5 V	5 V	5 V	3-18 V	2-6 V	5 V
dissipatie per poort	10 mW	2 mW	1 mW	2.5 nW	2.5 nW	2.5 nW
poort vertra- gingstijd	10 ns	9.5 ns	4 ns	40 ns	9 ns	9 ns



7400: 4x 2-input NAND
 7403: 4x 2-input NAND (oc⁶)
 7408: 4x 2-input AND
 7409: 4x 2-input AND (oc)
 7432: 4x 2-input OR
 7486: 4x 2-input EXOR
 74132: 4x 2-input NAND (st⁷)



7401: 4x 2-input NAND
 7402: 4x 2-input NOR

¹Transistor-Transistor-Logic

²Low-power-Schottky

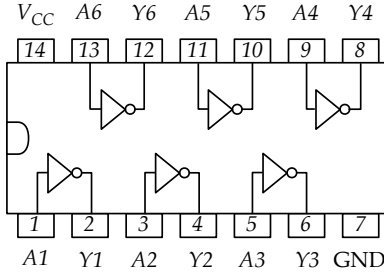
³Advanced-Low-power-Schottky

⁴High-speed CMOS

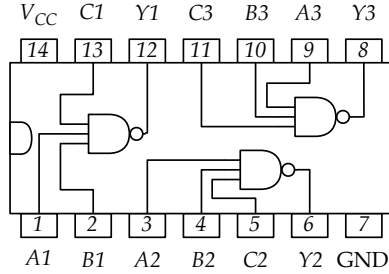
⁵High-speed CMOS met TTL ingang

⁶Open Collector uitgangen

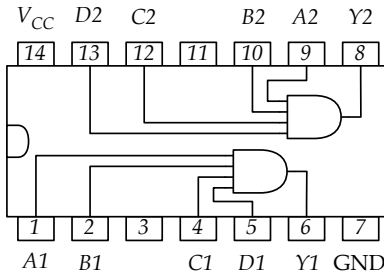
⁷Schmitt-Trigger ingangen



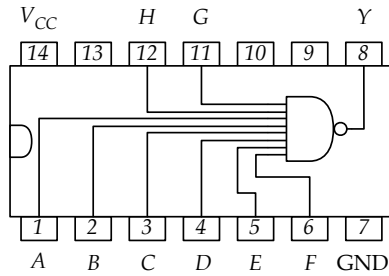
- 7404: 6x inverter
- 7405: 6x inverter (oc)
- 7406: 6x inverterende driver (oc)
- 7407: 6x niet-invert. driver(oc)
- 7414: 6x inverter (st)
- (74)4069: 6x inverter



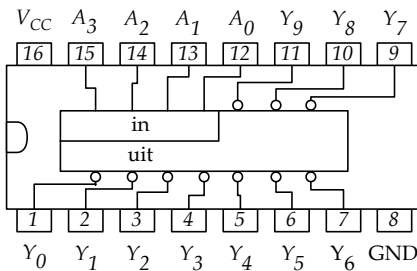
- 7410: 3x 3-input NAND
- 7411: 3x 3-input AND
- 7412: 3x 3-input NAND (oc)
- 7415: 3x 3-input AND (oc)
- 7427: 3x 3-input NOR



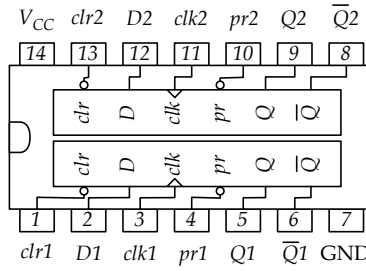
- 7420: 2x 4-input AND
- 7421: 2x 4-input NAND



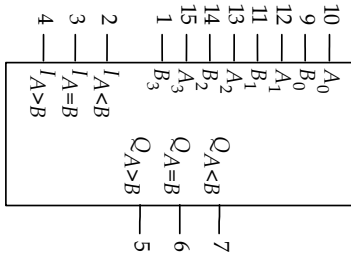
- 7430: 8-input NAND



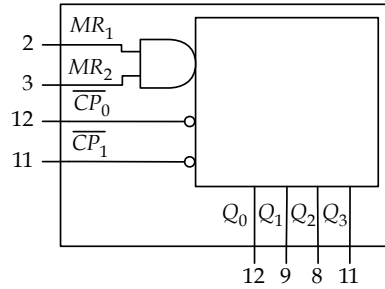
- 7442: BCD \Rightarrow decimaal dec.



- 7474: 2x D-ff, trigger pos. flank



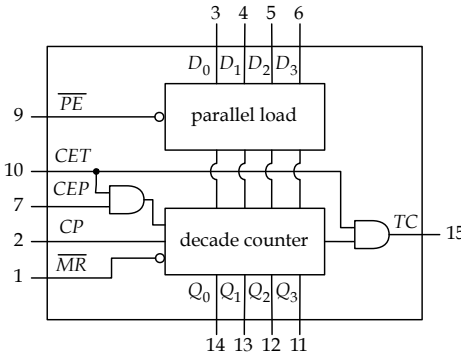
7485: 4 bit comparator



7490: decimale ripple counter

7492: tot-12 ripple counter

7493: 4 bit binaire ripple ctr



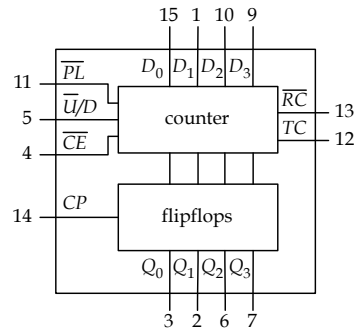
Sync. counter met sync. preset

74160: BCD, async. reset

74161: binary, async. reset

74162: BCD, sync. reset

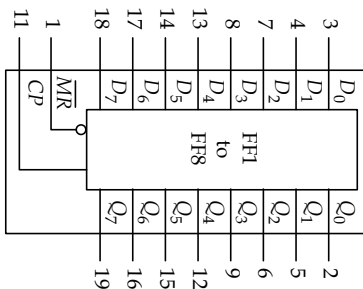
74163: binary, sync. reset



Sync. up/down counter

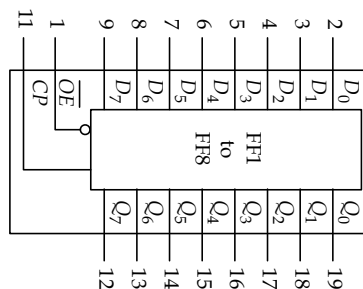
74190: BC, met preset

74191: binary, met preset



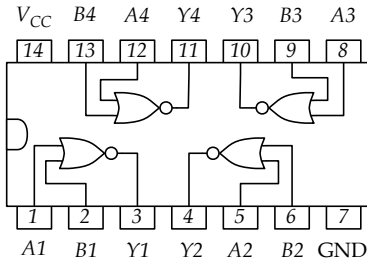
74273: D-ff, pos. flank met reset

74373: D-latch, tri-state

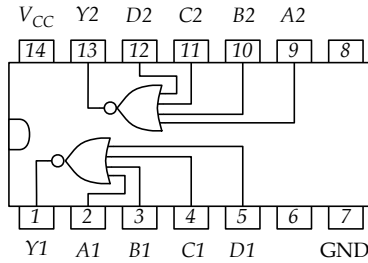


74573: D-latch, tri-state

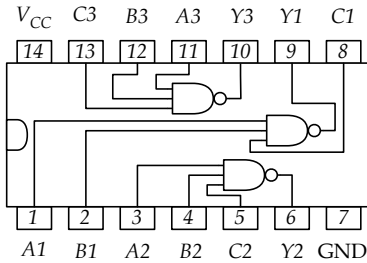
74574: D-ff, pos. flank, tri-state



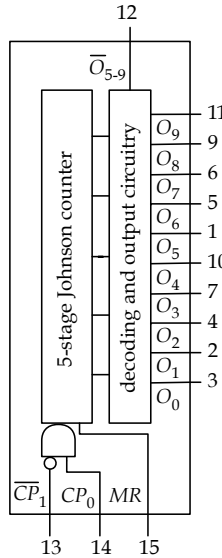
- (74)4001: 4x 2-input NOR
- (74)4011: 4x 2-input NAND
- (74)4030: 4x 2-input EXOR
- (74)4070: 4x 2-input EXOR
- (74)4071: 4x 2-input OR
- (74)4077: 4x 2-input EXNOR
- (74)4081: 4x 2-input AND
- (74)4093: 4x 2-input NAND (st)



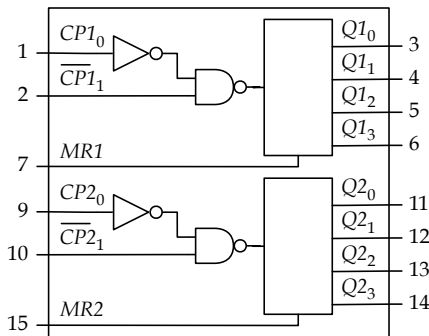
- (74)4002: 2x 4-input NOR
- (74)4082: 2x 4-input AND



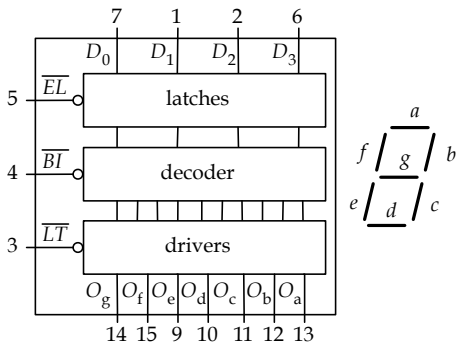
- (74)4023: 3x 3-input NAND
- (74)4035: 3x 3-input NOR
- (74)4073: 3x 3-input AND
- (74)4075: 3x 3-input OR



(74)4017: Johnson counter



- (74)4518: 2x BCD counter
- (74)4520: 2x binaire counter



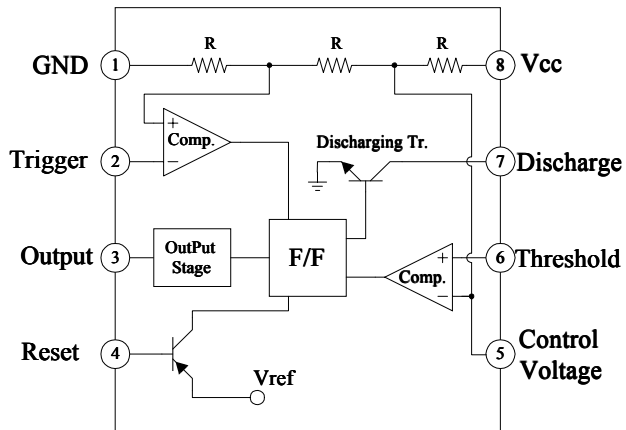
(74)4511: BCD \Rightarrow 7-segment latch

NE555

Beschrijving

De 555 timer is een zeer stabiele controller die gebruikt kan worden om nauwkeurige vertragingen of oscillaties te realiseren. De 555 kan gebruikt worden op twee manieren: monostabiel of astabiel. In de vertraging modus (monostabiel) kan de vertragingstijd worden bepaald door een externe weerstand en een condensator. In de oscillator modus (astabiel) worden de frequentie en de duty cycle bepaald door twee externe weerstanden en een condensator. Het circuit kan getriggerd en gereset worden op de neergaande flanken. Bij een hoge uitgang is de ingangsstroom ongeveer 1 mA.

- Spanning 4,5... 16 V
- Stroom 3... 6 mA
- Rise/fall time 100 ns
- Max. freq 500 kHz
- Uitgang max 200 mA



Astabiel

Figuur 8.3: NE555 intern

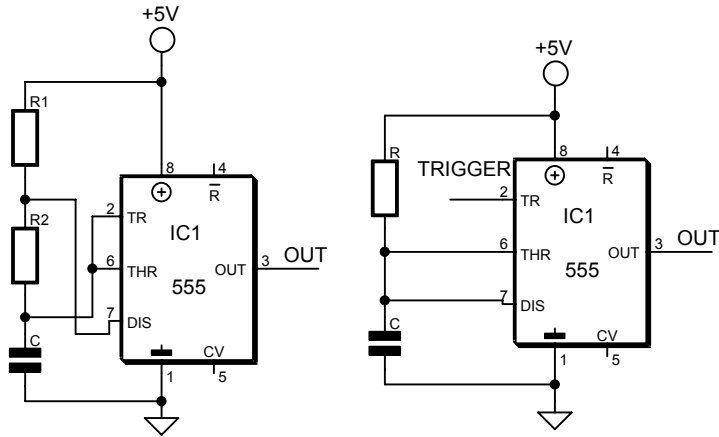
Figuur 8.4a toont het schema van de astabiele multivibrator. Deze schakeling produceert een continue blok golf. De frequentie waarop de schakeling oscilleert en de duty cycle zijn afhankelijk van de waarden van R_1 , R_2 en C . Bij een voedingsspanning van 15 V is de maximale totale weerstand ($R_1 + R_2$) = 20 M Ω .

Voor de frequentie geldt de formule:

$$f = \frac{1.44}{(R_1 + 2R_2)C} \quad (8.2)$$

De hoog tijd T_h , de laag tijd T_l en de duty cycle zijn te berekenen via:

$$T_h = 0.69(R_1 + R_2)C; \quad T_l = 0.69 \cdot R_2 \cdot C; \quad \text{Dutycycle} = \frac{T_h}{T_l}$$



Figuur 8.4: NE555 in astabiele(a) en monostabiele(b) configuratie

Monostabiel

Figuur 8.4b is de NE555 in de monostabiele modus. Hierin is de uitgang in principe laag. Als er een puls komt op de trigger ingang wordt de uitgang een bepaalde tijd hoog, afhankelijk van het externe RC netwerk. Daarna gaat de uitgang weer naar het oorspronkelijke lage niveau. De tijdsduur van de puls is te berekenen met de volgende formule $T = 1.1 \cdot R \cdot C$

Werking

De 555 timer bestaat uit twee comparatoren, een bistabiele flip-flop, een weerstanddeler, een condensator en een ontladingstransistor, zoals te zien is in figuur 8.3.

De astabiele werking is als volgt: de condensator is oorspronkelijk ongeladen. De trigger-comparator zorgt via de control-flip-flop ervoor dat de uitgang hoog is. Daardoor staat transistor T_1 uit en kan de condensator opgeladen worden via R_1 en R_2 . Zodra de condensator $2/3$ van de voedingsspanning heeft bereikt zal de threshold-comparator switchen en de uitgang laag maken. Dit heeft ook tot gevolg dat transistor T_1 gaat geleiden, waardoor de condensator zich kan ontladen via R_2 . Zodra de condensator $1/3$ van de voedingsspanning heeft bereikt zorgt de trigger-comparator ervoor dat de uitgang weer hoog wordt. Dit proces blijft zich telkens herhalen waardoor er een

onafgebroken blokgolf ontstaat.

In de monostabiele schakeling start de cyclus niet uit zichzelf, maar zorgt een externe input voor het startsignaal.

Pinbeschrijving

1. Massa

2. Trigger Deze pin kan gebruikt worden in monostabiele modus. Zodra er een puls op deze pin wordt aangeboden blijft de uitgang een bepaalde tijd hoog, afhankelijk van de externe RC waarden.

3. Output Als de output op hoog staat is de uitgangsspanning ongeveer 1.7 volt lager dan de voedingsspanning.

4. Reset Zodra aan deze pin een pulse hoger dan 0.7 volt wordt gegeven, switcht de uitgang in 0.5 μ s naar een laag niveau. Als deze pin niet gebruikt wordt, is het aan te raden om hem aan de Vcc vast te maken. Dit om een ongewilde reset te voorkomen.

5. Control Voltage Deze pin is direct verbonden met de bovenste comparator. Door op deze pin een voltage te zetten, is het mogelijk om de timing, onafhankelijk van het RC netwerk, te variëren. In de monostabiele modus mag het control voltage variëren van 45 tot 90% van de voedingsspanning, waarmee de breedte van de pulsen gecontroleerd kan worden. In astabiele modus mag het control voltage variëren tussen 1.7V tot de voedingsspanning. Door het signaal op deze pin te variëren wordt een frequentie gemoduleerd signaal verkregen. Als deze pin niet gebruikt wordt is het aan te raden hem via een 10nF condensator aan massa te verbinden, om ruis te onderdrukken.

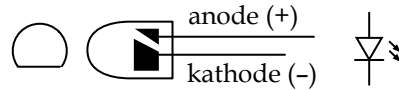
6. Threshold Deze pin bepaalt of er oscillatie plaatsvindt. Als het voltage van deze pin boven $2/3$ van de voedingsspanning komt zal de uitgang laag blijven.

7. Discharge via deze pin ontlad de NE555 de condensator (open collector uitgang)

8. V_{cc} Bereik van 4,5... 16 Volt

Displays

LED's



LED's¹ zijn waarschijnlijk de meest gebruikte displays. Standaard LED's werken op een stroom van 1 ... 20 mA. De spanning over de LED (de **voorwaartsspanning**) is afhankelijk van de kleur, zoals is aangegeven in tabel 8.11. De helderheid is redelijk evenredig met de stroom. Het beste kan een LED dus worden aangestuurd door een bron met stroombronkarakter. De voorwaartsspanning wordt namelijk beïnvloed door de temperatuur, waardoor de helderheid van een LED die direct op een spanningsbron is aangesloten erg kan variëren.

Om een LED vanuit een spanningsbron te voeden kan een serieweerstand worden gebruikt. De waarde kan worden berekend met:

$$R = \frac{V_s - V_f}{I} \quad (8.3)$$

Hierin is R de weerstand in Ω , V_s de voedingsspanning in volt, V_f de voorwaartsspanning van de LED in volt en I de stroom door de LED in ampère. Wanneer meerdere LED's tegelijkertijd gebruikt worden, kunnen deze in serie worden gezet, waarbij de voorwaartsspanningen moeten worden opgeteld. Het spreekt voor zich dat de totale voorwaartsspanning niet hoger mag worden dan de voedingsspanning. Het beste kan een verschil van minimaal 1V worden aangehouden, zodat de stroom niet te veel varieert als gevolg van variaties in de voedingsspanning of de voorwaartsspanning van de LED's

Als meer LED's nodig zijn dan er in serie geschakeld kunnen worden moeten LED's parallel worden gebruikt. Het is dan wel van belang elke LED of serieschakeling van LED's hun eigen voorschakelweerstand te geven. LED's die rechtstreeks parallel staan zijn af te raden omdat er altijd kleine verschillen zijn in voorwaartsspanning waardoor één LED feller zal gaan branden dan de andere. Twee verschillende LED's direct parallel zetten werkt helemaal niet omdat de voorwaartsspanningen dan verschillend zijn.

¹Light Emitting Diode

Kleur	Infrarood	Rood	Oranje	Geel	Groen	Blauw	Wit
Spanning [V]	1,3	1,6	1,8	2	2,1	3,4-3,8	3,4-3,8

Tabel 8.11: Voorwaartsspanning van LED's per kleur

Multiplexen Wanneer vele LED's moeten worden aangestuurd, bijvoorbeeld in een weergave bestaande uit meerdere **7-segment displays**, kan de aansturing worden versimpeld door het display te **multiplexen**. Hierbij worden de LED's geordend in een matrix, waarbij de kathodes van alle LED's per rij worden doorverbonden en de anodes van alle LED's per kolom (of andersom). Nu worden achtereenvolgens de rijen geactiveerd, terwijl per rij op de de juiste kolommen worden geactiveerd om de gewenste LED's te laten oplichten.

Bij het gebruik van 7-segment displays is het van belang erop te letten of intern alle kathodes zijn doorverbonden (cc, common cathode) of juist de anodes (ca, common anode).

Het is bij het multiplexen belangrijk dat de multiplex-ratio niet te hoog wordt: als er bijvoorbeeld 8 rijen worden afgelopen staat elke LED hooguit $\frac{1}{8}$ van de tijd aan, waardoor de helderheid afneemt. Vooral als een display ook bij helder licht moet worden afgelezen, kan dit een probleem vormen.

LCD's

Een LCD¹ bestaat uit twee glasplaten met daartussen vloeibare kristallen. Op de glasplaten zijn polarisatiefilters aangebracht. Wanneer het display wordt geactiveerd beïnvloeden de kristallen de lichtpolarisatie zodanig dat het display zwart wordt.

Bij het gebruik van LCD's is het van het grootste belang dat het aansturende signaal geen DC-component mag hebben. Dat veroorzaakt namelijk elektrolyse waardoor het display stuk gaat.

Ongemultiplexte LCD's Bij displays tot ongeveer dertig segmenten wordt vaak geen multiplexing toegepast. Deze displays hebben één common aansluiting en verder een aansluiting voor ieder segment. Op de common aansluiting wordt een blok golf aangebracht van 5V met een frequentie tussen de 30 en 100Hz. Segmenten worden aangeschakeld door een signaal in tegenfase aan te bieden op de segmentaansluiting; segmenten die een signaal krijgen in fase met de common aansluiting gaan uit.

De gebruikte signalen mogen een DC-offset hebben, er kunnen dus gewone logische TTL of CMOS signalen worden gebruikt. Het is wel heel belangrijk dat de duty-cycle exact 50% is, anders ontstaat een DC stroom. Vaak wordt een teller of flipflop gebruikt om een referentieklok te delen door twee, waardoor een signaal met precies 50% duty-cycle ontstaat.

¹Liquid Crystal Display

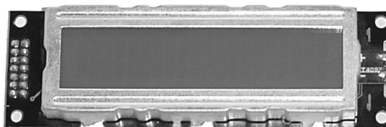
Gemultiplexte LCD's Gemultiplexte LCD's hebben meerdere common aansluitingen. Het aansturen hiervan is erg ingewikkeld en vereist signalen die verschillende waarden tussen 0 en de voedingsspanning kunnen aannemen. Dit komt doordat, in tegenstelling tot LED's, LCD segmenten geen ingebouwde diode hebben, waardoor de polariteit niet uitmaakt. Hierdoor kan er stroom van één common aansluiting via twee segmenten naar een andere common aansluiting lopen: meerdere segmenten zullen vaag oplichten.

Voor het aansturen van gemultiplexte LCD's is dus altijd een LCD controller nodig. Er zijn microcontrollers met een ingebouwde LCD controller. Om de aansluitingen van een onbekend LCD te vinden is een signaal nodig van ongeveer 5V, met een frequentie van tussen de 30 en 100Hz met een duty-cycle van 50%; en het geïnverteerde signaal. Met behulp van een oscillator, een tweedeler en een inverter kunnen deze signalen worden gemaakt. Vervolgens worden alle combinaties van twee pennen afgelopen. Als er een combinatie is waarbij segmenten enkel vaag oplichten, dan zijn die twee pennen óf twee segmentlijnen, óf twee common lijnen. Zo wordt het display verdeeld in twee groepen: de segmenten en de commons. De kleinste groep zijn de commons, dit zijn er meestal maximaal vier.

Text LCD's Voor een eenvoudige bediening van een apparaat kan een textueel LCD erg handig zijn. Vaak wordt gebruik gemaakt van een LCD-module met ingebouwde controller **HD44780** of compatible. Een foto van een dergelijke module staat in figuur 8.5. Deze modules zijn eenvoudig aan te sturen. De interface heeft twee registers: één voor commando's en één voor data. Het niveau op de RS¹ pin bepaalt welk register wordt aangesproken (1 voor data, 0 voor commando's). De R/W pin geeft aan of er gelezen of geschreven moet worden. Elke actie wordt uitgevoerd door pin E² een positieve puls te geven. Om het contrast in te stellen moet een variabele spanning tussen 0 en 5V worden aangebracht op pin V_{LCD}. Vaak wordt hiervoor een instelpotmeter gebruikt. De pinout van deze LCD's is te vinden in tabel 8.12. Pin 15 en 16

¹Register Select

²Enable



Figuur 8.5: Een textuele LCD module met controller

zijn niet altijd aanwezig; een externe weerstand moet worden gebruikt om de stroom door de backlight te begrenzen.

Deze LCD-modules kunnen worden gebruikt in 4-bit of 8-bit mode. In 4-bit mode worden alleen de hoogste 4 bits gebruikt, bit 3...0 worden niet verbonden (niet met massa verbinden anders ontstaan problemen bij het uitlezen). Elke actie vereist nu twee pulsen van het Enable signaal, waarbij het hoogste nibble eerst wordt verstuurd.

Wanneer commando's worden uitgevoerd kan het nodig zijn even te wachten tot het display het vorige commando heeft verwerkt. Dit duurt maximaal 2ms voor de 'Wis scherm' en 'Zet cursor links boven' commando's, en maximaal 40 μ s voor de overige commando's. Door de Busy Flag uit te lezen uit het commando register kan worden bepaald of het LCD klaar is om nieuwe commando's of data te ontvangen. Voor veel toepassingen is het niet nodig de gegevens uit het LCD terug te lezen. In dat geval kan R/ \overline{W} met massa worden verbonden. Het uitlezen van de Busy Flag is dan niet meer mogelijk, zodat altijd de maximale tijd moet worden gewacht alvorens een nieuw commando uit te voeren.

Text LCD-modules hebben ook de mogelijkheid zelf karakters te definiëren om bijvoorbeeld symbolen weer te geven. Bitmap data kan worden ingesteld door het commando 'CG adres instellen'¹ gevolgd door 'Data schrijven'. Na 'DD adres instellen'² kunnen ASCII karakters worden geschreven met 'Data schrijven'; karakters 0...7 zijn de zelf gedefinieerde karakters. Let op dat de display data voor de tweede regel begint op adres 0x40.

Een overzicht van alle commando's is te vinden in tabel 8.13.

Initialisatie Bij de initialisatie is de belangrijkste instelling de 4- of 8-bits mode. Het is het beste er van uit te gaan dat de initiële mode onbekend is. Door eerst drie maal het commando 0 0 1 1 0 0 0 0 te geven is het zeker dat het display naar 8-bits mode gaat. Wanneer het display nog in 4-bits

¹CG=character generator

²DD=display data

pin	functie	pin	functie	pin	functie
1	GND	4	RS	7...14	D0...D7
2	+5V	5	R/ \overline{W}	15	Backlight +
3	V _{LCD}	6	E	16	Backlight -

Tabel 8.12: De pinout van textuele LCD's

Code										Beschrijving	
RS	R/W	D7	D6	D5	D4	D3	D2	D1	D0		
0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	Wis scherm en zet cursor links boven	
0	0	0	0	0	0	0	0	1	x	Zet cursor links boven	
0	0	0	0	0	0	0	1	V/A	S	Na schrijven: cursor (V)oor- of (A)chteruit, (S)chuiven display ja/nee	
0	0	0	0	0	0	1	D	C	K	(D)isplay, (C)ursor, (K)nipperen cursor aan/uit	
0	0	0	0	0	1	S/C	R/L	x	x	Schuif (D)isplay/(C)ursor (R)echts of (L)inks	
0	0	0	0	1	DB	L	F	x	x	Configuratie, zie tekst	
0	0	0	1	CG adres							CG adres instellen
0	0	1	DD adres							DD adres instellen	
0	1	BF	adres							Busy Flag en adres lezen	
1	0	data							Data schrijven		
1	1	data							Data lezen		

Tabel 8.13: De commandoset van textuele LCD's

mode stond, zou het eerste commando kunnen worden geïnterpreteerd als het tweede nibble van een commando; de volgende twee commando's vormen dan samen 0 0 1 1 0 0 1 1 (bedenk dat de D7... D4 de databus zijn in 4-bits mode).

Als de 8-bits mode verzekerd is kan het werkelijke initialisatiecommando worden uitgevoerd. Voor de 8-bits mode is dit 0 0 1 1 N F x x. Hierin is N het aantal regels van het display (0:1 regel, 1:2 regels) en F het font (0:5x7 pixels, 1:5x10 pixels, deze laatste is vaak niet beschikbaar). Let op: het aantal regels is niet altijd gelijk aan het fysieke aantal regels. Sommige 16 x 1 regel zien er softwarematig uit als 8 x 2.

Om de 4-bits mode te activeren wordt eerst het commando 0 0 1 0 uitgevoerd. Het display staat daarvoor nog in 8-bits mode, dus feitelijk wordt 0 0 1 0 0 0 0 0 uitgevoerd. Dan schakelt het display om naar 4-bits mode en kan het commando 0 0 1 0; N F x x worden uitgevoerd.

De initialisatie wordt afgerond met een 'Wis scherm' commando.

Grafische LCD's met controller Grafische LCD's met controller bestaan er in vele soorten en maten. Er is niet, zoals bij textuele displays, één standaard controller. Meestal worden grafische LCD's met controller aangestuurd via

een 8-bits databus zoals textuele displays, maar er bestaan ook varianten met I²C of SPI aansluiting. Sommige controllers hebben een ingebouwde karaktergenerator om tekst te laten zien, maar als die afwezig is, moet de aansturende software zelf de karakters als bitmap genereren.

Grafische LCD's zonder controller Grafische LCD's zonder controller zijn zeer lastig aan te sturen. Het is bij deze typen nodig continu het beeld te verversen, vaak rond de 50 keer per seconde. Dit betekent, vooral voor grotere displays, dat een hoge datarate nodig is. Hierdoor is het voor bijvoorbeeld een microcontroller moeilijk of niet bij te houden. Het aansturen hiervan is soms mogelijk, maar kost veel meer moeite dan een display met ingebouwde controller.

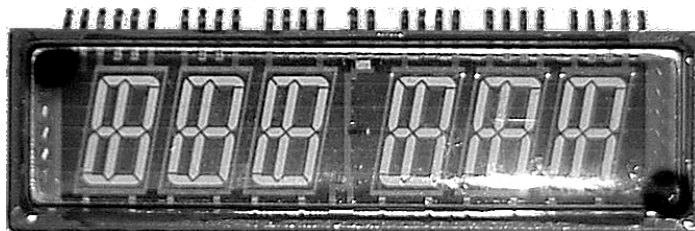
VFD's

Een VFD¹ is een type display dat zelf licht geeft, in tegenstelling tot een LCD. Dit type displays, dat meestal een blauw-groene kleur heeft, wordt vaak toegepast in videorecorders. In figuur 8.6 is een VFD te zien.

Werking Een VFD bestaat uit een vacuüm glazen huis met daarin filiament draden, grids en segmenten. Door de filiament draden, die zijn gemaakt van wolfram, loopt een stroom waardoor deze warm worden en vrije elektronen gaan afstralen. Deze elektronen worden aangetrokken door de segmenten, die een positieve spanning voeren ten opzichte van de filiament draden. Als de elektronen op de segmenten botsen licht het fosfor op de segmenten op.

Met behulp van de grids kan het display worden gemultiplext. Elektronen kunnen slechts dan op de segmenten terecht komen, wanneer het bovenliggende grid positief is ten opzichte van het filament.

¹Vacuum Fluorescent Display



Figuur 8.6: Een 6-digit VFD module

Om statische oplading van het glas door de vrije elektronen te voorkomen is er vaak een metalen clip binnenin de behuizing die verbinding maakt met het glas, waar een transparante geleidende laag op is aangebracht. Deze aansluiting moet met de massa van de schakeling worden verbonden.

In de hoekpunten zijn op de foto zwarte *getter* vlekken te zien. Deze vangen molecuulresten op die door de naden naar binnen komen in de loop der tijd. Hierdoor blijft het vacuüm in stand.

Identificatie Voor de aansturing van een VFD zijn twee spanningen nodig: één voor het filament en één voor de aansturing van de grids en de segmenten. Om een onbekende VFD aan te sturen worden eerst de filament aansluitingen opgezocht. Door het glas is vaak te zien aan welke pinnen het filament is verbonden; dit zijn bijna altijd de buitenste aansluitingen. Met behulp van een labvoeding wordt de geschikte stroom gezocht, zodanig dat het filament net een heel klein beetje rood oplicht. Afhankelijk van het type display zal de spanning in de orde van 5V liggen en de stroom enkele honderden mA bedragen.

Vervolgens wordt een tweede voeding gebruikt voor het aansturen van de segmenten en grids. Om het hele display op te laten lichten worden alle overige aansluitingen doorverbonden. Tussen deze aansluitingen en één van de filament draden wordt de tweede spanning aangebracht, en opgehoogd tot de gewenste lichtintensiteit is gevonden. Hierna kunnen één voor één aansluitingen worden losgemaakt om de individuele segmenten en grids te identificeren. De grid- en segmentspanning zal in de orde van 15V liggen, maar bij hoge multiplex rates kan een hogere spanning nodig zijn om voldoende helderheid te krijgen.

Aansturing Een probleem bij de aansturing van VFD's is dat de spanning over het filament verloopt met de plaats. Hierdoor is er links op het display een andere spanning tussen het filament en het grid en de segmenten dan rechts, waardoor helderheidsverschillen ontstaan. Een manier om dit op te lossen is het filament te voeden vanuit wisselspanning. Er moet dan echter wel op gelet worden dat geen interferentie ontstaat tussen de filamentspanning en de multiplexrate. Een andere oplossing is om bij het multiplexen de grids aan de ene kant iets langer te activeren dan grids aan de andere kant, om zo het verschil in helderheid te compenseren.

Voor het aansturen van de segmenten en de grids zijn drivers nodig die de gebruikte spanning aankunnen. Hiervoor kunnen IC's worden toegepast maar de drivers kunnen ook met discrete transistoren worden opgebouwd.

Thermokoppels

Thermokoppels kunnen worden gebruikt om een temperatuur te meten. De verschillende typen en de bijbehorende kleuren staan hieronder.

Type indicatie	materialen [a; b]	gevoeligheid [$\mu\text{V K}^{-1}$]	bereik [°C]
B (platina-rhodium)	70%Pt+30%Rh; 94%Pt+6%Rh	10 (bij 1600°C)	0 tot 1800
C (tungsten-renium)	95%W+5%Re; 74%W+26%Re	15	0 tot 2200
D (tungsten-renium)	97%W+3%Re; 75%W+25%Re	19	0 tot 2200
E (chromel-constantaan)	90%Ni+10%Cr; 60%Cu+40%Ni	60 (bij 0°C)	-200 tot 900
J (ijzer-constantaan)	Fe, 60%Cu+40%Ni	45 (bij 0°C)	-210 tot 760
K (chromel-alumel)	90%Ni+10%Cr; 94%Ni+2%Al+rest	39 (bij 0°C)	-184 tot 1260
N (microsil-nisil)	85%Ni+14%Cr+1%Si; 96%Ni+4%Si+0,1%Mg	10	0 tot 1250
R (platina-rhodium)	Pt; 87%Pt+13%Rh	14 (bij 1600°C)	-50 tot 1600
S (platina-rhodium)	Pt; 90%Pt+10%Rh	10 (bij 1000°C)	-50 tot 1600
T (koper-constantaan)	Cu; 60%Cu+40%Ni	40 (bij 0°C)	-200 tot 400

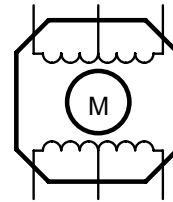
Type		Verenigde Staten ASTM	Brits BS1843:1953	Brits BS4937:1993	=IEC 584-3	Frans NFE	Duits DIN	Japans
J	mantel	zwart	zwart	zwart	zwart	blauw	geel	
	plus	wit	geel	zwart	geel	rood	rood	
	min	rood	blauw	wit	zwart	blauw	wit	
K	mantel	geel	rood	groen	geel	groen	blauw	
	plus	geel	bruin	groen	geel	rood	rood	
	min	rood	blauw	wit	paars	groen	wit	
T	mantel	blauw	blauw	bruin	blauw	bruin	bruin	
	plus	blauw	wit	bruin	geel	rood	rood	
	min	rood	blauw	wit	blauw	bruin	wit	
R/S	mantel	groen	groen	oranje	groen	wit	zwart	
	plus	zwart	blauw	oranje	geel	rood	rood	
	min	rood	wit	wit	groen	wit	wit	
B	mantel	grijs	grijs	grijs		grijs		
	plus	grijs	grijs	grijs		rood		
	min	rood	wit	wit		wit		

Stappenmotoren

Er zijn twee belangrijke soorten stappenmotoren: unipolair of bipolair. Een unipolaire stappenmotor heeft vijf, zes of acht draden. Een bipolaire heeft er vier.

Unipolaire stappenmotor

Een unipolaire stappenmotor heeft twee spoelen met elk een middenaftakking. Om te bepalen welke draden aan de spoelen zitten kun je de volgende truc gebruiken: als je de spoel kortsluit, zal de as van de motor een stuk moeilijker ronddraaien. De middenaftakking kun je vinden door met een multimeter de weerstand te meten: de weerstand tussen een uiteinde van de spoel en de middenaftakking is precies de helft van de weerstand tussen twee uiteinden van de spoel. Vaak staat de weerstand van een halve spoel op de motor gedrukt ($5 \Omega/\text{fase}$).

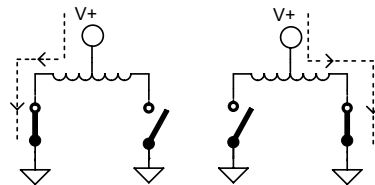


Figuur 8.7: Symbool unipolaire stappenmotor

Om een stappenmotor te laten draaien wordt gebruik gemaakt van het omkeren van de richting van de stroom in de spoelen. Omdat er twee spoelen zijn en twee stroomrichtingen, wordt er een aansturing in vier stappen gebruikt. Doordat de manier van inbouw van de spoelen in de motor wordt er een grote nauwkeurigheid gerealiseerd. De vier stappen moeten dan ook per omwenteling vaak doorlopen worden.

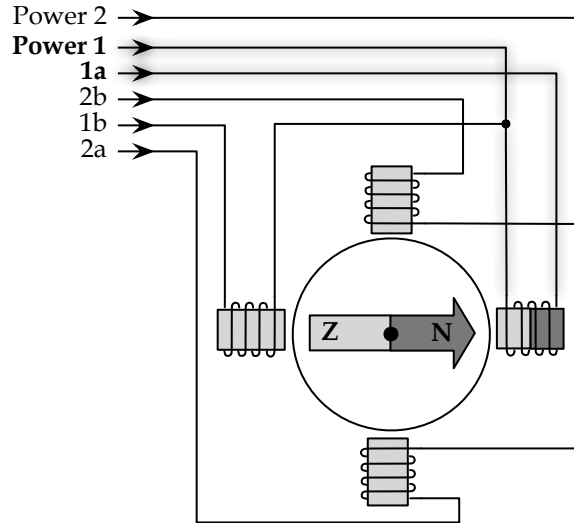
Het omdraaien van de stroom wordt gerealiseerd door de middenaftakking aan de positieve voedingsspanning te leggen en afwisselend één van de twee uiteinden van de spoel te aarden.

Figuur 8.9 geeft een conceptueel model van een unipolaire stappenmotor. Om de motor een stap verder te laten gaan wordt 2a bekrachtigd, en 1a stroomloos gemaakt. Als 1a en 2a allebei bekrachtigd worden, zal de rotor halverwege blijven staan.



Figuur 8.8: Omdraaien stroomrichting

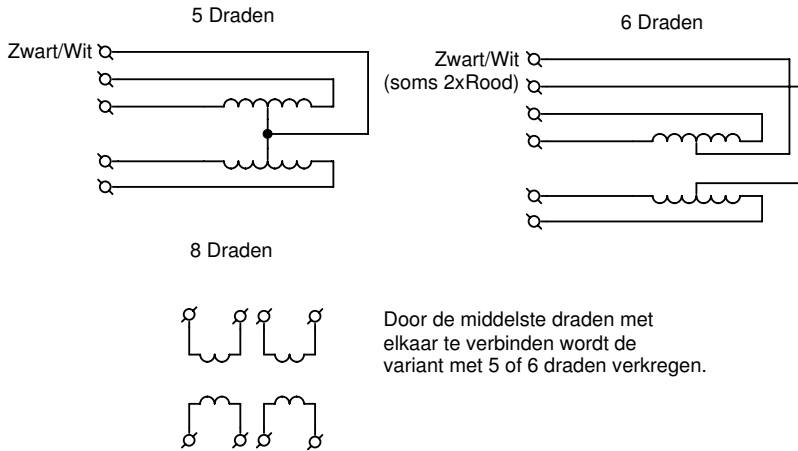
Aansturing Er zijn verschillende manieren om een stappenmotor aan te sturen. In tabel 8.14 zijn de drie belangrijkste beschreven. Een 1 betekent dat de spoel bekrachtigd is, een 0 staat voor stroomloos.



Figuur 8.9: Model van een stappenmotor

volgorde	naam	beschrijving
0001	<i>wave drive,</i>	Verbruikt het minste vermogen. Garandeert de beste positienuwkeurigheid
0010	<i>one phase</i>	
0100		
1000		
0011	<i>hi-torque,</i>	Verbruikt meer vermogen, maar levert ook meer koppel
0110	<i>two phase</i>	
1100		
1001		
0001	<i>half-step</i>	Vergroot de resolutie van de positie van de rotor, maar het koppel is niet uniform. Er is kans op resonantie. (Resonantie zorgt er soms voor dat de motor vastloopt)
0011		
0010		
0110		
0100		
1100		
1000		
1001		

Tabel 8.14: De belangrijkste aanstuurpatronen voor stappenmotoren



Figuur 8.10: Identificatie

Uitvoeringen Unipolaire stappenmotoren bestaan in uitvoeringen met 5, 6 of 8 draden. In figuur 8.10 zijn die varianten weergegeven.

Aansluiten Sluit de twee middenaftakkingen aan op de positieve voedingsspanning. Vervolgens kan je de vier overige draden in elke volgorde aansluiten op de motorcontroller. Als het niet werkt, hoef je slechts deze verwisselingen uit te voeren:

A B D C (willekeurige aansluitvolgorde),

A B C D (laatste twee verwisselen),

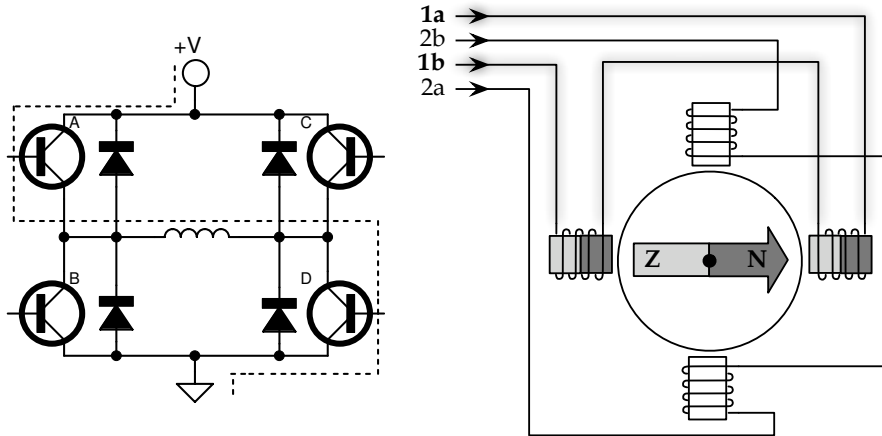
A C B D (middelste twee verwisselen),

Denk bij het aansluiten aan de maximale stroom die door de motorspoelen mag lopen! Gebruik desnoods een weerstand om de stroom te beperken.

Bipolaire stappenmotoren

Werking Een bipolaire stappenmotor heeft geen middenaftakkingen in de spoelen, zoals een unipolaire stappenmotor. Daarom moet de controller in staat zijn de polariteit daadwerkelijk om te draaien. Vandaar de naam 'bipolair'. Dit geeft dus een ingewikkeldere controller, hier krijg je dan wel een groter koppel voor terug.

Om de stroom door de spoelen om te keren, wordt gebruik gemaakt van een zogenaamde H-brug (linker figuur).



Wanneer transistoren A en D geleiden zijn, loopt de stroom van links naar rechts, als C en B geleiden, loopt de stroom van rechts naar links. Omdat er twee spoelen in de motor zitten, zijn er ook twee H-bruggen nodig.

In de rechter figuur is spoel 1 geactiveerd. Om de motor te laten draaien wordt spoel 1 stroomloos gemaakt en spoel twee geactiveerd. Vervolgens wordt spoel 2 stroomloos gemaakt en door spoel 1 wordt een stroom in tegengestelde richting geleid, etc.

Aansturen Ook bij een bipolaire stappenmotor zijn er verschillende manieren om de motor aan te sturen. Deze zijn hetzelfde als bij de unipolaire stappenmotor.

Aansluiten Sluit de vier draden in willekeurige volgorde aan op de controller. Als het niet werkt hoef je slechts deze verwisselingen uit te voeren:

A B D C (willekeurige aansluitvolgorde)

A B C D (laatste twee verwisselen)

A C B D (middelste twee verwisselen)

Denk bij het aansluiten aan de maximale stroom die door de motorspoelen mag lopen! Gebruik desnoods een weerstand om de stroom te beperken.

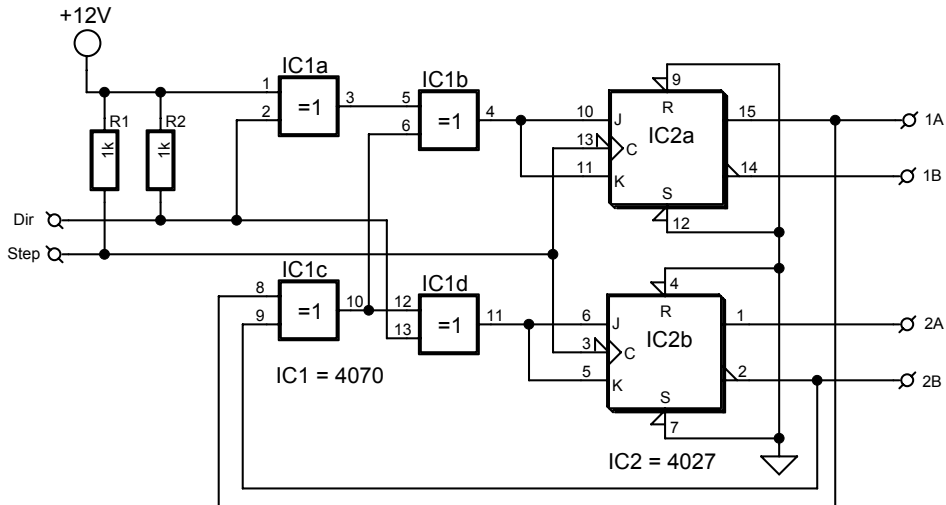
De unipolaire stappenmotor als bipolaire stappenmotor

Een voordeel van een bipolaire controller is dat je er ook unipolaire motoren mee kunt aansturen. De middenaftakkingen worden dan simpelweg niet aangesloten. Om hogere toerentallen te kunnen bereiken wordt ook wel eens een uiteinde van de spoel niet aangesloten en in plaats daarvan de middenaftakking gebruikt.

Controller

Single-chip oplossingen voor een controller voor een stappenmotor zijn vaak erg duur. Het voordeel van single-chip oplossingen is wel dat deze vaak ook een ingebouwde stroomregeling hebben. Voor het genereren van het juiste patroon om de spoelen aan te sturen wordt vaak gebruik gemaakt van een microcontroller. Voor degenen die dit liever in hardware oplossen staat in figuur 8.11 een controller die je kunt gebruiken, met de keuze uit twee eindtrappen (één voor één unipolaire en een voor een bipolaire stappenmotor).

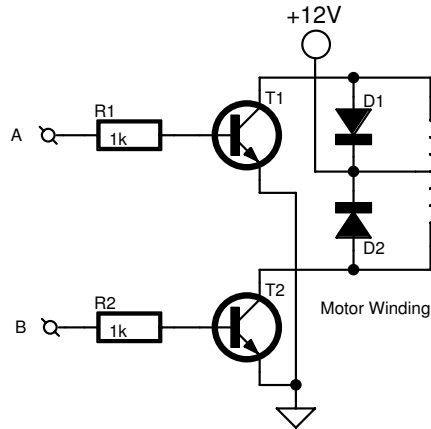
Bij elke puls op STEP draait de motor een stap verder. Deze puls kun je genereren met bijvoorbeeld een microcontroller of een simpele pulsgenerator met behulp van een NE555. Met 'DIR' wordt de draairichting van de motor



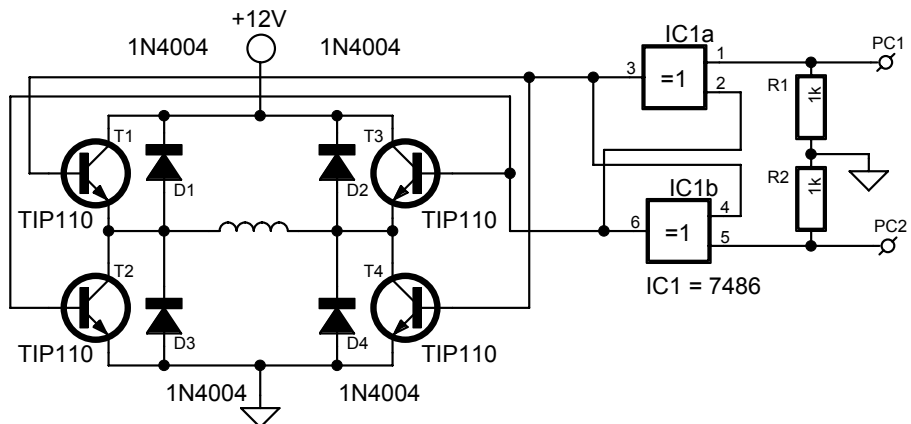
Figuur 8.11: Controller voor het aansturen van stappenmotoren

bepaald.

In figuur 8.12 staat de unipolaire eindtrap. Per controller zijn twee eindtrappen nodig, voor elke winding één. Voor een bipolaire stappenmotor zijn twee H-bridgen nodig zoals getoond in figuur 8.13.



Figuur 8.12: Unipolaire eindtrap voor de stappenmotor-controller



Figuur 8.13: Bipolaire eindtrap voor de stappenmotor-controller

Printplaten etsen

Een **printplaat** of PCB¹ is de basis van bijna iedere schakeling. Voor simple schakelingen waarvan er slechts één gemaakt hoeft te worden, is het gebruik van experimenteerprint vaak de snelste oplossing. Voor ingewikkeldere schakelingen, voor grotere aantallen of als SMD componenten worden toegepast, is het vaak beter een ‘custom’ printplaat te gebruiken. Het maken van een printplaat kan door te etsen of te frezen. Frezen vereist een dure machine, ook als deze zelf wordt gebouwd, en de kwaliteit die behaald kan worden is niet hoger dan met etsen.

Er zijn meerdere manieren om het printontwerp op de te etsen print over te brengen. Dit kan onder andere door te belichten, over te tekenen, te strijken of te plotten. Welke methode ook gebruikt wordt, het is belangrijk telkens alle procesparameters (belichtingstijd, concentratie etsmiddel, temperatuur, gebruikte materialen, enz.) en de kwaliteit van het resultaat te noteren zodat je de volgende keer (dat zou over een half jaar kunnen zijn) weer dezelfde, of betere, kwaliteit krijgt.

Kale koperprinten moeten van te voren goed schoongemaakt worden met staalwol, zodat er geen oxidatie meer op het koper zit. Na het etsen is de inkt die de banen afdekt er met staalwol makkelijk af te halen. Etsen kan bijvoorbeeld met **ijzertrichloride** of **natriumpersulfaat**. De laatste is duurder, maar geeft een scherper resultaat en is minder agressief. Bedenk dat bij het maken van printen goedkoop duurkoop is, omdat slechte basismaterialen leiden tot meer mislukte printjes en daarmee verspilde tijd en materialen.

Bij printplaten is er keuze uit verschillende basismaterialen, het materiaal dat onder het koper zit. Printen op basis van epoxymateriaal (FR4) zijn veelal te verkiezen boven goedkopere alternatieven omdat die mechanisch van veel mindere kwaliteit zijn.

Belichten met fotogevoelige printplaat

Met deze methode zijn heel nauwkeurige printplaten te maken, die ook voor SMD componenten geschikt zijn. Er zijn wel veel materialen nodig: fotogevoelige printplaat, een belichtingsbak, ontwikkelaar en natuurlijk etsmiddel. In tegenstelling tot wat velen denken, is het niet nodig transparanten te gebruiken. UV-licht gaat namelijk ook door gewoon papier heen. Het gebruik van gewoon papier is daarom zelfs aan te bevelen, omdat de afdruk op papier zwarter wordt dan op transparanten.

¹Printed Circuit Board

Bij het afrukken is het belangrijk om in spiegelbeeld af te drukken. Hierdoor kan tijdens het belichten de bedrukte kant op de printplaat worden gelegd, waardoor de lijnen scherper worden. Zet op het printontwerp ergens een tekst, zodat je makkelijk kunt zien dat je de print niet per ongeluk in spiegelbeeld maakt.

De afdruk kan vervolgens worden gebruikt om de print te belichten. Als belichtingsbak kan heel goed een oude scanner worden gebruikt, waar het binnenwerk uit wordt gehaald, en UV-lampen uit een gezichtsbruiner in worden gemonteerd. Een dergelijke omgebouwde scanner staat afgebeeld in figuur 8.14. Het is belangrijk dat het geheel tijdens het belichten goed wordt aangedrukt. De belichtingstijd is in de orde grootte van enkele minuten, maar dit is heel erg afhankelijk van de gebruikte materialen. De benodigde tijd moet met kleine proefstukjes worden bepaald.

Na het belichten moet de print worden ontwikkeld. Dit kan in een **natriumhydroxydeoplossing** onder rustig bewegen. De oplossing moet lauwwarm zijn. Het resultaat moet na minder dan een minuut zichtbaar zijn. Het is op het oog goed te bepalen wanneer de print klaar is. Laat de print nog even iets langer in de ontwikkelaar, zodat er zeker geen haarlijntjes blijven staan.

Na het ontwikkelen moet de print eerst goed worden afgespoeld, want de ontwikkelaar en het etsmiddel mogen niet met elkaar in contact komen! Het etsen moet gebeuren op ongeveer vijftig graden. Het proces wordt versneld door de oplossing in beweging te houden. Een theelichtje kan hier helpen om het etsmiddel op temperatuur te houden. Let wel op dat de gebruikte bak niet smelt. Voor kleinere printjes kunnen de kan en de warmhoudplaat van een koffiezetapparaat worden gebruikt, maar let op dat het etsmiddel niet te warm wordt. Gebruik een glazen thermometer om de temperatuur te controleren.



Figuur 8.14: Lichtbak

Overtekenen op koperprintplaat

De simpelste manier om snel printjes te maken is deze over te tekenen op een koperprintplaat. Hierbij zijn enkel een goede watervaste stift, een koperprint en etsmiddel nodig. Teken de layout direct op de print, fouten kunnen met alcohol en een wattenstaafje verholpen worden. Het is duidelijk dat dit niet een nette print op zal leveren, maar voor een simpele voedingsprint kan deze methode geschikt zijn.

Strijken op koperprintplaat

Met behulp van een laserprinter en een strijkbout kunnen snel en simpel printjes worden gemaakt. Deze methode is wel minder geschikt voor SMD componenten. De laserprinter moet zo worden ingesteld dat deze de meeste toner op het papier overbrengt, dus de meest donkere instelling. Tevens zijn een strijkplank en een theedoek nodig. De strijkbout wordt vantevoren aangezet, zodat deze warm is op het moment dat de print klaar is. Hierdoor wordt er zoveel mogelijk toner overgebracht op de kale print. Leg de printplaat op de strijkplank en print de layout gespiegeld uit. Leg de layout op de printplaat en leg hier de theedoek overheen. Strijk vervolgens de theedoek gedurende ongeveer 2 minuten. Kijk vervolgens voorzichtig aan een hoekje of de toner is overgedragen op het koper. Zo niet, strijk dan voorzichtig over het papier zonder de theedoek, maar pas op dat dit niet verbrandt. Als de toner is overgedragen, kan het papier eraf worden gehaald en kunnen met een etsstift eventueel niet goed overgebrachte delen verder ingekleurd worden. Hierna kan de print geëtsd worden en vervolgens worden schoongemaakt met staalwol.

Plotten op koperprintplaat

Met behulp van een penplotter kan met een etsstift op koperprint worden geplot. Deze methode levert een mooi en betrouwbaar resultaat, maar de minimale lijnbreedte is begrensd door de beschikbare pendikte.

Een veelgebruikt plotter is de HP7475A. Van de dip-switches achterop deze plotter moeten US, B4 en B2 worden ingeschakeld (000101010). De RS232 poort wordt hiermee ingesteld op 9600 baud, geen pariteit, 8 databits en 1 stopbit. Er is een speciale seriële kabel nodig. Deze moet worden bedraad als crosskabel (pagina 580), maar moet aan de plotterzijde wel een male connector hebben.

Er moet een stuk uit de kap van de plotter gezaagd worden zodat de etsstift in de penhoude vrij richting de carousel kan bewegen. De plotter zal geen pen kunnen vinden, maar zal uiteindelijk wel gaan plotten. De pen moet hoog genoeg gemonteerd worden zodatdat deze niet constant over de print glijdt. Het beste zijn de watervaste stiften van Edding met een punt van 1 mm, deze kunnen ook goed tegen ijzertrichloride.

Om de print op zijn plek te houden kan een stuk stevig en dun karton worden gebruikt waar de print met plakband op vast wordt gemaakt. Het maken van de layout moet gebeuren in een programma dat ook de plotter direct met het HPGL protocol kan aansturen. Stel hierbij de cam-processor zo in dat de pen niet te snel over de printplaat gaat, zodat er genoeg inkt op de print komt. Als de print klaar is kan deze geëtsd worden.

Hoofdstuk 9 Audio en Video

Inhoudsopgave

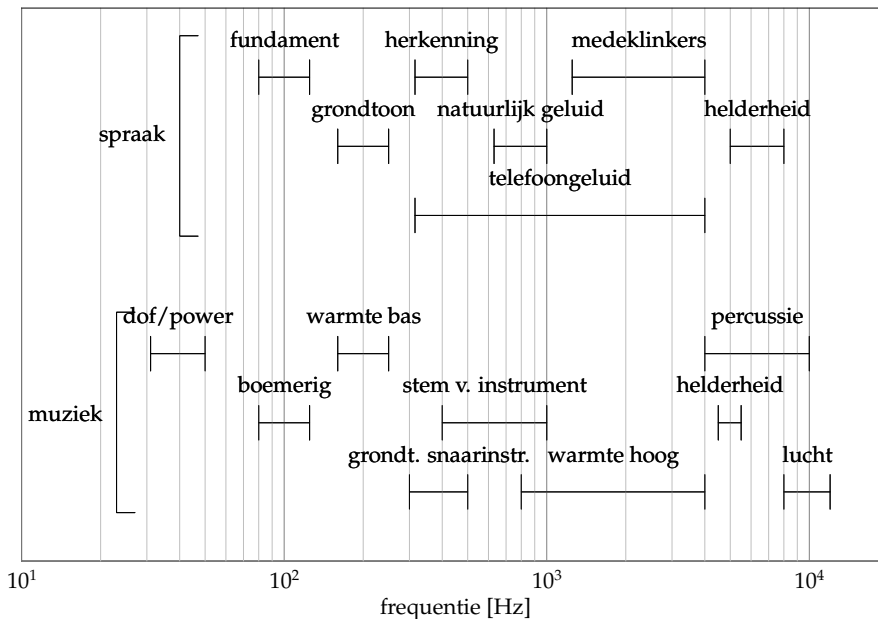
Audiospectrum	555
Videostandaarden	556
Scart	558
HDMI	561
Audioconnectoren en -signalen	562
Auto audio	568
Filters	569
Gebalanceerde en ongebalanceerde audio	571
MIDI	572
DMX (USITT DMX512-1990)	573
Telefoon	576

Audiospectrum

Het menselijk oor kan frequenties tussen de 20 Hz en 20 kHz waarnemen. Zowel spraak als muziek zijn te verdelen in verschillende frequentiegebieden. Bij spraak hebben die gebieden een verschillende functie. Te zien is dat delen van de spraak buiten de bandbreedte van een telefoonverbinding vinden. Hierdoor zijn bijvoorbeeld emoties moeilijker te horen via de telefoon.

Bij muziekinstrumenten bestrijkt elk instrument slechts een deel van het spectrum. Hierdoor is het mogelijk met behulp van een filter of een equalizer bepaalde instrumenten te accentueren.

In onderstaande figuur zijn de belangrijkste frequentiegebieden voor spraak en voor muziek aangegeven.



Figuur 9.1: Een overzicht van frequenties in het audiobereik

Videostandaarden

Over de wereld worden verschillende standaarden gebruikt voor video. **NTSC**¹ wordt gebruikt in de VS en in Japan. **SECAM**² wordt gebruikt in Frankrijk en enkele voormalige Franse koloniën. In de rest van Europa wordt **PAL**³ toegepast. Een samenvatting van de eigenschappen van deze standaarden is te vinden in tabel 9.1. De signalen die bij deze standaarden horen kunnen op verschillende manieren worden doorgegeven: via composiet, S-Video, component of RGB. Al deze manieren zullen hier worden behandeld.

Composiet Alle videostandaarden zijn ontstaan vanuit zwart-wit video. Toen kleurentelevsie ontstond zijn manieren gevonden om een kleursignaal toe te voegen aan de zwart-wit informatie zonder de bandbreedte te verhogen, zodat de bestaande televisie-infrastructuur gebruikt kon worden. Dit is mogelijk omdat het menselijk oog een veel lagere resolutie heeft voor kleuren dan voor zwart-wit. Bij het oorspronkelijke zwart-wit signaal geeft de amplitude de intensiteit weer, waarbij een speciaal laag niveau gebruikt wordt voor de synchronisatiesignalen. Bij kleurentelevsie wordt een kleurendraag golf toegevoegd, waardoor **composiet-video** ontstaat. De amplitude van de draaggolf bepaalt de saturatie van de kleur, de fase bepaalt de golflengte. De fase wordt

¹National Television Systems Committee

²Sequential Colour with Memory

³Phase Alternating Line

standaard	lijnen / veld	horiz. freq. kHz	vert. freq. Hz	kleuren-draag golf MHz	video bandb. MHz	geluids draaggolf MHz
NTSC M	525	15.734	60	3.579545	4.2	4.5
PAL B,G,H	625	15.625	50	4.433618	5.0	5.5
PAL I	625	15.625	50	4.433618	5.5	6.0
PAL D	625	15.625	50	3.433618	6.0	6.5
PAL N	625	15.625	50	3.582056	4.2	4.5
PAL M	525	15.750	60	3.575611	4.2	4.5
SECAM B,G,H	625/50	15.625	50		5.0	5.5
SECAM D,K,K1,L	625/50	15.625	50		6.0	6.5

Tabel 9.1: De belangrijkste eigenschappen van NTSC, PAL en SECAM

bepaald aan de hand van de referentie color-burst die elke scan-lijn wordt meegestuurd met het signaal. Bij PAL verspringt de fase van de referentie elke lijn, vandaar Phase Alternating Line. Dit vermindert verstoringen in de kleuren.

S-Video Het samenvoegen van de kleuren- en zwart-wit-informatie kan niet zonder consequenties. Het belangrijkste probleem is het ontstaan van kleuren die niet in het originele beeld zaten. Dit uit zich bij verticale zwart-wit streepatronen, bijvoorbeeld een gestreept overhemd. De composiet-decoder herkent de kleurendraaggolf in dit patroon, en zal dus kleuren laten zien. Om dit probleem op te lossen kan **S-Video** worden gebruikt. Hierbij worden twee signalen gebruikt: Chroma(C) voor de kleuren en Luminance(Y) voor de helderheid en de synchronisatie.

Component Component-video wordt gebruikt wanneer hogere kwaliteit gewenst is dan met S-Video mogelijk is. Component-video wordt vaak toegepast in combinatie met **HD-TV**¹. Bij component-video zijn er drie signalen: de intensiteit Y, de rood-component Cr en de blauw-component Cb. Component-video wordt daarom ook wel **YCrCb** of **YPrPb** genoemd. De groen-component wordt berekend aan de hand van deze drie signalen. Hiervoor is gekozen omdat het menselijk oog voor groen minder gevoelig is dan voor rood en blauw en dus eventuele storing als gevolg van de berekening minder goed waarneemt.

RGB RGB-video² is een standaard waarbij drie signalen worden gebruikt om de individuele componenten rood, groen en blauw te versturen. Dit concept wordt niet alleen bij televisie gebruikt, maar ook voor het aansturen van computermonitoren. De synchronisatiesignalen kunnen worden doorgegeven via één of meerdere aparte signalen, maar soms worden ze ook samen gevoegd met het groene kleursignaal; dit wordt **Sync on Green** genoemd. Hiervoor wordt de kleur groen gebruikt omdat het menselijk oog hiervoor minder gevoelig is en dus eventuele artifacten die ontstaan als gevolg van de synchronisatiesignalen minder snel ziet.

¹High-definition television

²Rood-groen-blauw-video

Scart

De **scart-plug**¹ is één van de meest gebruikte connectoren om audio en video apparatuur te verbinden (MediaCenter PC, televisie, dvd speler/recorder, video recorder, receiver, etc.). Omdat scart voor meerdere toepassingen gebruikt kan worden zijn er ook verschillende manieren waarop de scart kabel bedraad moet worden. Dit is afhankelijk van het type videosignaal dat gebruikt wordt.

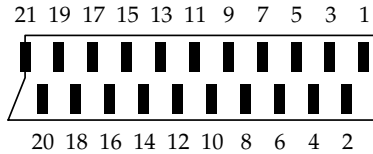
RGB zal het beste beeld opleveren, gevolgd door S-Video en als laatste Composite. In geval van RGB worden de kleuren rood, groen en blauw onafhankelijk verstuurd en kunnen zij elkaar niet beïnvloeden. Bij S-Video zijn de kleuren samen gevoegd, maar is de intensiteit wel apart. Composite tenslotte heeft alle componenten in één signaal zitten. Ondanks dat RGB een aanzienlijk beter beeld oplevert, heeft niet iedere televisie hier de mogelijkheid voor.

Scart heeft officieel niet de mogelijkheid om component (YCrCb) signalen te gebruiken, maar sommige apparaten bieden de mogelijkheid om component signalen over de signaalkabels van RGB te versturen.

De maximum lengte van een scart-kabel is voornamelijk afhankelijk van het type kabel dat gebruikt wordt. Indien er goede connectoren en een goed afgeschermd kabel gebruikt worden, is de maximum lengte ongeveer 15 meter.

Pinout Scart-kabels bestaan in verschillende varianten, de composiet-, de S-Video- en de RGB- variant. Scart-kabels hebben altijd twee male connectors, die symmetrisch bedraad zijn. Een scart-kabel is dus te zien als een soort **null-modem kabel**, die de uitgangssignalen van het ene apparaat verbindt met de ingangen van het andere. Uitzonderingen hierop zijn de RGB-signalen en enkele stuursignalen; deze zijn 1:1 bedraad. In tabel 9.2 is de pinout van de verschillende kabels weergegeven. Een S-Video-kabel bevat alle signalen van een composiet-kabel, met enkele toevoegingen. Ook een RGB-kabel is een uitbereiding op de composiet-kabel. In de laatste kolom van de tabel is aangegeven welk signaal met welke pin aan de andere kant van de kabel is verbonden. De pinbezetting van de scart-connector is te vinden in figuur 9.2

¹*Syndicat des Constructeurs d'Appareils Radiorécepteurs et Téléviseurs*



Figuur 9.2: Pinbezetting van de scart-connector

Pin	Composiet	S-Video	RGB	Pin cross
1	Audio rechts uit			2
2	Audio rechts in			1
3	Audio links uit			6
4	Audio massa			5
5			Blauw ⊥	5
6	Audio links in			3
7			Blauw	7
8	Video status			8
9			Groen ⊥	9
10	D ² B in / EasyLink			10
11			Groen	11
12	D ² B out			12
13		Chroma(C) ⊥	Rood ⊥	13
14	D ² B massa			14
15		Chroma(C)	Rood	15
16	RGB Status			16
17	Composiet ⊥	Luminance(Y) ⊥	Sync ⊥	17
18	RGB Status⊥			18
19	Composiet uit	Luminance(Y) uit	Sync uit	20
20	Composiet in	Luminance(Y) in	Sync in	19
21	Shield			21

Tabel 9.2: De pinout van verschillende scart-kabels

Speciale functies

- Pin 8 is voor de video status. Hiermee kan de videorecorder de TV overschakelen naar de video-ingang op het moment dat de video wordt gestart. Ook kan hiermee de TV worden geschakeld tussen normaal (4:3) en breedbeeld (16:9).
- Pin 10,12 en 14 zijn voor D²B, Digital Data Bus. Hiermee is bidirectionele

communicatie mogelijk tussen twee apparaten. Een vorm hiervan is EasyLink. Het gebruik van deze signalen is onduidelijk, iedere fabrikant geeft hier een eigen invulling aan, en er is dan ook geen overkoepelende standaard voor. Binnen een bepaald merk kan de televisie bijvoorbeeld aan de video recorder doorgeven welk kanaal moet worden opgenomen in geval van one-touch-record. Je hoeft in dat geval niet de video recorder op het juiste kanaal te zetten als je direct wilt opnemen wat je aan het kijken bent.

- Pin 16 is om aan te geven of er gebruik van RGB gemaakt wordt. Dit signaal wordt ook wel 'fast switching' of 'fast blanking' genoemd omdat het gespecificeerd is tot een frequentie van 3MHz. Hierdoor is het mogelijk text te overlayen: de kleur van de tekst (wit) is dan constant aanwezig op de RGB ingangen en met het 'fast switching' signaal schakelde de TV dan over tussen het originele composiet beeld en de witte tekst overlay. Dit werd in de tijd dat scart werd ontworpen gebruikt door externe teletekstdecoders.

Signaalniveaus Voor de audio- en videosignalen op de scart-connector gelden de standaard signaalniveaus en impedanties. Dit betekent dat een scart-naar-tulp-converter kan worden gerealiseerd zonder componenten. Een samenvatting van alle signalen en impedanties is te vinden in tabel 9.3.

Signal	AC niveau	DC niveau	Imp.
R,G,B	0...0.7 volt ± 3 dB	0...2 V	75 Ω
Sync	0...0.3 Volt -3dB- +10 dB	0...2 V	75 Ω
Composiet	0...1.0 Volt ± 3 dB	0...2 V	75 Ω
Chrominance(C)	0...0.3 Volt -3dB- +10dB	0...2 V	75 Ω
Luminance(Y)	0...1.0 Volt ± 3 dB	0...2 V	75 Ω
MAC	0...1.0 Volt ± 3 dB	0...2 V	75 Ω
Audio in	0.5 V nom, 2.0V max	0V	10 k Ω
Audio out	0.5 V nom, 2.0V max	0V	1 k Ω
Video Status	0.0...2.0 V	Int. 0...2 V 16:9 4.5...7 V 4:3 9.5...12 V	
RGB Status		Comp. 0.0...0.4 V RGB 1.0...3.0 V	75 Ω

Tabel 9.3: De signaalniveaus van de signalen op de scart-connector

HDMI

HDMI¹ wordt gezien als de opvolger van scart, hierom wordt deze ook wel digital-scart genoemd. HDMI maakt het mogelijk om digitaal ongecomprimeerde video- en audiosignalen te versturen. Waar scart enkel voor analoge signalen geschikt is en voor audio tot twee kanalen beperkt, is het met HDMI mogelijk om HDTV, DVI en tot 8 kanalen surround geluid te versturen.

HDMI is backwards compatible met DVI. Een computer kan dus zonder problemen aangesloten worden op een HDMI geschikte televisie of een dvd speler met HDMI kan op een monitor met DVI aangesloten worden.

De standaard HDMI type A connector heeft 19 pinnen, er is tevens een standaard voor een type B connector van 29 pinnen. De pinout van de type A connector is te vinden in tabel 9.4.

De HDMI connector bestaat uit 3 kanalen: het **TMDS**² kanaal bevat de audio- en videodata. De kleurendiepte is maximaal 24 bits en de pixelrate loopt van 25MHz tot 165MHz voor type A en 330MHz voor type B. De 8 audiokanalen ondersteunen samplerates van 32, 44.1, 48, 88.2, 96, 176.4 en 192 KHz.

Het **DDC**³ kanaal is een I²C bus waarmee de bron de mogelijkheden van de ontvanger kan opvragen.

Het **CEC**⁴ kanaal is een ééndraads bidirectionele seriële bus die het industrie-standaard AV-link protocol gebruikt.

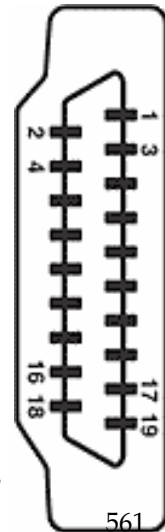
¹High-Definition Multimedia Interface

²Transition Minimized Differential Signalling

³Display Data Channel

⁴Consumer Electronics Control

Pin	Signaal	Pin	Signaal
1	TDMS Data 2+	2	TDMS Data 2 gnd
3	TDMS Data 2-	4	TDMS Data 1+
5	TDMS Data 1 gnd	6	TDMS Data 1-
7	TDMS Data 0+	8	TDMS Data 0 gnd
9	TDMS Data 0-	10	TDMS clock+
11	TDMS clock gnd	12	TDMS clock-
13	CEC	14	gereserveerd
15	SCL	16	SDA
17	DDC/CEC gnd	18	+5 Volt power
19	Hotplug detect		



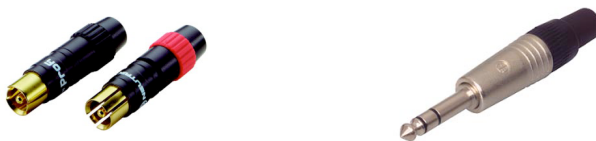
Tabel 9.4: De pinout van de type A HDMI connector

Audioconnectoren en -signalen

Voor het overbrengen van geluidssignalen worden verschillende connectoren gebruikt. In consumentenaudio worden vooral tulp- en jack-connectoren gebruikt. In de professionele audio wordt XLR gebruikt voor audiosignalen van een enkel kanaal. Wanneer meerdere signalen verbonden worden, bijvoorbeeld aan een mengtafel, kan een Socapex of Harting gebruikt worden. Voor speakers worden meestal Speakon connectoren gebruikt.

Jack en tulp Jack- en tulp-connectoren worden vooral in consumentenelektronica gebruikt. Het gaat hier om analoge signalen met een referentie amplitude van $316 \text{ mV}_{\text{RMS}}$, dat is -10dBV . In de praktijk betekent dit dat de amplitude maximaal 1 V is. Bij stereoapparatuur wordt voor elk kanaal een tulp-connector gebruikt. Vaak wordt een jack-connector gebruikt om twee kanalen en een aarde aan te sluiten, maar de jack-connector kan ook worden gebruikt voor differentiële signalen. Voor audio-toepassingen worden zowel 3.5mm als 6.3mm connectoren gebruikt. Op de PC is de **lijn-ingang** blauw, de **lijn-uitgang** groen en de **microfooningang** rood. Bij de microfooningang is één contact gebruikt voor om de microfoon te voorzien van een spanning voor een voorversterking of voor biasing. Het **microfoonsignaal** is 20dB zwakker dan het standaard lijnniveau.

Jack-connectoren hebben de vervelende eigenschap dat de aansluitingen tijdens het in- en uitpluggen onderling contact maken. Het is dus aan te bevelen de apparatuur uit te schakelen voor een jack-connector aan te sluiten of



Terminal	Tulp	Gebalanceerd	Jack	Microfoon
Tip	Mono	Signaal +	Stereo	Signaal
Ring	Signaal	Signaal -	Rechts	Vcc
Sleeve	Ground	Ground	Ground	Ground

Tabel 9.5: Aansluiting audiosignalen tulp en jack

Apparaat	Verbonden	In L	In R	Uit L	Uit R	Gnd
Versterker	Pickup, Tuner	3	5			2
Versterker	Tapedeck	3	5	1	4	2
Tuner, Pickup	Versterker			3	5	2
Tuner	Tapedeck			1	4	2
Tapedeck	Versterker	1	4	3	5	2
Tapedeck	Microfoon	1	4			2

Tabel 9.6: Pinout van de DIN-5 connector voor audiotoepassingen

los te koppelen. Tulp-connectoren hebben hier geen last van, maar hebben de vervelende eigenschap dat de signaalpen contact maakt voor de massa. Ook deze connectoren zijn dus niet geschikt om in te pluggen terwijl apparatuur aan staat. Er bestaan wel connectoren waar het massacontact als eerste verbinding maakt en vervolgens naar achter schuift. Deze connectoren zijn wel veel duurder.

— **DIN-5** Wanneer meer audiosignalen over één stekker nodig zijn kan een **DIN-5 connector** worden gebruikt. Een voorbeeld is het koppelen van een tapedeck aan een versterker, waarbij zowel signalen van de tape naar de versterker moeten als visa-versa. De signaalniveau's zijn lijnsignalen, dus gelijk aan jack en tulp. In principe zijn de gebruikte kabels altijd 1:1 gepind, waarbij alle signalen via de versterker lopen, dus ook als je van een pickup op een tape opneemt. Zonder versterker kunnen deze apparaten alleen via een **crosskabel** verbonden worden.

XLR Voor professionele audiotoepassingen worden **XLR-connectoren** gebruikt. Er worden 3- en 5-polige connectoren gebruikt: 3-polig voor mono en 5-polig voor stereo. Er bestaat ook een 4-polige **mini-XLR connector**; de pinning hiervan is hetzelfde als voor de 3-polige connector; pin 4 is ongebruikt. Voeding van aangesloten apparatuur is mogelijk via **fantomvoeding** of **A-B voeding**. Bij fantomvoeding wordt een common-mode spanning van 48 volt aangelegd op alle signaalpenen. De massa van de stekker (pin 1) is tevens massa voor de voeding. Bij A-B voeding worden enkel de signaalpenen gebruikt. Er wordt dus een DC-spanning aangelegd, waar de signaalbron dan een AC signaal op superponeert. Het is van het grootste belang A-B voeding niet in- of uit te schakelen terwijl het signaal wordt gebruikt, omdat tijdens het schakelen een grote plop op het signaal ontstaat.

pin	signaal	gebalanceerd		ongebalanceerd
		fantoom	A-B voeding	
1	gnd	$-V_{cc}$		gnd
2	signaal+	$+V_{cc}$	$+V_{cc}$	signaal
3	signaal-	$+V_{cc}$	$-V_{cc}$	gnd



Tabel 9.7: Pinning 3-polige XLR-connector

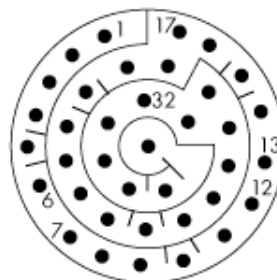
pin	signaal	gebalanceerd		ongebalanceerd
		fantoom	A-B voeding	
1	gnd	$-V_{cc}$		gnd
2	L+	$+V_{cc}$	$+V_{cc}$	L
3	L-	$+V_{cc}$	$-V_{cc}$	ongebruikt
4	R+	$+V_{cc}$	$+V_{cc}$	R
5	R-	$+V_{cc}$	$-V_{cc}$	ongebruikt

Tabel 9.8: Pinning 5-polige XLR-connector

Socapex Om meerdere kanalen aan te sluiten via één connector, bijvoorbeeld op een mengtafel, kan een **Socapex-connector** worden gebruikt. Hierop kunnen twaalf gebalanceerde signalen worden aangesloten. De pinout staat in tabel 9.9. Let op dat kabeldelen door de meeste verhuurbedrijven *female* uitgevoerd worden en de chasisdelen *male*. Hierdoor zijn voor verlenging koppelbussen nodig, maar de slijtage wordt beperkt.

Ackermann De **Ackermann connector** is ook een multiconnector. Deze 39-polige connector is genormeerd als **DIN41618**. Het chassisdeel is male, het kabeldeel female. Er bestaan zowel een kunststof als een metalen behuizing, kunststof is het meest gangbaar. De kunststof en metalen behuizing passen niet op elkaar. De pinning van de 12 kanalen is helaas niet openbaar, maar kan opgevraagd worden bij TM audio: TM Audio, Zonnebaan 52, 3542 EB Utrecht; of via email: info@tmaudio.nl

kanaal #	heet(+)	pin #	
		koud(-)	aaarde
1	1	2	3
2	4	5	6
..
11	31	32	33
12	34	35	36



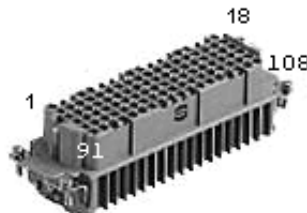
	Veam 100			Veam 150			Veam 159		
	1		7	1		4	1		6
	94		100	147		150	154		159
kan	+	-	⊥	+	-	⊥	+	-	⊥
1	1	2	3	1	2	3	1	2	3
2	4	5	6	4	5	6	4	5	6
..
33	97	98	99	97	98	99	97	98	99
..			
48				143	144	145	143	144	145
..						
53							157	158	159

Tabel 9.10: Pinout van de 100-, 150- en 159-polige Veam connector

Veam Veam is een multipoolconnector voor gebalanceerde audiosignalen. Er bestaan drie typen, de 100-, de 150- en de 159-polige variant. De pinouts van deze connectoren zijn te vinden in tabel 9.10

Harting (geluid) De 108-pin Harting connector is de standaard die door de meeste verhuurbedrijven wordt gehanteerd (waaronder Ampco). De pinout van deze connector is te vinden in tabel 9.11. **Let op:** De kabelaanvoer zit aan de kant van kanaal 1. Welke van de kanalen voor in- en voor uitgang worden gebruikt is geen universele standaard. Veelgebruikt is de Harting 42 norm. Deze is niet openbaar, maar is wel op te vragen bij TM Audio, zie pagina 564.

	pin #						
kan	-	+	⊥	⊥	+	-	kan
1	1	19	37	55	73	91	2
3	2	20	38	59	74	92	4
..
33	17	35	53	71	89	107	34
35	18	36	54	72	90	108	36

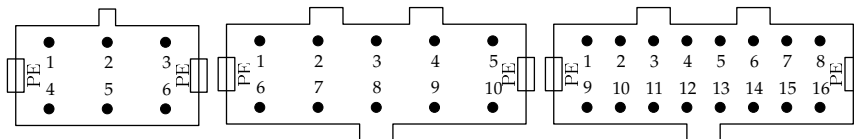


Tabel 9.11: 108-polige Harting connector voor geluid

Kabeldelen worden door de meeste verhuurbedrijven *female* uitgevoerd en de chasisdelen *male*. Hierdoor zijn voor verlenging koppelbussen nodig, maar de slijtage wordt beperkt en dat is in dit geval belangrijker.

De behuizing van de 108-polige Harting connector is gelijk aan de 16-polige connector die voor licht wordt gebruikt; accessoires zoals afdekkappen zijn dus uitwisselbaar.

Harting voor licht Voor licht worden ook **Harting connectoren** gebruikt. Deze zijn er in 6-, 10- en 16-polige variant. Voor de 10- en 16-polige exemplaren bestaan twee pinbezettingen: de DIN- en de **Flashlight-/NOB-norm**. De behuizing van de 16-polige connector is gelijk aan de 108-polige connector die voor geluid wordt gebruikt; accessoires zijn dus uitwisselbaar.




pin	H6	H10 (DIN)	H10(FL)	H16 (DIN)	H16 (FL)
1	fase 1	fase 1	fase 1	fase 1	fase 1
2	fase 2	fase 2	nul 1	fase 2	nul 1
3	fase 3	fase 3	fase 2	fase 3	fase 2
4	fase 4	fase 4	nul 2	fase 4	nul 2
5	nul 1/2	fase 5	fase 3	fase 5	fase 3
6	nul 3/4	nul 1	nul 3	fase 6	nul 3
7		nul 2	fase 4	fase 7	fase 4
8		nul 3	nul 4	fase 8	nul 4
9		nul 4	fase 5	nul 1	fase 5
10		nul 5	nul 5	nul 2	nul 5
11				nul 3	fase 6
12				nul 4	nul 6
13				nul 5	fase 7
14				nul 6	nul 7
15				nul 7	fase 8
16				nul 8	nul 8

Tabel 9.12: Pinout van Harting connectoren voor licht

Speakon Voor het aansluiten van luidsprekers op een eindversterker wordt de **Speakon-connector** gebruikt. Op de vierpolige connector kunnen een linker en rechter luidspreker worden aangesloten, of één tweewegluidspreker. De achtpolige speakon connector wordt gebruikt voor vierwegluidsprekers.


4-pin

pin	Stereo	Bi-Amp	Enkele speaker
pin 1+	L+	lf+	+
pin 1-	L-	lf-	-
pin 2+	R+	hf+	ongebruikt
pin 2-	R-	hf-	ongebruikt



8-pin

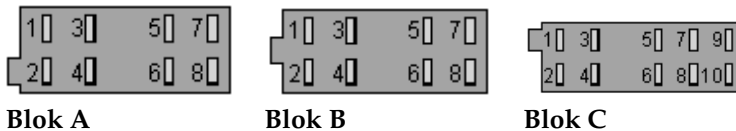
pin	Signaal
Pin 1+	4 weg sub laag +
Pin 1-	4 weg sub laag -
Pin 2+	4 weg laag +
Pin 2-	4 weg laag -
Pin 3+	4 weg mid +
Pin 3-	4 weg mid -
Pin 4+	4 weg hoog +
Pin 4-	4 weg hoog -



Auto audio

Het aansluiten van een autoradio gaat normaal gesproken met twee stekkers, blok A en B. Blok C is in uitzonderingen nodig; deze kan bijvoorbeeld worden gebruikt om een externe eindversterker aan te sluiten. Blok C is ook 'minder standaard' dan blokken A en B. Blok A is voor de energievoorziening en voor stuursignalen; blok B bevat de luidsprekeruitgangen. Deze blokken zijn universeel, en dus meestal aanwezig in de auto. De auto of de autoradio kunnen ook fabrikantspecifiek zijn; in dat geval zijn vrijwel altijd adapterkabels naar deze universele connectoren beschikbaar.

De pinout van deze connectoren is te vinden in figuur 9.3 en tabel 9.13.



Figuur 9.3: De drie ISO connectoren voor autoradio's

Blok A Stroomvoorziening

4	12 V van de accu
5	Stuuruitgang voor antenne of eindversterker
6	Verlichting
7	12 V via sleutel-contact
8	Massa

Blok B Luidsprekers

1	Plus	rechts	achter
2	Min	rechts	achter
3	Plus	rechts	voor
4	Min	rechts	voor
5	Plus	links	voor
6	Min	links	voor
7	Plus	links	achter
8	Min	links	achter

Blok C Voorversterker uitgang

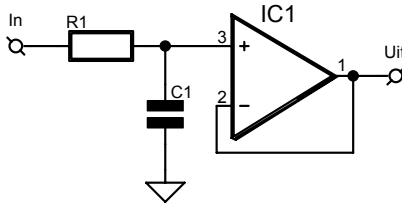
5	signaalmassa
7	rechts voor
8	rechts of rechts achter
9	links voor
10	links of links achter

Tabel 9.13: Pinbezetting van de drie ISO-connectoren voor autoradio's

Filters

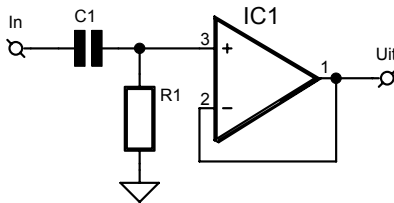
Voor verschillende toepassingen is het nodig een audiosignaal te filteren. Denk hierbij aan een equalizer of een actief woofer/tweeter-filter. Dit kan worden gedaan met de filterschakelingen zoals hier beschreven. Voor een goede geluidskwaliteit is het van belang kwalitatief hoogwaardige OpAmps te gebruiken. Ook dient erop gelet te worden dat de ingangsimpedantie de bron niet te zwaar belast, en dat de uitgangsimpedantie laag genoeg is om niet beïnvloed te worden door de schakeling aan de uitgang.

1^e orde lowpass



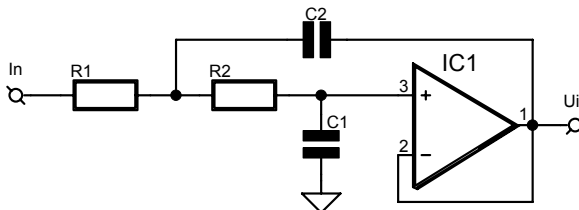
$$f = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

1^e orde highpass



$$f = \frac{1}{2\pi R_1 C_1}$$

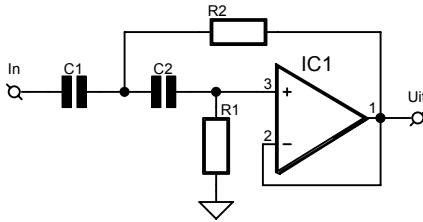
2^e orde lowpass



$$R_1 = R_2 = R$$

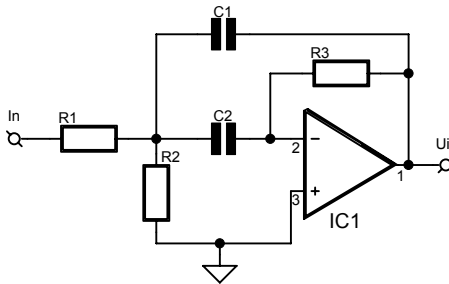
$$C_1 = 2C_2$$

$$C_2 = \frac{\sqrt{2}}{2\pi f R}$$

2^e orde highpass

$$C_1 = C_2 = C$$

Bandpass filter



$$R_1 = \frac{Q}{G2\pi fC}$$

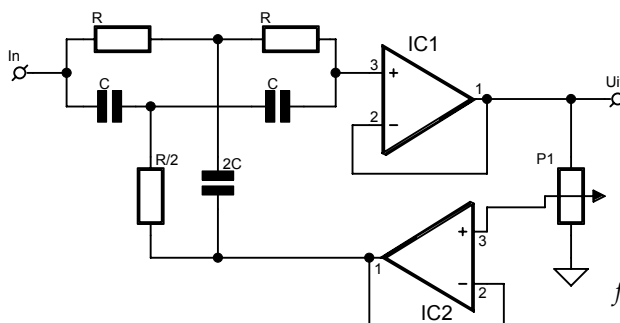
$$R_2 = \frac{Q}{(2Q^2 - G)2\pi fC}$$

$$R_3 = \frac{Q}{\pi fC}$$

$$G = \frac{1}{\frac{R_1}{R_3}2}$$

$$f = \frac{1}{2\pi C} \sqrt{\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2 R_3}}$$

Twin T notch (bandstop) filter



$$f = \frac{1}{2\pi RC}$$

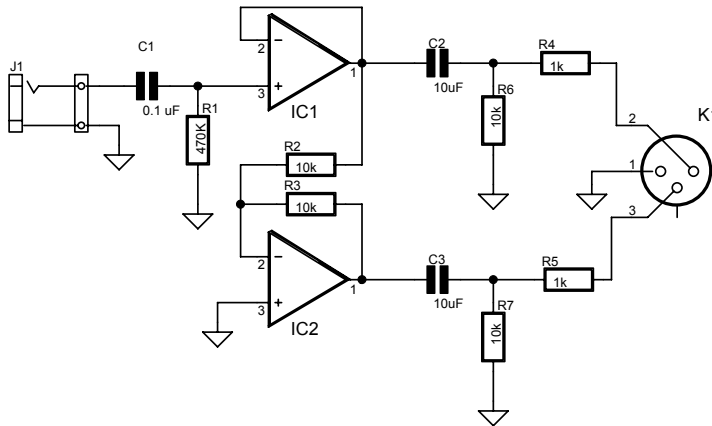
De Q van dit filter is instelbaar met de potmeter

Gebalanceerde en ongebalanceerde audio

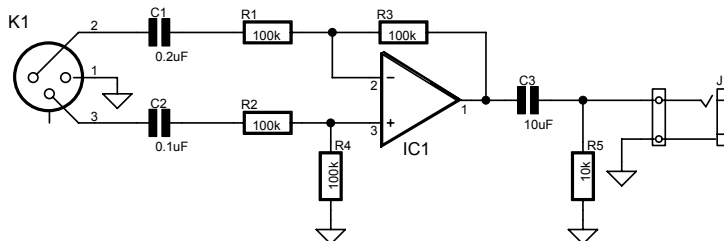
Het omzetten van **ongebalanceerde** signalen in **gebalanceerde** signalen wordt voornamelijk op het podium gebruikt om grote afstanden zonder storing te overbruggen. Dit gebeurt door common-mode signalen te onderdrukken. Een schakeling om ongebalanceerde signalen om te zetten in gebalanceerde signalen is te vinden in figuur 9.4. Dit wordt ook wel een **DI-box**¹ genoemd.

Het kan natuurlijk ook voorkomen dat een apparaat enkel een gebalanceerde uitgang heeft en een ander apparaat een ongebalanceerde ingang. Voor de benodigde omzetting is dan het schema van figuur 9.5 te gebruiken.

¹Direct-Injection-box



Figuur 9.4: Ongebalanceerd naar gebalanceerd



Figuur 9.5: Gebalanceerd naar ongebalanceerd

MIDI

MIDI¹ wordt gebruikt om elektronische instrumenten en bijbehorende apparatuur te verbinden. Het is een asynchroon serieel protocol waarbij alle data over één datalijn gaat. De gebruikte stekker is DIN-5 maar soms wordt hier van afgeweken. De maximale kabel lengte is 10 meter, maar in de praktijk is met een goed afgeschermd kabel en metalen pluggen ook 20 meter haalbaar. De verzonden data zijn commando's zoals bv. 'noot C3 aan op volume 5'

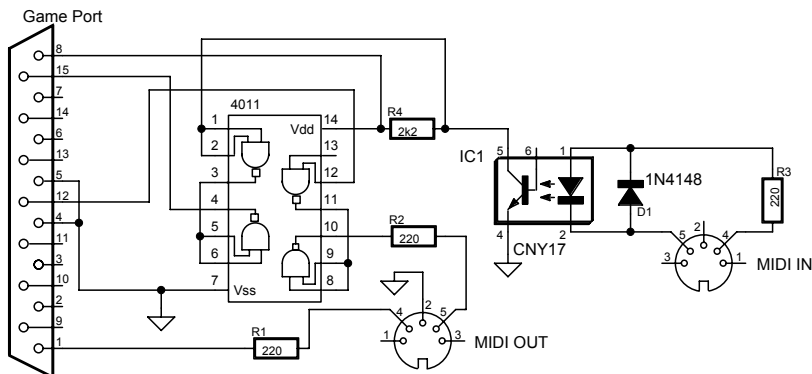
Op een instrument zijn veelal drie MIDI-aansluitingen: MIDI-in, MIDI-out en MIDI-thru. Een instrument speelt de noten af die via MIDI-in afkomen, in combinatie met de op het instrument zelf gespeelde noten. MIDI-out bevat enkel de data van de gespeelde noten, dus niet de data die via MIDI-in binnen komen. MIDI-thru is een uitgang die een exacte kopie is van MIDI-in.

MIDI PC koppeling Op veel PC's zijn een MIDI in- en uitgang beschikbaar, maar dit signaal is niet volgens de norm. SoundBlaster heeft er ooit voor gekozen deze twee signalen beschikbaar te maken op de joystickpoort, die ook op deze kaart geïntegreerd was. Andere fabrikanten hebben dit overgenomen. Voor de koppeling tussen een instrument en de PC zijn een opto-coupler en een paar buffers nodig; het complete schema is te vinden in figuur 9.6.

MIDI-kabel Een MIDI-kabel is altijd 1:1. De pinout is:

pin	1	2	3	4	5
signaal	nc	shield	nc	+5V	data

¹*Musical Interface for Digital Instruments*



Figuur 9.6: MIDI interface voor de joystick-poort

DMX (USITT DMX512-1990)

Het DMX¹-protocol bestaat uit twee gedeelten, de hardware (gebaseerd op RS485) en de bit-stream die over deze hardware gestuurd wordt.

Bitstream

De bitstream van DMX wordt verstuurd met 250 kbps. Dit betekent dus dat elke bit 4 μ s duurt.

Als de apparatuur wordt aangezet en als er nog geen data over de DMX-lijn wordt verstuurd dan is het signaal dat op de lijn staat hoog (*idle*) en zal alle apparatuur in een zekere uitgangspositie staan (meestal alsof alle kanalen nul zijn). Is er echter al wel data verstuurd over de lijn en staat er geen signaal op omdat er geen signaal meer wordt uitgezonden dan onthoudt de apparatuur de laatst bekende waarde. (Op deze manier gaat niet ineens al het licht uit op het moment dat er bijvoorbeeld een kabel stuk gaat.)

Als er dan daadwerkelijk data verstuurd gaat worden wordt er eerst een *break* gegeven. Dit betekent dat de lijn laag gemaakt wordt voor minimaal 11 bits (88 μ s). Het is aan te bevelen om deze break iets langer te laten duren (100 à 120 μ s). De maximale tijdsduur van de break is 1 s, maar dit is erg lang voor gebruik in shows.

Na de break komt de Mark After Break (MAB). Deze geeft aan dat de break nu over is door de lijn weer hoog te maken. De tellers in de ontvangers worden hierop ook gereset. De MAB is minimaal 2 bits lang maar mag tot 1 seconde duren. De timing die het beste werkt is dan ook om 3 bits te versturen. Als de MAB is verzonden zijn alle ontvangers gereed om data te ontvangen.

De eigenlijke data wordt verstuurd in *frames*, alle frames zijn even lang en zijn ook allemaal hetzelfde opgebouwd. Dit dataframe is 11 bits lang en is als volgt opgebouwd: het eerste bit (*startbit*) is laag en is het startbit, hierna komen 8 bits welke de eigenlijke data bevatten, dus de kanaalwaarde van 0-255, hierna komen nog twee (hoge) *stopbits*.

In een volledig datapakket worden niet 512 maar 513 *frames* met data verzonden. Het eerste pakket bevat het *startbyte* dat het type apparatuur. Voor dimmers en veel intelligent licht wordt de waarde 0 (acht nullen) gebruikt.

Let bij het maken van software op dat ontvangen DMX pakketten die een ander startbyte dan nul hebben worden genegeerd. Pakketten met een ander *startbyte* worden bijvoorbeeld gebruikt om apparatuur te testen.

¹Digital MultipleXed

De bekabeling

Doordat er een signaal van 250 kHz gebruikt wordt en de apparatuur vaak in storingsrijke omgevingen gebruikt wordt, is het belangrijk dat de gebruikte kabels goed getwist, afgeschermd en getermineerd zijn.

Voor DMX worden in de regel XLR-3 of XLR-5 connectors gebruikt (de *male* connector is een uitgang). De penbezetting is in beide gevallen 1 → afscherming, 2 → data+ en 3 → data-.

De kabels die in combinatie met DMX apparatuur gebruikt worden zijn afgeschermd, hebben een getwist aderpaar en hebben een karakteristieke weerstand van 120 ohm.

De mantel van de gebruikte kabel mag nooit (!) aangesloten zijn op de behuizing van de connector in verband met aardlussen. In plaats daarvan moet de mantel aan beide zijden met pen 1 van de XLR-connector worden verbonden.

Elk uiteinde, dus ook ongebruikte uitgangen op een splitter of mixer, moet afgesloten worden met een terminator om reflecties te voorkomen. Hiervoor is handig een 120 Ω 1/4 W weerstand in een XLR-plug te solderen.

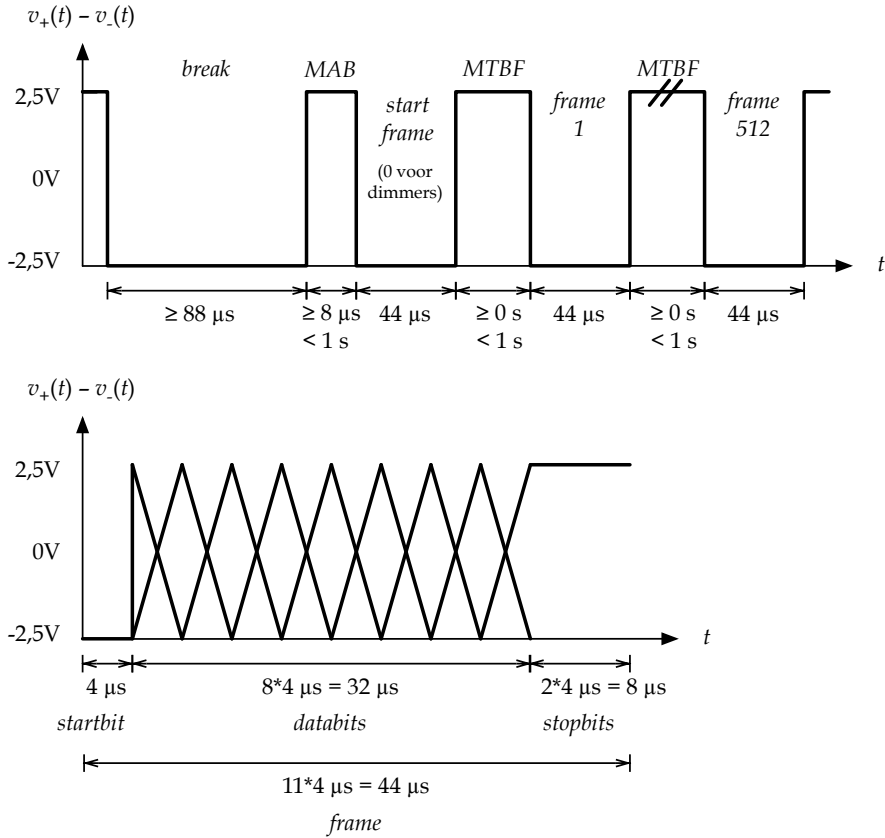
RS485

De signalen in **RS485** zijn gebalanceerd (een zender verzendt een signaal en een geïnverteerd signaal, de ontvanger gebruikt het verschil tussen de lijnen). De ontvanger detecteert hoog (een 1) als het potentiaal op de plusdraad hoger is als die op de min-draad en een laag (een 0) als de spanning op de min-draad lager is dan op de plus-draad. De standaard geeft aan dat de spanningsniveau's mogen variëren tussen -7 V en + 12 V op elk van de draden.

Volgend de standaard is de eis dat het verschil tussen de twee spanningen minimaal 200mV bedraagt. Dit houdt dus in dat de (absolute) spanning op allebei de lijnen terug mag vallen naar 100mV voordat de installatie storing begint te vertonen.

Dit betekent dat er één zender en maximaal 32 ladingseenheden (sommige apparatuur belast de lijn meer dan één normontvanger) op één keten aangesloten mogen zijn. Als er meer apparaten aangesloten moeten worden dan moet er een splitter/booster ingezet worden.

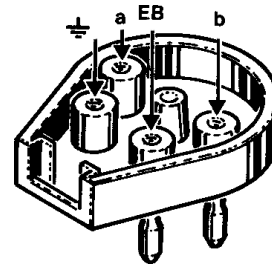
De maximale kabellengte in het systeem is 500 meter, als je een langere afstand wilt overbruggen moet je ook weer een splitter/booster inzetten.



Figuur 9.7: DMX timing (boven: pakket, onder: *frame*)

Telefoon

De **telefoonaansluiting** bestaat uit vier contacten: a,b,EB¹ en aarde. In de praktijk worden EB en aarde nauwelijks nog gebruikt; vrijwel elke telefoon zal ook werken met enkel a en b aangesloten. In het contact zit EB meestal op b aangesloten. Bij het punt waar de telefoonkabel binnenkomt zijn bovendien nog 2a en 2b aanwezig; deze zijn voor een tweede telefoonlijn. Voor de aansluiting op het toestel wordt vaak een miniplug gebruikt.



Figuur 9.8: Telefoonstekker

	a	b	2a	2b	aarde	EB
Contactdoos	rood	blauw	oranje	wit	blank	
Miniplug	rood	blauw			zwart	geel

Tabel 9.14: Kleuren telefoonaansluiting

Signaalniveau's

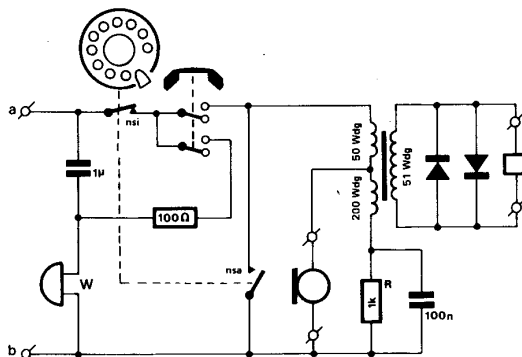
De toestand van de lijn is te herkennen aan het DC signaalniveau, de DC polariteit en het daarop gesuperponeerde AC signaal. Voor de beller is de toestands-volgorde 1,2,3,4,5,6²,1. Voor de gebelde is de volgorde 1,7,5,6,1. De geluidssignalen als congestie (in gesprek) of ongeldig nummer worden doorgegeven zoals (5) Gesprek.

¹Extra bel

²Als andere zijde eerst ophangt

	Toestand	DC	polariteit	AC
1	Op de haak	50V	a+ b-	
2	Van de haak	10V	a+ b-	kiestoon
3	Nummer kiezen	10V	a+ b-	
4	Nummer gekozen	10V	a- b+	beltoon
5	Gesprek	10V	a- b+	geluid
6	Gesprek beindigd	10V	a- b+	congestie
7	Belsignaal	50V	a- b+	100Vpp 25Hz

Tabel 9.15: Signalen telefoonaansluiting



Figuur 9.9: Inwendige van een draaischijftelefoon

Telefoons In figuur 9.9 is het schema getekend van een telefoon met kieschijf. Wanneer de hoorn op de haak ligt, is alles afgeschakeld behalve de bel W, die via een condensator met de lijn is verbonden. Hierdoor wordt de lijn niet DC belast. Als de hoorn wordt opgenomen staan de kiesschijf, de microfoon en de luidspreker in verbinding met de lijn. De weerstand van 100Ω zorgt dat de centrale 'merkt' dat de hoorn is opgenomen en de kiestoon op de lijn zet. Deze is via de luidspreker te horen.

Door aan de draaischijf te draaien genereert de draaischijf evenzoveel pulsen als het gedraaide cijfer (10 pulsen voor 0). De snelheid en maak-breek verhouding zijn mechanisch vastgelegd in het kiesschijfmechanisme.

DTMF Bij toon-kies toestellen wordt het nummer niet door pulsen maar door tonen doorgegeven. Elke knop produceert een combinatie van twee tonen. Deze zijn zodanig gekozen dat geen van de mogelijke tonen een veelvoud (harmonische) is van een andere.

De signaalsterkte is -11dBm (220mV) voor de lage groep en -9dBm (275mV) voor de hoge groep; de afsluitimpedantie is 600Ω .

	1209	1336	1447	1633
697	1	2	3	A
770	4	5	6	B
852	7	8	9	C
941	*	0	#	D

Tabel 9.16: DTMF frequenties [Hz]

Hoofdstuk 10 Computer

Inhoudsopgave

RS232	579
Hardware	579
Datagram	579
Kabels	579
Software	581
LPT	583
Hardware	583
Software	583
Joystickpoort	586
Hardware	586
Joystick	586
Software	586
VGA	587
DVI en DFP	588
Keyboard	589
USB	589
Netwerk	589
GPIB	590

RS232

Hardware

De **seriële**, of **COM-poort**, beschikt over twee asynchrone data-lijnen TxD en RxD, twee statusuitgangen en vier statusingangen. De PC beschikt over een 9- of 25-pens male SUB-D connector. Om seriële apparaten te verbinden worden veel verschillende kabels gebruikt. De pinout hiervan wordt verderop beschreven. De spanningsniveau's van de poort zijn -15V tot -5V (*mark*, logisch 1) of +5V tot +15V (*space*, logisch 0) aan de zenderzijde; een ontvanger interpreteert -15V tot -3V als een 1 en +3V tot +15V als een 0. Het gebied tussen -3 en +3 is dus niet gedefinieerd, maar in de praktijk wordt -3 tot +1 als een 1 geïnterpreteerd, zodat ook unipolaire signalen gebruikt kunnen worden. De pinout is te vinden in tabel 10.1.

Datagram

Een seriëel datagram, dat één byte bevat, bestaat uit een startbit, 5-8 databits, eventueel een pariteitsbit en 1, 1.5 of 2 stopbits. Hoe dit er in de praktijk uit ziet is te zien in figuur 10.1.

9p	25p		signaal
1	8	←	DCD Data Carrier Detect
2	3	←	RxD Receive Data
3	2	→	TxD Transmit Data
4	20	→	DTR Data Terminal Ready
5	7		GND
6	6	←	DSR Data Set Ready
7	4	→	RTS Request To Send
8	5	←	CTS Clear To Send
9	22	←	RI Ring Indicator

←Input PC →Output PC

Tabel 10.1: Pinout seriële poort



Figuur 10.1: Het datagram van een seriële poort

Kabels

Voor seriële verbindingen bestaat er een grote hoeveelheid aan kabels: 9- of 25-pins; verleng of cross; volledige, locale of geen handshaking. Het aantal pins moet uiteraard kloppen om de stekker fysiek aan te sluiten. 9-naar-25 pins adapters kunnen worden gemaakt met behulp van tabel 10.1.

Om een DTE¹, een PC of een terminal, aan te sluiten op een DCE², bijvoorbeeld een modem of een plotter, is een verlengkabel nodig. Om twee DTE's te verbinden is een **crosskabel** nodig, ook wel **null-modem kabel** genoemd.

Of *handshaking* nodig is, hangt af van het gebruikte programma. Sommige programma's hebben volledige handshaking nodig. Dit komt vooral voor bij communicatie met langzame apparaten, om te voorkomen dat deze overspoeld worden door de datastroom. Wanneer twee snelle apparaten worden verbonden, bijvoorbeeld twee computers via een crosskabel, is vaak geen handshaking nodig. Wanneer de software echter wel handshaking verwacht, kan een *local handshaking* worden toegepast. Hier wordt de DTE 'voor de gek gehouden' door de handshake-ingangen te verbinden met zijn eigen handshake-uitgangen.

Wanneer een kabel zonder volledige handshaking wordt toegepast in combinatie met een apparaat dat wel handshaking nodig heeft, bestaat soms de mogelijkheid om dit apparaat in te stellen op *XON-XOFF handshaking*. Hier worden twee ASCII karakters DC1(XON) en DC3(XOFF) gebruikt om de gegevensstroom van de tegenpartij te starten of te onderbreken.

Om 9-polige verlengkabels en 9-25 convertors te maken kan gebruik wor-

¹data terminal equipment

²data communications equipment

verleng	cross	locale hs
DTE-DCE	DTE-DTE	DTE
♀-♂	♀-♀	♀
GND(5,7)-GND(5,7)	GND(5,7)-GND(5,7)	
RxD(2,3)-RxD(2,3)	RxD(2,3)-TxD(3,2)	
TxD(3,2)-TxD(3,2)	TxD(3,2)-RxD(2,3)	
RTS(7,4)-RTS(7,4)	RTS(7,4)-CTS(8,5)	RTS(7,4)
CTS(8,5)-CTS(8,5)	CTS(8,5)-RTS(7,4)	CTS(8,5)]
DTR(4,20)-{ DTR(4,20) DCD(1,8)	DTR(4,20)-{ DSR(6,6) DCD(1,8)	DTR(4,20)
DSR(6,6)-DSR(6,6)	DSR(6,6) }-DTR(4,20)	DSR(6,6)
		DCD(1,8)]

Tabel 10.2: Kabels voor seriële verbindingen

den gemaakt van tabel 10.1. Voor andere kabels kan tabel 10.2 worden gebruikt. Voor een 7-polige verleng- of crosskabel worden alle verbindingen in de betreffende kolom gemaakt. Door de handshakesignalen RTS, CTS, DSR, DSR en DCD weg te laten ontstaat een driepolige kabel zonder handshake. Om locale handshaking toe te voegen moeten de verbindingen, zoals aangegeven in de kolom 'locale hs', aan beide zijden van de kabel gemaakt worden.

Software

De seriële poort is aan te spreken op dit adres:

Poort	COM1	COM2	COM3	COM4
Basis adres(BA)	0x3f8	0x2f8	0x3e8	0x2e8

Een overzicht van alle registers van de seriële poort is te vinden in tabel 10.3.

Initialisatie

Om data seriëel te kunnen versturen en ontvangen, moet de **UART**¹ worden ingesteld op de juiste snelheid, pariteit en aantal stopbits. Om te beginnen moet de baudrate worden ingesteld. De benodigde deelfactor **BRD**² is te berekenen met:

$$BRD = \frac{\text{kloksnelheid}}{16 * \text{baudrate}} = \frac{1843200}{16 * \text{baudrate}} = \frac{115200}{\text{baudrate}} \quad (10.1)$$

¹Universal Asynchronous Receiver and Transmitter

²Baud Rate Divisor

BA	DLAB	R/W	Naam	
+0	=0	W	THR	Transmitter Holding Register
+0	=0	R	RDR	Received Data Register
+0	=1	R/W	BRDL	Baud Rate Divisor Low
+1	=0	R/W	IER	Interrupt Enable Register
+1	=1	R/W	BRDH	Baud Rate Diviser High
+2	-	R	IIR	Interrupt Identification Register
+2	-	W	FCR	FIFO Control Register
+3	-	R/W	LCR	Line Control Register
+4	-	R/W	MCR	Modem Control Register
+5	-	R	LSR	Line Status Register
+6	-	R	MSR	Modem Status Register
+7	-	R/W		Scratch (ongebruikt)

Tabel 10.3: Registers van de seriële poort

7	6	5-3	2	1-0
DLAB	Break	Pariteit	Stopbits	Databits
		None 000	1 bit 0	5 bits 00
		Odd 100	1.5 bit	6 bits 01
		Even 110	(5 databits) ¹	7 bits 10
		Mark 101		8 bits 11
		Space 111	2 bit 1	

Tabel 10.4: Register LCR (BA+3)

Vervolgens wordt het hoge byte van dit getal in register BRDH geplaatst en het lage in BRDL. Deze zijn echter alleen toegankelijk als bit **DLAB**¹ (LCR bit 7) op 1 ingesteld is. Daarna moet het LCR worden ingesteld, zie tabel 10.4. DLAB moet weer op nul worden gesteld om toegang te krijgen tot THR en RDR.

Versturen en ontvangen van data

Om data te versturen moet eerst worden gewacht tot bit 5 van het LSR (THR leeg) hoog is, vervolgens kan een byte in THR worden geladen om het te versturen. Om data te ontvangen wordt gewacht tot bit 0 van het LSR (data ontvangen) hoog is, vervolgens kan een byte van het RDR worden gelezen.

Handshaking/digitale I/O

De twee uitgangen DTR en RTS kunnen worden bestuurd door de bits in het MCR te zetten. De TxD uitgang kan worden bestuurd door het Break bit in het LCR te zetten. De ingangen DCD, RI, DSR en CTS kunnen via het MSR worden ingelezen. De laagste vier bits van het MSR geven aan of de signalen zijn veranderd sinds het MSR werd uitgelezen.

¹Divisor Latch Access Bit

	7	6	5	4	3	2	1	0
MCR	-	-	-	loopback	Interrupt	Reset	RTS	DTR
LSR	-	TSR leeg	THR leeg	Break	Frame fout	Pariteit fout	Over- run	Data in
MSR	DCD	RI	DSR	CTS	Δ DCD	Δ RI	Δ DSR	Δ CTS

Tabel 10.5: Registers MCR(BA+4), LSR(BA+5) en MSR(BA+6)

LPT

Hardware

De **printerpoort**, ook wel **LPT¹**-poort of **parallele poort** genoemd, bestaat in een aantal varianten die genormeerd zijn in **IEEE 1284**. Naast de unidirectionele **SPP²** poort bestaan er een bidirectionele (Bi-dir) en een **EPP³/ECP⁴** variant. Deze zijn allen downwards compatible. De PC heeft een 25 pins female SUB-D connector; de printer een 36 pins female *centronics* connector. De pinouts van deze connectoren zijn te vinden in tabel 10.6.

De SPP poort heeft een 8-bits databus van de PC naar de printer; vijf statusingenangen, waarvan er één (Ack) als interrupt kan dienen, en vier open-collector bidirectionele stuursignalen. De handshaking wordt door de software gedaan; deze leest de statussignalen en genereert het strobesignaal waarop de printer de data inleest.

Bij de bi-dir poort kan met een bit in het controlregister de datarichting van de databus worden omgekeerd.

De EPP poort beschikt over hardware die zelfstandig read- en writecycles uit kan voeren en daarbij zelf voor handshaking zorgt. Dit verhoogt de snelheid en verlaagt de CPU-overhead.

De ECP poort neemt net als de EPP handshaking over van de CPU, en voegt daar een **FIFO⁵** buffer en **RLE⁶** compressie aan toe.

Software

De parallele poort is te vinden op de volgende I/O adressen:

	SPP	EPP	ECP
LPT1	0x378-0x37A	0x378-0x37F	0x778-0x77A
LPT2	0x278-0x27A	0x278-2x37F	0x678-0x67A

SPP en Bi-dir poort

Er zijn drie registers: een dataregister voor het schrijven (en voor bi-dir ook lezen) van de databus; een statusregister voor het lezen van de ingangen en een stuurregister voor het lezen/schrijven van de open-collector stuurlijnen.

¹line printer

²Standard Parallel Port

³Enhanced Parallel Port

⁴Enhanced Capabilities Port

⁵first in-first out

⁶run length encoding

25p	36p	SPP	EPP	ECP
1	1	Strobe \rightleftharpoons	Rd/Wr \rightarrow	HostClk \rightarrow
2	2	D0 \rightarrow	D0 \leftrightarrow	D0 \leftrightarrow
..
9	9	D7 \rightarrow	D7 \leftrightarrow	D7 \leftrightarrow
10	10	Ack \leftarrow	Intr \leftarrow	PeriphClk \leftarrow
11	11	Busy \leftarrow	Wait \leftarrow	PeriphAck \leftarrow
12	12	PE \leftarrow	-	AckRev \leftarrow
13	13	Select \leftarrow	-	X-flag \leftarrow
14	14	Autofeed \rightleftharpoons	Data str \rightarrow	HostAck \rightarrow
15	32	Error \leftarrow	-	PeriphReq \leftarrow
16	31	Init \rightleftharpoons	Reset \rightarrow	RevReq \rightarrow
17	36	Select in \rightleftharpoons	Adr str \rightarrow	1284 active \rightarrow
18-25	19-30	GND	GND	GND
		\rightarrow output PC	\leftarrow input PC	\leftrightarrow bi-dir \rightleftharpoons open collector

Tabel 10.6: Pinout printerpoort

Met het bit 'Dir' in het statusregister kunnen de datalijnen van de Bi-dir als in- of als uitgang worden geschakeld. Het bit 'Int', dat ook bij de SPP poort aanwezig is, dient als enable voor de interrupt. Deze interrupt wordt geactiveerd door de hooggaande flank van Ack.

EPP poort

De eerste drie registers zijn in EPP mode vrijwel gelijk aan de Bi-dir poort; bit 0 van het statusregister functioneert in EPP mode als EPP-timeout. De EPP mode hoeft niet speciaal geactiveerd te worden. In EPP mode zijn vier cycles

	7	6	5	4	3	2	1	0
Data(BA+0)	D7	D6	D5	D4	D3	D2	D1	D0
Status(BA+1)	Busy	Ack	PE	Select	Error	-	-	-
Stuur(BA+2)	-	-	Dir	Int	Select In	Init	Autofeed	Str

Tabel 10.7: De registers van de SPP- en Bi-dir poort

Poort	Lezen	Schrijven
EPP Adress(BA+3)	Adress read	Adress write
EPP Data(BA+4)	Data read	Data write

Tabel 10.8: EPP registers

gedefinieerd die door de hardware zelf uitgevoerd worden: data lezen, data schrijven, adres lezen en adres schrijven. Deze cycles worden uitgevoerd door naar het EPP Adress- of Dataregister te schrijven, zoals aangegeven in tabel 10.8.

Bij een address cycle wordt $\overline{\text{Adr Str}}$ gebruikt als clocksignaal; bij een data cycle wordt $\overline{\text{Data Str}}$ gebruikt. $\overline{\text{Rd/Wr}}$ geeft aan of er gelezen of geschreven wordt. Het $\overline{\text{Wait}}$ signaal wordt gebruikt als bevestigingssignaal naar de host. Voor iedere actie moet bit 0 van het statusregister worden gewist. Na elke actie moet dit bit worden gecontroleerd om te zien of de actie succesvol was. Een time-out treedt op als het device niet op tijd reageert op de PC.

ECP poort

De ECP mode moet, in tegenstelling tot EPP mode, eerst geactiveerd worden. Hiervoor dient het Extended Control Register ECR (BA+0x402). De indeling van dit register staat in tabel 10.9.

In configuration mode (bit7:5=111) kunnen configuratieregisters cnfgA (BA+0x400) en cnfgB (BA+0x401) gelezen en gewijzigd worden. Data wordt verstuurd door te schrijven naar register DataFIFO (BA+0x400); adressen worden verstuurd door te schrijven naar register AdressFIFO (BA+0).

bit	7:5	4	3	2	1	0
000	SPP	ECP	DMA	ECP	FIFO	FIFO
001	Bi-dir	interrupt	enable	service	vol	leeg
010	SPP FIFO					
011	ECP FIFO					
100	EPP					
101	Gereserveerd					
110	FIFO test					
111	Configuratie					

Tabel 10.9: ECP Extended Control Register ECR (BA+0x402)

Joystickpoort

Hardware

De joystickpoort is gebaseerd op vier RC-timers waarvan de R wordt gevarieerd door het bewegen van de joystick. Daarnaast zijn vier digitale ingangen aanwezig voor vier knoppen.

De naamgeving van de signalen is niet altijd consistent. Meestal worden de analoge signalen als A1..A4 aangeduid en de digitale als D1..D4. Soms wordt er echter van uitgegaan dat er twee joysticks worden aangesloten: de analoge signalen zijn dan X1,Y1 voor joystick 1 en X2,Y2 voor joystick 2. De digitale signalen worden dan A1,B1 voor knoppen A en B van joystick 1 en A2,B2 voor joystick 2.

Vaak zijn op de joystickpoort ook de MIDI-in en MIDI-out van de geluidskaart te vinden. De joystickpoort is een 15-pins SUB-D connector; female op de PC. De aanwezige +5 volt is direct verbonden met de voeding van de PC, zonder beveiligingen. Kortsluiting moet dus voorkomen worden.

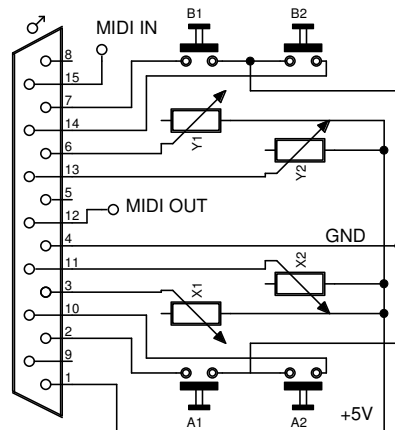
Pin	Signaal
1,8,9	+5V
4,5	GND
2	D1 A1
7	D2 B1
10	D3 A2
14	D4 B2
3	A1 X1
6	A2 Y1
11	A3 X2
13	A4 Y2
12	MIDI out
15	MIDI in

Joystick

Origineel is de joystickpoort ontworpen voor twee joysticks met ieder twee assen (X en Y) en twee knoppen (A en B). Joysticks met meerdere assen en/of knoppen kunnen ook worden aangesloten, maar dan kan slechts één per poort gebruikt worden.

Software

De joystickpoort beslaat één poortadres, 0x201. De vier most significant bits representeren de status van de digitale ingangen ('0'=laag, '1'=hoog). De vier least significant bits representeren de status van de analoge timers. Door (een irrelevante waarde) naar poort 0x201 te schrijven worden de timers gereset. Alle analoge bits lezen dan '1'. Na het verlopen van de RC-tijd wordt het bitje van het betreffende kanaal '0'



VGA

Voor de aansluiting van een analoge **VGA**¹-monitor op een computer bestaan verschillende connectoren. De meest gebruikelijke is de 15-pins high-density SUB-D connector. Oudere monitoren hebben soms een 9-polige connector; Mac monitoren hebben een standaard 15-polige SUB-D connector.

Sommige professionele monitoren hebben vijf BNC-connectoren, deze zijn direct met een VGA-kaart te verbinden. Bij vier connectoren moeten de twee sync signalen met een exor-port en een monoflop worden gecombineerd. Heeft de monitor slechts drie aansluitingen dan is een **Sync on Green** signaal nodig, waarbij de sync-signalen met het groene signaal worden gecombineerd.

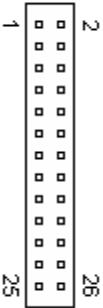
VGA-kaarten zijn soms intern voorzien van een **VESA**² connector. Hierop zijn een aantal interne signalen te vinden, die gebruikt kunnen worden om bijvoorbeeld een los LCD-scherm aan te sluiten.

¹Video Graphics Array

²Video Electronics Standards Association

	15p	9p	Mac	BNC		15p	9p	Mac	BNC
Signaal	HD		15p		Signaal	HD		15p	
Rood	1	1	2	R	Blauw gnd	8	8	13	G⊥
Groen	2	2	5	G	Sync return	10	9	14	H⊥,V⊥
Blauw	3	3	9	B	ID0	11			
ID2	4				ID1 / DDC data	12			
Gnd	5				HSync	13	4	15	H
Rood gnd	6	6	1	R⊥	VSync	14	5	12	V
Groen gnd	7	7	6	G⊥	ID3 / DDC clock	15			

Pin	Naam	Omschrijving	Pin	Naam	Omschrijving
1	PD0	DAC data 0 (PB)	14	GND	Massa
2	PD1	DAC data 1 (PG)	15	GND	Massa
3	PD2	DAC data 2 (PR)	16	GND	Massa
4	PD3	DAC data 3 (PI)	17		Select interne video
5	PD4	DAC data 4 (SB)	18		Select interne sync
6	PD5	DAC data 5 (SG)	19		Select interne clock
7	PD6	DAC data 6 (SR)	20	n/c	Ongebruikt
8	PD7	DAC data 7 (SI)	21	GND	Massa
9	CLK	DAC Clock	22	GND	Massa
10	BLK	DAC Blanking	23	GND	Massa
11	HSYNC	Horizontal Sync	24	GND	Massa
12	VSYNC	Vertical Sync	25	n/c	Ongebruikt
13	GND	Massa	26	n/c	Ongebruikt



Tabel 10.10: De pinout van VGA en VESA

DVI en DFP

DVI¹ is een interface die op veel grafische kaarten te vinden is. DVI is er in verschillende varianten: DVI-D, alleen digitaal; DVI-A, alleen analoog en DVI-I, die zowel digitaal als analoog is.

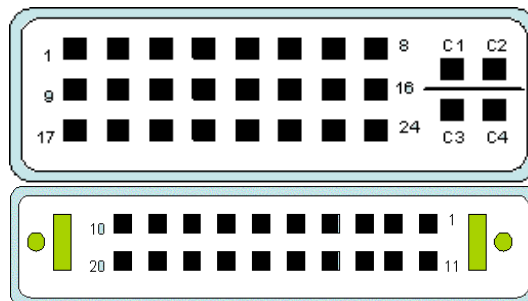
Pin	Signaal	Pin	Signaal	Pin	Signaal
1	TMDS Data 2 -	9	TMDS Data 1 -	17	TMDS Data 0 -
2	TMDS Data 2 +	10	TMDS Data 1 +	18	TMDS Data 0 +
3	TMDS D2/4 Gnd	11	TMDS D1/3 Gnd	19	TMDS D0/5 Gnd
4	TMDS Data 4 -	12	TMDS Data 3 -	20	TMDS Data 5 -
5	TMDS Data 4 +	13	TMDS Data 3 +	21	TMDS Data 5 +
6	DDC Clock [SCL]	14	+5 Volt	22	TMDS Clock Gnd
7	DDC Data [SDA]	15	Gnd for +5 Volt	23	TMDS Clock +
8	Analog V Sync	16	Hot-Plug Detect	24	TMDS Clock -
C1	Analog Red	C3	Analog Blue	C5	Analog Gnd
C2	Analog Green	C4	Analog H Sync		

Op flatpanels wordt soms de **DFP**² connector gebruikt, met de pinout:

Pin	Signaal	Pin	Signaal	Pin	Signaal	Pin	Signaal
1	Tx1 +	6	TxC -	11	Tx2 +	16	Tx0 -
2	TX1 -	7	Gnd	12	Tx2 -	17	Nc.
3	Gnd 1	8	+5 Volt	13	Gnd 2	18	HPD
4	Gnd C	9	Nc.	14	Gnd 0	19	DDC DAT
5	TxC +	10	Nc.	15	Tx0 +	20	DDC CLK

¹Digital Visual Interface

²Digital Flat Panel



Figuur 10.2: DVI (boven) en DFP (onder) pinout

Keyboard

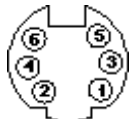
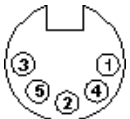


Er bestaan verschillende toetsenbordaansluitingen. De DIN-5 is het meest gebruikelijk op PC's tot en met de Pentium generatie. Vanaf de Pentium-II PC's is de PS/2 6 pins connector het gangbaarst. In tabel 10.11 is de pinout van verschillende aansluitingen te vinden. De keyboard- of muispoort kan gebruikt worden als voedingsbron voor externe schakelingen. De maximale stroom is meestal 500 mA, dit is exclusief het verbruik van het toetsenbord of de muis.

USB

De USB¹-poort biedt vele mogelijkheden: er kan een grote verscheidenheid aan apparaten op aangesloten worden, er kunnen meerdere apparaten via hubs op één poort worden aangesloten en kleine apparaten kunnen uit de bus gevoed worden. Met slechts een enkele chip is er een seriële- of parallelle poort van te maken, waar geen extra drivers voor nodig zijn. Er bestaan twee versies van USB: USB 1.1 kent de low speed 1.5MBit/s en de full speed 12MBit/s; USB 2.0 voegt daar een high speed van 480Mbit/s aan toe. Voor beide versies worden dezelfde kabels gebruikt. De rechthoekige 'A' connector wordt op de host (PC) aangesloten. Op devices bevindt zich een vierkante 'B' connector. De kabels met twee 'A' connectoren en de USB-verlengkabels die verkocht worden, bestaan volgens de USB specificatie niet. De werking van apparaten is dan ook niet gegarandeerd als een verlengkabel wordt toegepast.

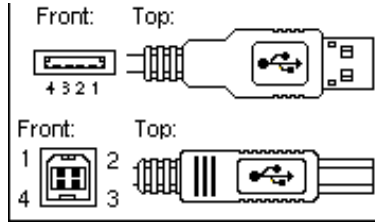
¹Universal Serial Bus

Signaal	PS/2 6	DIN-5	PS/2 8 (SUN)	PS/2 4 (Mac)
+5 Volt	4	5	3,8	3
GND	3	4	1,2	4
Data	1	2		1
Clock	5	1		
Keyb. Data RCV			5	
Keyb. Data XMT			6	
PWRN			7	2

Tabel 10.11: De pinout van de verschillende toetsenborden

Naam	Kleur	Omschrijving
1 Vcc	Rood	5 V, ;500 mA
2 D-	Wit	Data -
3 D+	Groen	Data +
4 Gnd	Zwart	Massa



Tabel 10.12: De pinout van USB A- en B-connectoren

Netwerk

Voor netwerkaansluitingen (**ethernet**) wordt meestal **UTP**¹, **STP**² of **FTP**³ kabel gebruikt. STP en FTP zijn beter bestand tegen elektromagnetische storing dan UTP. Bij patchkabels tussen een *hub* of *switch* en een PC is een 1:1 verbinding vereist. Het is bij deze kabel wel van belang dat de signaalparen ook daadwerkelijk over een twisted pair in de kabel lopen, vandaar dat altijd de pinning zoals in tabel 10.13 moet worden aangehouden.

Voor crosskabels om twee PC's onderling te verbinden moet één zijde van de kabel worden bedraad zoals gebruikelijk, terwijl de andere kant via de cross-over pinout moet worden aangesloten. Voor GigaBit is een speciale cross-kabel nodig (**TIA/EIA 568B**).

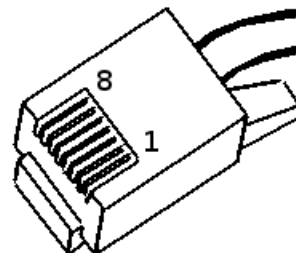
Zoals te zien zijn er bij 10baseT en 100baseT twee signaalparen ongebruikt, er kunnen dus in principe ook twee verbindingen door één kabel lopen. Bij Gigabit Ethernet zijn wel alle paren in gebruik; hier is deze truc dus niet mogelijk.

¹Unshielded Twisted Pair

²Shielded Twisted Pair

³Foiled Twisted Pair

Pin	Signaal 10/100	Straight	Cross 10/100	Cross GigaBit
1	TD+	or-wi	gr-wi	gr-wi
2	TD-	or	gr	gr
3	RD+	gr-wi	or-wi	or-wi
4	NC	bl	bl	br-wi
5	NC	bl-wi	bl-wi	br
6	RD-	gr	or	or
7	NC	br-wi	br-wi	bl
8	NC	br	br	bl-wi



Tabel 10.13: De pinout van netwerk patch- en crosskabels

GPIB

GPIB¹ is ontwikkeld door HP, oorspronkelijk onder de naam **HPIB**². Een andere aanduiding voor deze standaard is **IEEE 488.2**. De interface wordt nog steeds door vele fabrikanten van meetinstrumenten gebruikt voor de aansturing van multimeters, oscilloscopen, dataloggers, plotters, etc.

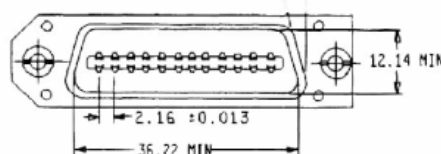
De pinbezetting van de GPIB connector staat in tabel 10.14.

¹General Purpose Interface Bus

²Hewlett Packard Interface Bus

Pin	Signaal	Beschrijving	Pin	Signaal	Beschrijving
1	DIO1	Data I/O bit 1	13	DIO5	Data I/O bit 5
2	DIO2	Data I/O bit 2	14	DIO6	Data I/O bit 6
3	DIO3	Data I/O bit 3	15	DIO7	Data I/O bit 7
4	DIO4	Data I/O bit 4	16	DIO8	Data I/O bit 8
5	EIO	End-Or-Idenrify	17	REN	Remote Enable
6	DAV	Data Valid	18	Shield	DAV Gnd
7	NRFD	Not Ready For Data	19	Shield	NRFD Gnd
8	NDAC	Not Data Accepted	20	Shield	NDAC Gnd
9	IFC	Interface Clear	21	Shield	IFC Gnd
10	SRQ	Service Request	22	Shield	SRQ Gnd
11	ATN	Attention	23	Shield	ATN Gnd
12	Shield	Chassis Gnd	24	GND	Single Gnd

Tabel 10.14: De pinbezetting van de GPIB bus



Figuur 10.3: GPIB connector

Hoofdstuk 11 Voedingen

Inhoudsopgave

78xx informatie	593
Standaard 78xx voeding	593
78xx voeding, hogere uitgangsstroom	594
78xx stroombron	594
LM317 en LM337	595
L200	596
MAX756	597
AT en ATX	598
Lichtnet	599
Lichtnet kleurcodering	599
Fase-aansnijding	599

78xx informatie

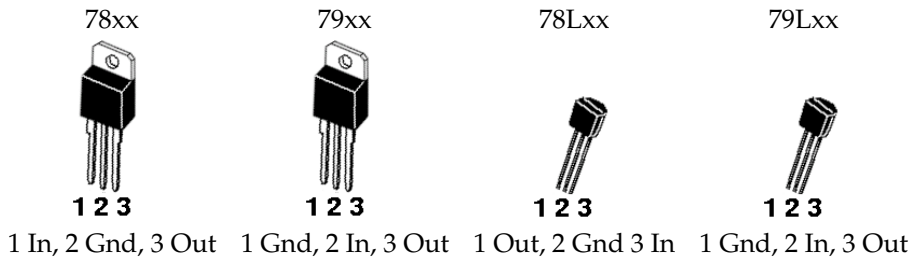
De 78xx en 79xx spanningsregelaars kunnen worden gebruikt om een schakeling te voorzien van een stabiele voedingsspanning. De 78xx serie kan worden gebruikt om een positieve spanning te reguleren; de 79xx kan voor negatieve spanningen worden gebruikt. Er bestaan 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 18 en 24 volt versies.

De 78xx serie kan een maximale stroom van 1A leveren en mag zonder koellichaam maximaal 2W dissiperen. De variant in TO92 behuizing, de 78Lxx, kan maximaal 100mA leveren. De minimale ingangsspanning is ongeveer 3V meer dan de uitgangsspanning. De maximale uitgangsspanning is ongeveer 15V boven de uitgangsspanning.

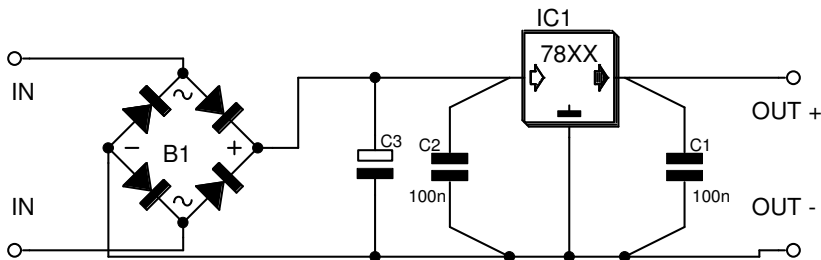
De pinout van de 78xx, 78Lxx, 79xx en de 79Lxx is te vinden in figuur 11.1.

Standaard 78xx voeding

Figuur 11.2 is zo ongeveer de simpelste 78xx-voeding. Hij voldoet als voeding voor vele schakelingen. Regelaar IC1 zorgt voor een geregelde uitgangsspanning. C1 zorgt voor betere stabiliteit en een beter transientgedrag. B1 en C3



Figuur 11.1: De pinout van de 78xx en 79xx



Figuur 11.2: Standaard 78xx voeding

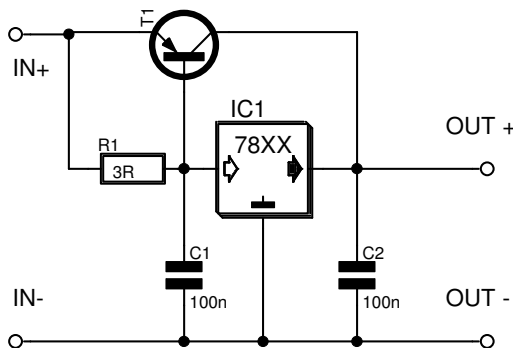
zorgen voor een afgevlakte gelijkgerichte spanning in geval van een wisselspanningsbron. Bij gelijkspanningsvoeding kunnen deze worden weggelaten; een diode tegen verkeerdt om polen is dan wel aan te bevelen. C2 is nodig vanwege de inwendige weerstand van C3.

78xx voeding, hogere uitgangsstroom

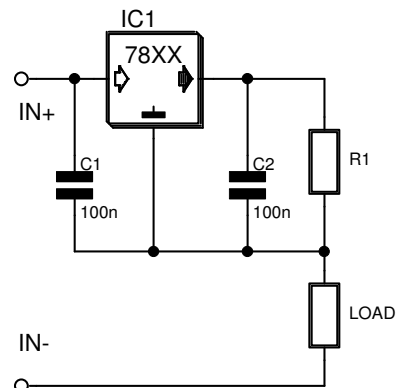
Door toevoeging van een extra PNP powertransistor is de uitgangsstroom van een standaard 78xx voeding te vergroten (figuur 11.3). De 78xx zorgt nog wel voor de regeling, maar een grootst deel van de uitgangsstroom loopt door de transistor. Wanneer er weinig stroom loopt, staat er een kleine spanning over R1 en spert T1, waardoor de schakeling als standaard 78xx voeding werkt. Stijgt de stroom door R1 tot ongeveer 200mA dan wordt de basis-emitterspanning van T1 0,6V waardoor T1 begint te geleiden. Hoe meer stroom nu gevraagd wordt, hoe meer T1 zal gaan geleiden. De stroom door IC1 blijft beperkt tot 200-250mA.

78xx stroombron

Een 78xx spanningsregelaar kan ook als stroombron worden geschakeld. De 78xx in figuur 11.4 regelt de spanning over weerstand R1 tot een constante waarde, zodat de stroom erdoor ook constant wordt. Om het verbruik te beperken kan het beste een regelaar met een lage uitgangsspanning worden gebruikt. Een LM317 kan ook worden toegepast.



Figuur 11.3: Hogere uitgangsstroom



Figuur 11.4: 78xx als stroombron

LM317 en LM337

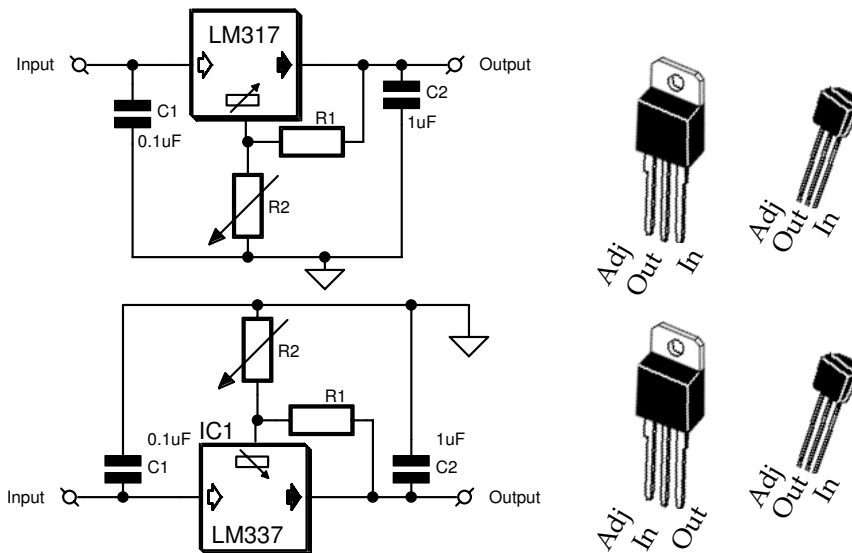
De **LM317** [7] is een 1,5 A spanningsregelaar bruikbaar van 1,5 tot 37 V. Hij is beveiligd tegen te hoge stroom en temperatuur. Deingangsspanning mag tussen de 4 en 40V liggen. De **LM337** [8] is de negatieve versie. Er bestaan ook kleinere versies: de LM317L en LM337L hebben niet een TO220 maar een TO92 behuizing. De maximale uitgangsstroom van deze versies is 100mA.

De regelaar kan worden gezien als een 78xx met een uitgangsspanning van 1,25V: de spanning tussen de uitgang en de adjust pen wordt op 1,25V geregeld. Door een weerstandsdeler te gebruiken zoals in figuur 11.5 kan een instelbare uitgangsspanning worden gemaakt.

De uitgangsspanning van deze schakeling is:

$$V_o = 1,25V\left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) + I_{adj}R_2 \quad (11.1)$$

Hierin is I_{adj} de stroom door de adjust pin, maximaal $50\mu\text{A}$.



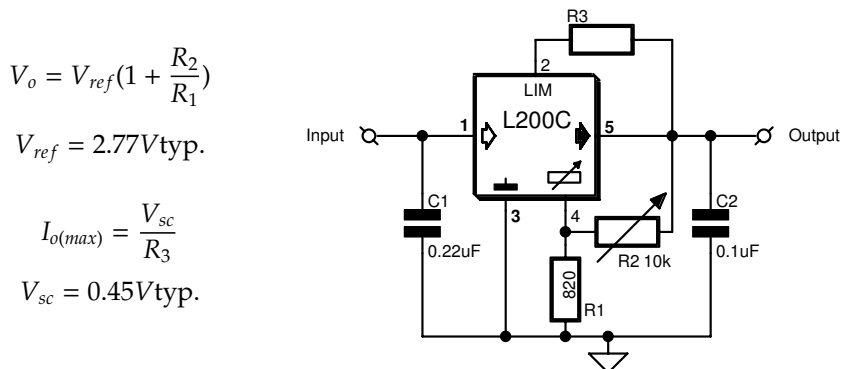
Figuur 11.5: Een spanningsregelaar met een LM317 en LM337

L200

De L200[9] is een spanningsregelaar die weinig externe componenten nodig heeft om er een goede **labvoeding** mee te maken. Deze spanningsregelaar kan tot 40 V regelen bij een maximale stroom van 2 A. De uitgangsstroom is wel beperkt door de ingestelde spanning. De maximale uitgangsstroom en vermogensdissipatie zijn intern begrensd.

Voor de spanningsregeling probeert de L200 de spanning op pen 4 constant te houden. De stroomregeling gebeurt door middel van een shuntweerstand. De spanning tussen uitgang pin 5 en limiting-ingang pen 2 wordt in dit geval geregeld. Als stroomregeling wordt toegepast moet er rekening gehouden worden met de spanningsval over de shuntweerstand; de ingangsspanning moet voldoende hoog zijn.

Figuur 11.6 toont een spanning- en stroombegrensd voeding op basis van de L200. De L200 kan tevens als stroombron geschakeld worden, door R1 en R2 weg te laten en pin 4 met de massa te verbinden.



$$V_o = V_{ref} \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$V_{ref} = 2.77V \text{ typ.}$$

$$I_{o(max)} = \frac{V_{sc}}{R_3}$$

$$V_{sc} = 0.45V \text{ typ.}$$

Figuur 11.6: Voedingsschakeling met de L200

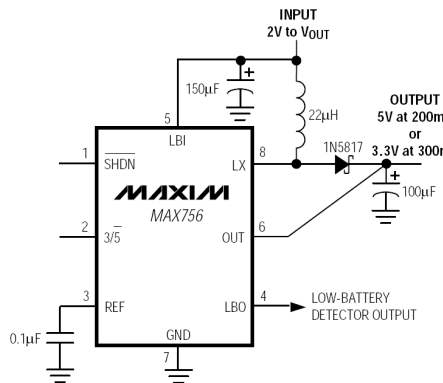
MAX756

De MAX756[10] is een **DC-DC converter** die van een lage spanning, vanaf 0,7 V, een uitgangsspanning van 5 Volt aan 200 mA kan leveren. Hierdoor is deze chip erg geschikt om apparaten die weinig stroom trekken en voorzien moeten worden van 5 V, met maar 1 enkele batterij te voeden.

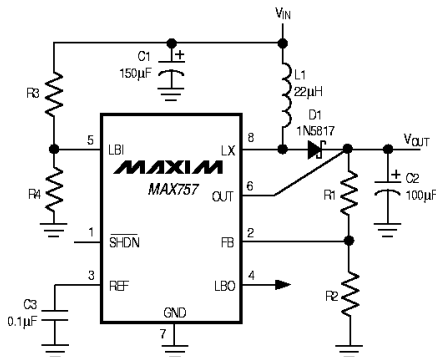
In het standaard schema kan met pin 2 de uitgangsspanning ingesteld worden op 3,3 of 5 V. Het vermogen dat de convertor kan leveren is sterk gerelateerd aan de gebruikte spoel. De draaddiameter moet voldoende dik zijn en het liefst om een massieve kern gewikkeld zijn. Om een hogere uitgangsspanning in te stellen dan 5 Volt wordt de volgende formule gebruikt:

$$V_{out} = V_{ref} \frac{R2 + R1}{R2} \quad (11.2)$$

Met $V_{ref}=1,25$ V. Hierbij mag de waarde van R1 en R2 tussen de 10 en 200 K Ω liggen en moet V_{out} lager dan 7 Volt blijven om een goede werking te garanderen.



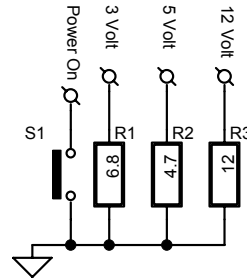
Figuur 11.7: Vaste V_{ss}



Figuur 11.8: Instelbare uitgang

AT en ATX

Een AT- of ATX-voeding is geschikt als goedkope sterke spanningsbron. De pinout hiervan staat in tabel 11.1. Omdat een minimale belasting nodig is moeten weerstanden volgens het schema hiernaast worden aangesloten. R1=5W, R2=11W en R3=25W. Een schakelaar tussen de 'Aan' pen en de gnd is bij ATX nodig om de voeding in te schakelen. Op de pen 'Standby' staat +5V, ook als de voeding uit is.



AT

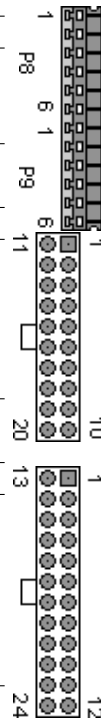
pin	signaal	pin	signaal	pin	signaal	pin	signaal
P8-1	Pwr OK	P8-4	-5V	P9-1	gnd	P9-4	+5V
P8-2	+5V	P8-5	gnd	P9-2	gnd	P9-5	+5V
P8-3	+12	P8-6	gnd	P9-3	-5V	P9-6	+5V

ATX-20

pin	signaal	pin	signaal	pin	signaal	pin	signaal
1	+3.3V	6	+5v	11	+3.3V	16	gnd
2	+3.3V	7	gnd	12	-12V	17	gnd
3	gnd	8	Pwr OK	13	gnd	18	-5V
4	+5V	9	Standby	14	Aan	19	+5V
5	gnd	10	+12V	15	gnd	20	+5V

ATX-24

pin	signaal	pin	signaal	pin	signaal	pin	signaal
1	+3.3V	7	gnd	13	3.3V sense	19	gnd
2	+3.3V	8	Pwr OK	14	-12V	20	nc
3	gnd	9	Standby	15	gnd	21	+5V
4	+5V	10	+12V	16	Aan	22	+5V
5	gnd	11	+12V	17	gnd	23	+5V
6	+5v	12	+3.3V	18	gnd	24	gnd



Kleuren

signaal	kleur	signaal	kleur	signaal	kleur
gnd	zwart	-5V	wit	Aan	groen
+3.3V	oranje	-12V	blauw	Pwr OK (AT)	oranje
+5V	rood	Standby	paars	Pwr OK (ATX)	grijs
+12V	geel	3.3V sense	oranje		

Tabel 11.1: De pinout en kleurcodering bij AT- en ATX-voedingen

Lichtnet

Lichtnet kleurcodering

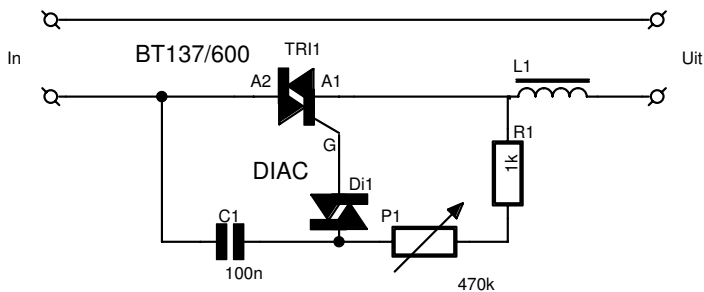
In Nederland zijn er twee kleurcoderingen voor het lichtnet in gebruik. In oudere huizen, van voor ca. 1970, is de oude Nederlandse kleurcodering te vinden. In nieuwere huizen zijn de kleurcodes volgens de Europese norm. Een probleem van de oude norm is dat mensen met rood-groen kleurenblindheid de fase en de nul niet goed kunnen onderscheiden

Funcctie	Oude codering	Nieuwe codering
Fase (P)	Groen	Bruin
Nul (N)	Rood	Blauw
Aarde (PE)	Grijs	Groen/geel gestreept
Schakeldraad (S)	Zwart	Zwart

Tabel 11.2: De oude en de nieuwe kleurcodering voor het lichtnet

Fase-aansnijding

Het dimmen van lampen die werken op netspanning kan het gemakkelijkst door gebruik te maken van **fase-aansnijding**. Hierbij wordt de netspanning niet de volledige periode doorgegeven, maar pas vanaf een instelbaar moment. Een prinseschema van een dimmer staat in figuur 11.9. Via R1 en P1 wordt C1 opgeladen. De diac detecteert wanneer de spanning over C1 een grenswaarde overschrijdt en schakelt dan triac TR1 in. Om netvervuiling te voorkomen is het noodzakelijk om een ontstoorspoel in serie te zetten met de schakeling. Als triac kan ook een ander type gebruikt worden, mits deze de netspanning aan kan en de stroom kan voeren.



Figuur 11.9: Dimmer volgens fase-aansnijding

Bibliografie

- [1] James Stewart. *Calculus Early Transcendentals*. 2003.
- [2] William Stallings. *Computer organization & architecture*. 2003.
- [3] James F. Kurose & Keith W. Ross. *Computer networking*. 2005.
- [4] David J. Griffiths. *Introduction to electrodynamics*. 1999.
- [5] M.J. Hoeijmakers. *Elektrische omzettingen*. 2003.
- [6] P.C. Breedveld & J. van Amerongen. *Dynamische Systemen*. 2004.
- [7] Lm317 3-terminal positive adjustable regulator.
<http://www.fairchildsemi.com/ds/LM/LM317.pdf>.
- [8] Lm337 3-terminal 1.5a negative adjustable regulator.
<http://www.fairchildsemi.com/ds/LM/LM337.pdf>.
- [9] L200 adjustable voltage and current regulator.
<http://www.ortodoxism.ro/datasheets/SGSThompsonMicroelectronics/mXqyxyz.pdf>.
- [10] 3.3v/5v/adjustable-output, step-up dc-dc converters.
<http://pdfserv.maxim-ic.com/en/ds/MAX756-MAX757.pdf>.
- [11] David C. Lay. *Linear Algebra and its applications*. 2003.
- [12] Samir S. Soliman & Mandyam D. Srinath. *Continuous and discrete signals and systems*. 1998.
- [13] M. Morris Mano & Charles R. Kime. *Logic and computer design fundamentals*. 2001.
- [14] W.L.C. Rutten & J.C.W. van Ommeren. *Zekere en onzekere informatie*. 2004.
- [15] Miko Elwenspoek & Gijs Krijnen. *Introduction to mechanics and transducerscience*. 2004.
- [16] A.J. Annema & A.P. van der Wel. *ELBAS/ELFUN*. 2003.
- [17] P.P.L. Regtien. *Measurement Science for Engineers*. 2004.
- [18] Job van Amerongen. *Regeltechniek*. 2005.

- [19] Wolters-Noordhof. *Binas*.
- [20] A.A.P.C. Kockx et al. *Elektrotechnische materialen voor het hoger technisch onderwijs*. Uitgeverij Nijgh en Van Ditmar Rijswijk, 1994.
- [21] Josepah J. Carr. *HF-techniek zonder mystiek deel 1*. Uitgeverij Segment BV, 1997.
- [22] B. Kainka. *PC poorten anders benut*. Uitgeversmaatschappij Elektuur BV.
- [23] Gerard Nachbar et al. *Het Elektuurtelefoonboek*. Uitgeversmaatschappij Elektuur BV, 1993.
- [24] Peter van Beeck. *Elektronica in huis*. Uitgeversmaatschappij Elektuur B.V., 1994.
- [25] 555 timer tutorial.
<http://www.uoguelph.ca/~antoon/gadgets/555/555.html>.
- [26] Capacitor information.
<http://bmc.bu.edu/bmc/caps/>.
- [27] Kemet ceramic leaded capacitors.
[http://www.kemet.com/kemet/web/homepage/kechome.nsf/vapubfilename/F3101.pdf/\\$file/F3101.pdf](http://www.kemet.com/kemet/web/homepage/kechome.nsf/vapubfilename/F3101.pdf/$file/F3101.pdf).
- [28] Film capacitors.
<http://my.execpc.com/~endlr/film.html>.
- [29] Fustica foliecondensators.
<http://www.fust-electronica.nl/fustica-info1.htm>.
- [30] Capacitors parts reference.
http://www.aoc.nrao.edu/~pharden/ref/_caps.pdf.
- [31] Marking of wima capacitors.
http://www.wima.com/wima_neu/EN/marking.htm.
- [32] Film dielectrics used in film capacitor products.
<http://www.vishay.com/docs/28147/intro.pdf>.
- [33] Technical note on film capacitors.
<http://www.vishay.com/capacitors/film/related>.
- [34] Wima technical information.
<http://www.wima.de/navig/tech.htm>.
- [35] Film capacitors, plastic dielectric capacitor film descriptions.
<http://www.americancapacitor.com/Diel.htm>.

- [36] Epcos general technical information on capacitors.
http://www.epcos.com/web/generator/Web/Sections/ProductCatalog/Capacitors/FilmCapacitors/PDF/PDF_GeneralTechnicalInformation,property=Data_en.pdf;/General_technical_information.pdf.
- [37] Lab notes (capacitor basics).
<http://www.arrl.org/tis/info/pdf/9701085.pdf>.
- [38] Is the film capacitor a victim of rohs?
http://www.wima.com/wima_neu/EN/article.htm.
- [39] Dielectrics.
<http://www.ascapacitor.com/PDF/dielectric.PDF>.
- [40] Film capacitor.
http://www.rubycon.co.jp/en/notes/film_pdfs/filmcapacitor1.pdf.
- [41] Scart connector.
<http://utopia.knoware.nl/users/eprebel/SoundAndVision/Engineering/SCART.html>.
- [42] Standard thermocouples.
<http://instrumentation-central.com/Thermocouple/Thermocouple4.pdf>.
- [43] Interfacing the extended capabilities port.
<http://www.beyondlogic.org/ecp/ecp.htm>.
- [44] Interfacing the enhanced parallel port.
<http://www.beyondlogic.org/epp/epp.htm>.
- [45] The rs232 standard.
http://www.camiresearch.com/Data_Com_Basics/RS232_standard.html.
- [46] Serial uart, an in depth tutorial.
http://www.lammertbies.nl/comm/info/nl_serial-uart.html.
- [47] Interfacing the serial / rs232 port.
<http://www.beyondlogic.org/serial/serial.htm>.

Index

- χ^2 -verdeling, 103
- ∇^2 , 69
- 3 dB-punt, 463
- 1-complement, 125
- 1/f ruis, 331
- 10BaseT, 216
- 2-complement, 125
- 7-segment display, 538
- 74xx, 530
- 78xx, 593
- 79xx, 593

- A-B voeding, 563
- aangepaste rechte lijn, 107
- aanhalingstekens, 26
- aanpassingstransformatie, 278
- aarding, 334
- ABC-formule, 42
- ABCD-notatie, 382
- absolute demping, 424
- absolute encoder, 364
- absolute fout, 326
- absolute waarde, 32
- absorptie, 294
- absorptiecoëfficiënt, 298
- abstract, 14
- abstract, 233
- abstracte klasse, 233
- absurdum, reductio ad , 32
- accent, 21
- acceptor, 280, 295
- Ackermann connector, 564
- actief vermogen, 471
- active guarding*, 342
- actuator, 402

- add, 158
- additieve fout, 326
- admittantie, 449
 - matrix, 472
- adresruimte, 165
- afbeeldingenmethode, 258
- afgeleide, 61, 62
 - rekenregels, 62
- afgeleide deltafunctie, 374
- afhankelijk, lineair, 52
- afhankelijke variabele, 320
- afsnijfrequentie, 463
- afsnijgebied, 286
- afstandsvector, 253
- aftelbaar oneindig, 36
- afwijgingsverhouding, 437
- AHDL, 126
- d'Alembertiaan, 69, 278
- aliasing*, 394
- alternatieve verdeling, 100
- ALU, 157
- ambivalent wikkelen, 492
- Ampère
 - lus van, 268
 - wet van ~, met Maxwell's correctie, 267
- ampère, 312
- amplitude, 372, 461
 - complexe, 272
- amplitudekarakteristiek, 463
- AMR, 347
- AND, 126
- anisotropic magnetoresistivity*, zie AMR
- apostrof, 21
- appendix, 15

- applicatielaag, 180
- arbeid, 246, 261, 404
- arbeidsfactor, 303, 471
- argument, 38, 432
- aritmische operatie, 41
- ARP, 210
- array, 220
- ASCII, 123, 154
- associatief, 33
- associatieve
 - cache, 167
 - toegang, 165
- asynchrone timing, 164
- AT-voeding, 598
- atto-, 3
- attribuut, 228
- ATX-voeding, 598
- audiospectrum, 555
- authoritative server*, 184
- AWG, 508

- BAC-CAB-regel, 49
- balun*, 503
- band pass filter*, zie BPF
- bandbreedte, 331
- banddoorlaatfilter, zie BDF
- bandgap E_g , 297
- basis, 55, 286
- basisadres, 175
- basistheorema, 55
- BCD, 125
- BDF, 469
- beademing, 8
- beginwaarde, 79
- beginwaardetheorema, 425
- beleefdheidsstrategie, 11
- bemonster-eigenschap, 375
- bepaalde integraal, 72
- bereik, 236
- Bernoulli-experiment, 100
- beschrijvende functiemethode, 443
- betrouwbaarheidsinterval, 105
- BIBO, 378
- bijjectief, 54
- bijlagen, 15
- bilaterale signaalstroom, 416
- bilineaire transformatie, 401
- binaire operator, 126
- binary coded decimal*, zie BCD
- binary reflected gray code*, zie BRGC
- binomiaalcoëfficiënt, 100
- binomiale verdeling, 100, 327
- binomisch theorema, 42
- Biot-Savart, tijdsafhankelijke wet van, 279
- bipolar junction transistor*, zie BJT
- bit, 123
- BJT, 286, 308, 476
- blikseminslag, 6
- blikwisseling, 32
- blindvermogen, 303, 471
- blok, 165
- blokfunctie, 374
- blokschema, 425
- blokschema-expansie, 420
- BNC, 217
- Bodediagram, 463
- Bodeplot, 432
- bodyfactor*, 293
- bondgraaf, 416
 - element, 416
 - opstellen, 417
- Booleaanse algebra, 128
- borstcompressie, 8
- bounded input bounded output*, zie BIBO
- BPF, 469
- bps, 177
- brandpunt, 91
- brandwond, 7
- BRD, 581

- break, 225, 226
Brewsterhoek, 276
BRGC, 125
brief, 18
broadcast, 202
bronladingen, 253
brugmodulator, 336
BS1843:1953, 544
BS4937:1993, 544
buffer, 404
buffering, 354, 411
bulk, 291
bulkfactor, 293
burst, 172, 367
bus, 163
byte, 123, 165
-
- cache*, 166
candela, 313
canonical name, 184
capaciteit, 262
carriage return, 154, 155
carry lookahead adder, 138
CAS, 172
case, 225
cast, zie *typecast*
causaal pad, 420
causaal relatieschema, 411
causaal systeem, 378
causaliteit, 420
Cayley-Hamilton theorema, 383
CEC, 561
centi-, 3
centrale limietstelling, 102
centronics, 583
checksum, 204
chirp, 367
chopperversterker, 338
chopperwiel, 336
circulaire convolutie, 380
- cirkel, 90
cirkelsector, 87
class, 229
client, 180
clone, 232
CM, 331
CMR, 347
CMRR, 331
co-energie, 251, 407
coëfficiëntenmatrix, 39
coërcie, 222
codomein, 56
cofactor, 52, 53, 428
collector, 286
colossal magnetoresistivity, zie CMR
Colpitts oscillator, 487
COM-poort, 579
commentaar, 227
common mode, zie CM
common mode rejection ratio, zie CMRR
communicatie, 10
commutatief, 33
competent model, 411
complement, 46
complex geconjugeerde, 44
complex getal, 37
complex schijnbaar vermogen, 303
complex vermogen, 471
complex vlak, 37
compliantie, 324
component, 411
component-video, 557
composiet-video, 556
compositie, 56
concentratiegradiënt, 295
concept, 411
condensator, 356, 450, 495
conductantie, 449
congestion control, 181, 199
consensustheorema, 128

- conservatief vectorveld, 79
- conservatief veld, 257
- consistent, 40
- constante, 220, 319
- constante van Planck, 294
- constitutieve relatie, 263
- constitutieve relaties, 404
- constructor, 230
- contact-thermometer, 348
- contactweerstand, 6
- continuïteit, 61
- continuïteitsvergelijking, 270
- continue, 226
- continue ladingsverdeling, 255
- continuous wave fm*, zie FMCW
- convergent, 84
- convergentiegebied, 395, 398
- convergentieradius, 398
- convolutie-integraal, 379
- convolutiesom, 380
- copy-back*, 169
- Coriolisversnelling, 250
- correlatiecoëfficiënt, 99
- $\cos(\varphi)$, 471
- Coulomb
 - tijdsafhankelijke wet van , 279
 - wet van, 253, 255
- Coulomb-aanpassing, 278
- counter*, 150
- covariantie, 98
- CPU, 157
- Cramer, regel van, 51
- crosskabel, 563, 580
- CS, 170
- CSMA/CD, 213
- CTS, 579
- curl, 68
- cut-off*, 286
- cw, 5
- cyclustijd, 166
- D-flipflop, 143
- D-latch, 142
- data communications equipment*, zie DCE
- data terminal equipment*, zie DTE
- datagram*, 179
- datapad, 157
- DC-component, 385
- DC-DC converter, 597
- DCD, 579
- DCE, 580
- DDC, 561
- DDR, 172
- De Moivre, 44
- De Morgan, 46, 128
- deca-, 3
- deci-, 3
- decibel, 463
- declaratie, 219
- decoder, 133
- deelruimte, 55
- default, 225
- definiërende vergelijkingen, 311
- delete, 231
- deltafunctie, 373, 375
- demand paging*, 175
- demultiplexer, 133
- depletielaag, 284
- destructor, 230
- determinant, 52, 428
- DFP, 588
- DFT, 393
- DHCP, 211
- DI-box, 571
- diëlektrische constante, 322, 356
- differentiërbaarheid, 61
- differentiëren, 62
 - partieel-, 64
 - rekenregels, 62
- differentiaal
 - totale-, 64

- differentiaalvergelijking, 79
 stelsel, 83
differential mode, zie DM
 differentiatieoperator, 61
 diffusie, 281
 diffusielengte, 297
 diffusiestroom, 296
 diffusiviteit, 281
 digitaal, 123
 digitale spanningmeter, 338
 dimensie, 55, 311
 DIN 47100, 508
 DIN-5 connector, 563
 DIN41618, 564
 diode, 284, 307
 dipool, 259
 dipoolmoment, 260
 Dirac-functie, 373
direct-injection-box, zie DI-box
 directe
 cache, 167
 toegang, 165
directivity), 352
 Dirichlet-voorwaarden, 385
 discontinuïteiten, 60
 discrete fourier-transformatie, zie DFT
discrete time fourier series, zie DTFS
 discriminant, 42
 dissipatieve absorptie, 294
 distributie, 411
 distributief, 33
 divergent, 84
 divergentie, 67, 68, 255
 divergentietheorema, 77
 DLAB, 582
 DM, 331
 DMA, 173
 DMX, 573
 DNS, 182
 do, 226
 dode tijd, 431
 DOF, 161
 domein, 56
 domeinnaam, 183
 don't care, 129
 donkerstroom, 352
 donor, 280, 295
 doorsnijding, 46
 dotering, 280, 295
drain, 291
 DRAM, 166, 171
 drempelspanningen, 152
 driefasensysteem, 303
 driehoek, 87
 driehoekfunctie, 374
 driepuntsmethode, 334
 drift, 281, 330
 driftsnelheid, 298
 druk, elektrostatistische, 262
 DSR, 579
 DTE, 580
 DTFS, 391
 DTFT, 392
 DTMF, 577
 DTR, 579
 dubbele integraal, 74
 dummy-variabele, 72
 DVI, 588

 e (getal), 85
 e, protonlading, 253
 E-reeks, 494
 Early-spanning, 287
 Ebers-Moll model, 287
 ECP, 583
eddy current, 360
 eenhedenstelsel, 254
 eenheid, 311
 eenheidshelling, 373
 eenheidsmatrix, 54

- eenheidsterugkoppeling, 428, 437
 éénpoot, 447
 EEPROM, 170
 eerste uniciteitstheorema, 258
 effectieve dotering, 284
effort, 403, 414
 eigenvector, 54
 eigenwaarde, 54
 eindig, 36
 eindig dimensionaal, 55
 Einstein-relatie, 282
 elasticiteit, 324
 elektrisch domein, 413
 elektrisch veld, 254
 elektrische permittiviteit, 322
 elektrische potentiaal, 256
 elektrometer, 338
 elektrostatica, 253
 elektrostatische druk, 262
 elektrostatische transducent, 366
 element, 411
 eliminatie, Gauss-, 49
 ellips, 91
 else, 225
 emitter, 286
emitter efficiency, 286
 emittervolger, 477
 energie, 247, 403
 -sigitaal, 376
 kinetische, 247
 overdracht, 302
 potentiële, 247, 261
 wet van behoud van, 270
 energietechniek, 302
enhanced capabilities port, zie ECP
enhanced parallel port, zie EPP
 enthalpie, 407
 entropie, 403
 EPP, 583
 EPROM, 170
 equipotentiaal, 257
 erf(z)-functie, 101
 ethernet, 212, 216, 590
 Euclidisch algoritme, 43
 EUI-64, 210
 Euler-vergelijking, 372
 even symmetrie, 386
 EX, 161
 exa-, 3
 excentriciteit, 91
 excitatie, 456
 EXNOR, 127
 EXOR, 127
 exponentiële functie, 62
 exponentiële verdeling, 101
 extensie, 183
 extensieve toestandsvariabele, 403
 extensieve variabele, 320
 extrinsieke halfgeleider, 280

 F-verdeling, 103
 factoriseren, 41
 faculteit, 45
 false, 237
 fantoomvoeding, 563
 farad, 262
 Faraday
 kooi van, 262
 wet van, 267, 345
 fase-aansnijding, 599
 fase draaiing, 461
 fasekarakteristiek, 463
 fasemarge, 435
 fasevlakmethode, 443
 fasor, 462
fast retransmit, 198
feedback, 333
 femto-, 3
 Fermi-Dirac statistiek, 282
 Fermi-energie, 283

- Ferminiveau, 295
 FET, *zie* MOSFET
fetch, 157
 Fick, wet van, 281
 FIFO, 583
 filtering, 334
finite impulse response, *zie* FIR
finite state machine, *zie* FSM
 FIR, 378
 Flashlight-norm, 566
 flipflop, 143
floating point, 236
flow, 404, 414
flow control, 181, 198
 flux, 345
fluxgate sensor, 346
 FMCW, 367
 for, 226
forward, 286
forwarding, 202
 fotocel, 294
 fotodiode, 294
 fotometrische grootheid, 320
 foton, 294
 fotostroom, 297, 352
 fotovoltaisch element, 294
 Fourier-reeks, 385
 Fourier-transformatie, 387
 fout, stationair, 437
 foutcompensatie, 332
 foutcorrectie, 334
 foutmarge, 105
 foutvoortplantingsregel, 330
 fragmentatie, 175
frame, 175, 179
 frequentie, 271, 372, 461
 frequentie-domein, 387
 frequentiequotiënt, 94
 frequentieresponsie, 432, 463
fringe field, 356
fringes, 365
 FS, 331
 FSM, 144
 FTP, 192, 590
 FU, 157
 Fubini, stelling van, 75, 77
full scale, *zie* FS
full-adder, 136
 functie, 56, 223
 fundamentele stelling, 69, 73
 fysieke laag, 179
 fysisch adres, 175

 gamma-functie, 45
garbage collection, 231
gate, 291
gate turn-off-thyristor, *zie* GTO
gateway, 211
gauge
 transformation, 278
 Coulomb, *zie* Coulomb-aanpassing
 Lorentz, *zie* Lorentz-aanpassing
 Gauss
 -eliminatie, 49
 wet van, 255, 267
 Gaussisch eenhedenstelsel, 254, 263, 264
 Gaussisch pillendoosje, 268
 Gaussische verdeling, *zie* normale verdeling
 GBS, 477
 GCS, 477
 GDS, 478
 gebalanceerd, 332, 571
 gebeurtenis, 94
 geconjugeerde toestandsvariabele, 404
 gedachtestreepje, 26
 gedegeneerde verdeling, 100
 geheugen, 165, 174
 geheugenloos systeem, 378

- gekoppelde flux, 304
- gekoppelde spoelen, 306, 473
- geleider, 262
- geleidingsband, 297
- gelijkheid, 59
- gelijkrichtercomponent, 307
- gelijkspanning, 338
- gelijkstroom
 - overdracht, 302
 - versterking, 421
- geluidssnelheid, 366
- gemeenschappelijke periode, 43
- gemiddeld vermogen, 303
- gemiddelde, 104
- generator, 402
- gereduceerde trapvorm, 39
- GES, 477
- gesloten systeem, 435
- GET methode, 186
- getter, 543
- gevoeligheid, 436
- GGS, 478
- giant magnetic resistance effect*, zie GMR
- Gibbs vrije energie, 407
- giga-, 3, 123
- GMR, 347
- God, 22
- golf
 - reflectie, 274
 - transmissie, 274
 - vlakke elektromagnetische, 272
- golfgetal, 271
- golflengte, 271
- golfvergelijking
 - driedimensionale Cartetische, 272
 - inhomogene, 278
- goniometrie, 86
- goniometrische functie, 63
- GPIB, 591
- graaf, 452
- gradiënt, 68
- gradiëntveld, 257
- gradual channel approximation*, 293
- grafieken, 16
- gravitatieconstante, 245
- Gray code, 125
- Greens theorie, 75
- Grieks alfabet, 3
- Griekse alfabet, 3
- grootheid, 311
 - behouden, 270
- grootsignaalinstelling, 477
- grootste gemene deler, 43
- GSS, 478
- GTO, 308
- Gummelgetal, 284
- half-adder*, 136
- half-angle*, 352
- half-wave* oneven symmetrie, 386
- Hallsensor, 345
- Hallspanning, 346
- halve brug, 344
- handshaking*, 580
- harmonische, 385
 - oscillator, 487
 - signalen, 409
- harmonische functies, 69
- Harting connector, 566
- HD-TV, 557
- HD44780, 539
- HDF, 467
- HDMI, 561
- Heaviside-functie, 373
- Heaviside-Lorentz eenhedenstelsel, 254
- hecto-, 3
- Helmholtz vrije energie, 407
- Hessiaan, 65
- heuvelklimmen, 442
- hiërarchisch model, 411

-
- histogram, 328
 - hoekfrequentie, 271, 372, 461
 - hold* tijd, 152
 - homogeen, 51
 - homogene lineaire differentiaalvergelijking, 80
 - homogene oplossing, 460
 - homogene verdeling, *zie* uniforme verdeling
 - hoofdletter, 22
 - hoogdoorlaatfilter, *zie* HDF
 - hoogspanning, 7
 - Hooke, wet van, 247, 324
 - hop-count*, 204
 - Hopkinson, wet van, 304
 - host*, 177
 - hostnaam, 183
 - HPF, 467
 - HPIB, 591
 - HTTP, 185
 - HTTP response, 191
 - HTTPS, 190
 - hub*, 215, 590
 - hulpverlening, 7
 - hyperbolische functie, 63
 - hyperbool, 92
 - hysterese, 331
 - hystereselus, 443

 - I/O, 163, 173
 - IAE-criterium, 442
 - IC-drempelspanningen, 152
 - ICMP, 205
 - IDFT, 394
 - IEC, 126
 - IEC 584-3, 544
 - IEC 8859-1, 155
 - IEEE 1284, 583
 - IEEE 488.2, 591
 - IEEE 802.3, 212

 - IF, 161
 - i* f, 225
 - IFG, 213
 - IGBT, 308
 - IIR, 378
 - ijzertrichloride, 551
 - IL, 160
 - imaginair getal, 37
 - IMAP, 193
 - impedance analyzer*, 344
 - impedantie, 449, 462
 - matrix, 410, 472
 - transformator, 473, 503
 - impliciete typecast, 222
 - impuls, 373, 375
 - impuls-invariante transformatie, 401
 - impulsmoment, 246
 - impulsresponsie, 377
 - increment, 158
 - incrementele encoder, 365
 - index, 15
 - inductie, 450
 - inductie, volledige, 32
 - infinite impulse response*, *zie* IIR
 - infix, 33
 - ingangssignaal, 372
 - ingebouwde potentiaal, 284, 291
 - initialiseren, 219
 - instabiliteit, 434
 - insulated gate bipolar transistor*, *zie* IGBT
 - integer, 236
 - integraal
 - bepaalde, 72
 - meervoudig, 74
 - onbepaald, 70
 - integratiefactor, 79
 - integratiegebied, 75
 - intensieve toestandsvariabele, 403
 - intensieve variabele, 320
-

- intensiteit, 273
- interferometer, 365
- interframe gap*, zie IFG
- internet, 177
- interpunctie, 28
- interrupt, 163
- interval, 36
- interview, 20
- intrinsieke halfgeleider, 280
- inverse, 54
- inversie, 475
- inverteerbaar systeem, 378
- inverteerbare matrix, 54
- inverterende configuratie, 483
- inwendig product, 48
- IP, 201
- IP-adres, 182
- IPM-symbolen, 411
- irreversibele omzetting, 411
- ISA, 158
- ISE-criterium, 442
- ISO-8859-1, 155
- isolator, 262
- ISP, 177
- ITAE-criterium, 443
- ITSE-criterium, 443

- jack-connector, 562
- Jacobiaan, 408
- Javadoc, 227
- Jefimenko, vergelijkingen van, 279
- JK-flipflop, 144
- Josephsoneffect, 318
- joystickpoort, 586
- jump*, 159
- junctie, 295

- kanonieke rijvorm, 39
- kans, 94
- kansdichtheidsfunctie, 96
- kansmaat, 94
- kansrekening, 94
- kansverdeling, 95
- karacteristieke vergelijking, 80, 408, 429, 460
- Karnaugh diagram, 128
- kegelsnede, 89
- kelvin, 312
- kettingregel, 62
- kilo-, 3, 123
- kilogram, 312
- Kirchhoff, 451
- Kirk effect, 287
- klasse, 228
- klassieke bijgevoegde, 53
- kleinsignaalvervangschema, zie KSVS
- kleinste-kwadraten-methode, 106
- kleurcode, 493
- kleurcodering, 508
- Klitzing, Von, zie Von Klitzing constante
- knooppunt, 452
- knooppuntsanalyse, 453
- kolomruimte, 55
- komma, 27
- kooi van Faraday, 262
- koppelteken, 21
- kracht
 - elektromagnetische, 270
- krachtmoment, 246
- krachtwet
 - elektromagnetische, 267
- kritieke frequentie, 394
- kritieke pad, 152, 160
- kritisch gedempt, 460
- kromme, 90
- kruisproduct, 48
- KSVS, 288, 474
- kurkentrekkerregel, 48
- kwadratuur, 365

- kwaliteitsfactor, 464
 kwantumefficiëntie, 352

 L200, 596
 laagdoorlaatfilter, *zie* LDF
 lab-voeding, 596
 lading(s), 253, 447
 -dichtheid, 267, 268
 -spanningsomzetter, 370
 wet van behoud van, 270
 ladingsverdeling, 255
 lagnetwerk, 438
 Lagrange, 66
 Laplace-transformatie, 395
 Laplaceoperator, 69
 Laplacevergelijking, 69, 257
 Laplaciaan, 69
 Latin-1, 155
 LCD, 538
 LDF, 466, 468
 LDR, 351
 leadnetwerk, 438
 lease, 212
 least square niet-lineairiteit, 330
 least squares method,
 zie kleinste-kwadraten-methode
 LED, 537
 leestekens, 28
 lege verzameling, 36
 Legendre transformatie, 407
 Legendrepolynoom, 70
 licht, 320
 lichtnet, 6
 lichtquant, 294
 lichtsnelheid, 272
 light dependent resistor, *zie* LDR
 lijdende zin, 13
 lijn, 90
 lijn-aansluiting, 562
 lijnspectrum, 385

 line feed, 154, 155
 line printer, *zie* LPT
 lineair afhankelijk, 52
 lineair en tijd-invariant, *zie* LTI
 lineair gebied, 292
 lineair onafhankelijk, 51, 54
 lineair stelsel, 39
 lineair systeem, 377
 lineair variabele differentiaal conden-
 sator, *zie* LVDC
 lineair variabele differentiaaltransfor-
 mator, *zie* LVDT
 lineaire convolutie, 379
 lineaire deelruimte, 55
 lineaire transformatie, 54
 lineairisatie, 443
 link, 177
 linkerhalfvlak, 379
 linklaag, 179, 208
 literatuurlijst, 15
 LM317, 595
 LM337, 595
 local handshaking, 580
 lock-in versterker, 341
 locus
 root-, 429
 tau-, 431
 logaritmische functie, 62
 logisch adres, 175
 logische poort, 126
 longest prefix match, 202
 loop gain, 333
 loopback, 202, 206
 Lorentz, 264
 -aanpassing, 278
 low pass filter, *zie* LPF
 LPF, 466, 468
 LPT, 583
 LRU, 167
 LTI, 377

- LVDC, 357
- LVDT, 360
- maasanalyse, 453
- MAC, 208
- MAC-adres, 210
- machten van 10, 3
- Maclaurin reeks, 84
- magnetisatie, 267
- magnetisch(e)
 - circuit, 304
 - domein, 413
 - flux, 304
 - permeabiliteit, 312
 - permeabiliteit, 322
 - potentiaal, 277
 - reluctantie, 304
 - veld, bijkomend, 267
 - weerstand, 304
- magnetomotorische kracht, 304
- marginale kans, 96
- mark, 579
- Mason, regel van, 427
- mass-action law, 283
- massatraagheidsmoment, 249
- matrix, 39
 - rekenregels, 51
 - van coëfficiënten, 39
- MAX756, 597
- maximum, 65
- maximum segment size*, zie MSS
- maximum transmission unit*, zie MTU
- maxterm, 129
- Maxwell, 264
 - vergelijkingen, 267
 - wet van Ampère met \sim 's correctie, 267
- Maxwell rek tensor, 270
- Maxwell vergelijkingen, 268, 277
- Maxwell-Boltzmann statistiek, 282
- Mealy machine, 144
- mediaan, 104
- meervoud, 23
- meetbrug, 336
- meetfout, 104
- meetkundige reeks, 84
- meetweerstand, 342
- mega-, 3, 123
- meneer van Dale, 40
- metal oxide semiconductor field effect transistor*, zie MOSFET
- meter, 312
- methode, 228
- methode van onbepaalde coëfficiënten, 81
- methode van parametervariatie, 81
- metrieke stelsel, 313
- micro-, 3
- microfooningang, 562
- microfoonsignaal, 562
- Microprogrammed Control*, 159
- microstrain*, 356
- middelpunt, 91
- MIDI, 572
- milli-, 3
- MIME, 188
- mini-XLR connector, 563
- minimum, 65
- minterm, 128
- mobiliteit, 281
- model, 411
- modelvorming, 411
- modulatie, 335, 338
- modulator, 402
- modulus, 37, 432
- moduluskarakteristiek, 463
- mol, 312
- moment
 - behoud van, 270
 - elektromagnetisch, 271

- momentaan vermogen, 303, 470
 monochromatisch, 272
 monopool, 259
 monopoolmoment, 260
 monotoon, 84
 monovariante analyse, 104
 Moore machine, 144
 Morse-alfabet, 5
 MOS transistor, 475
 MOSFET, 291, 308
 MSS, 197
 MTU, 203
multi cycle computer, 160
multicast, 194, 202
 multimeter, 338
 multiplexen, 538
 multiplexer, 135
 multiplicatieve fout, 326
-
- n*-boven-*k*, 100
n-type materiaal, 295
 Nabla-operator, 67
 NAND, 127
 nano-, 3
 NAT, 192, 205
 natriumhydroxide, 552
 natriumpersulfaat, 551
 natuurlijk getal, 36
 natuurlijke responsie, 456
 NEN 3570, 302
 NEP, 352
 netwerk, 452, 590
 netwerklaag, 179, 201
network address translation, zie NAT
 new, 231
 Newton
 - axioma's van-, 244
 - tweede wet van, 271
 nibble, 123
 Nicholsdiagram, 432
- niet-lineairiteit, 330
 NNTP, 193
 NOB-norm, 566
noise equivalent power, zie NEP
 NOR, 127
 normale verdeling, 101, 327
 NOT, 126
 NTC, 348
 NTSC, 556
 null-modem kabel, 558, 580
 nulpunt, 422
 nulpuntsdrift, 330
 nulruimte, 55
 Nyquist-frequentie, 394
- object, 228
 objecttype, 231
 octopool, 259
 OE, 170
 offset, 330
 omgeving, 411
 omzetting
 - irreversibel, 411
 onafhankelijk
 - lineair, 54
 onafhankelijk, lineair, 51
 onafhankelijke variabele, 320
 onbepaalde integraal, 70
 ondergedempt, 460
 onderling onafhankelijk, 95, 97
one-over-f noise, 331
 oneindig, 36
 oneindig dimensionaal, 55
 oneven symmetrie, 386
 ongebalanceerd, 571
 ongelijkheid, 59
 ongerijmde
 - bewijs uit het -, 32
 ontaarde verdeling, 100
 ontbinden in factoren, 42

opamp, 482
opcode, 157
open systeem, 435
operanden, 33
operatie, 40
operatoren, 33, 237
oppervlaktelading, 258
opslag, 411
opspansel, 55
optische encoder, 364
OR, 126
orde, 79, 456
OS, 174
oscilloscoop, 338, 340
OSI-model, 179
out-of-band control, 192
overaftelbaar oneindig, 36
overdrachtsadmittantie, 463
overdrachtsfunctie, 410, 463
overdrachtsimpedantie, 463
overgedempt, 460
overloading, 235
override, 234
oversteektijd, 290

P-regelaar, 444
p-type materiaal, 295
p-type variabele, 415
pad, 452
pad, causaal, 420
paging, 175
PAL, 556
parabool, 92
parallele poort, 583
parallellepipedum, 49
parallelschakeling, 449
parallelvorm, 422
parameter, 56, 223
Parseval, theorema van, 386
partiële som, 84

partial full adder, zie PFA
particuliere oplossing, 81, 460
partieel integreren, 74
partities, 175
passief-teken conventie, 447
Pauli-principe, 282
PCB, 551
periode, 372, 461
periodiek signaal, 372
periodieke convolutie, 380
permittiviteit, 253
peta-, 3
PFA, 138
phase-locked-loop, zie PLL
PI-regelaar, 444
piëzo-element, 366, 368
pico-, 3
PID-regelaar, 445
piektijd, 424
pipeline, 172
pipelining, 161
pivot, 40
pivotpositie, 54
PL, 160
plaatjes, 16
planair netwerk, 453
Planck, constante van, 294
PLL, 341
pn-product, 295
point-to-point, 194
pointer, 224
Poisson, wet van, 284
Poisson-verdeling, 100, 327
Poisson-verhouding, 356
Poissonvergelijking, 69, 257
Poissonvergelijkingen, 279
polair figuur, 432
polaire vorm, 37
polarisatie, 267, 276
polen, 379

- polynoom, 41
 - Legendre-, 70
- pool, 422
- poolbaan, 430
- poolbaanvergelijking, 429
- poolbaanversterking, 421
- poolcoördinaten, 76
- poort, 126, 402
 - joystick-, 586
 - printer, 583
 - seriële, 579
 - USB, 589
- poortnummer, 182
- POP3, 193
- POS, 129
- positie, 244
- positieve temperatuur coëfficiënt, *zie*
 - PTC
- position sensitive diode*, *zie* PSD
- POST methode, 186
- postfix, 33
- potentiële energie, 261
- potentiaal, 256
- potmeter, 354
- Poyntingvector, 270
- predetectiefilter, 341
- prefix, 33
- primitief type, 222, 236
- primitiveren, 70
- printerpoort, 583
- printf()-functie, 239
- printplaat, 551
- priority encoder*, 133
- private, 232
- probeverzwakker, 340
- problemen oplossen, 32
- product
 - inwendig, 48
 - scalar triple-, 49
 - uitwendig, 48
 - vector triple-, 49
- product of sums*, *zie* POS
- productregel, 62
 - voor vectoren, 68
- productterm, 128
- PROM, 170
- propagatievertraging, 152
- proportioneel integrerende differentiërende
 - regelaar, *zie* PID-regelaar
- proportioneel integrerende regelaar, *zie*
 - PI-regelaar
- proportionele regelaar, *zie* P-regelaar
- protected, 232
- protocol, 177
- proxy-server, 192
- PSD, 351
- Pt-100 sensor, 348
- PTAT sensor, 350
- PTC, 348
- public, 232
- punt, 90
- puntladingen, 253
- puntvermenigvuldiging, 48
- pyrometer, 350
- Pythagoras, stelling van, 86
- q-type variabele, 415
- QED, 35
- QoS, 203, 206
- quadrupool, 259
- quality of service*, *zie* QoS
- quantum Hall effect, 319
- quotiëntregel, 62
 - vector, 68
- R-latch, 141
- raaklijn, 61
- radiaal, 87, 313
- radiometrische grootheid, 320
- radix, 124

- RAM, 165, 170
- ramp*, 373
- randvoorwaarden, 66
- rang, 55
- rangtheorema, 55
- RARP, 210
- RAS, 172
- rationaal getal, 36
- reëel vermogen, 471
- reactantie, 449
- reactief vermogen, 471
- reanimatie, 7
- rechte, 90
- rechterhalfvlak, 379
- rechterhandregel, 48
- rechthoekige driehoek, 86
- rechtstreekse weg, 427
- rect-functie, 374
- reeks, 84
- referentietype, 222, 231
- reflectie, 274
- reflectiecoëfficiënt, 277
- regel van Cramer, 51
- regelaar
 - algemeen toepasbare, 444
- regelbaarheid, 442
- regeltechniek, 421
- region of convergence*, zie ROC
- register, 15, 149
- regressie-analyse, 106
- regressielijn, 107
- rekenkundige reeks, 84
- rekenregels voor vectoren, 47
- rekfactor, 355
- rekstrookje, 355
- relaiswerking, 443
- relatieschema, 411
- relatieve demping, 424, 464
- relatieve fout, 326
- relaxatieoscillator, 486
- reluctantie, 359
- reluctantie, magnetische, 304
- resolutie, 331
- resolver*, 361
- resource record*, zie RR
- responsie, 372, 377, 456
- responsvariabele, 106
- return, 223
- reverse*, 286
- reversibele omzetting, 411
- RGB-video, 557
- RI, 579
- richtingsgevoeligheid, 352
- richtlijn, 91
- Riemann-som, 72
- rij, 84
- rij-equivalent, 49, 54
- rij-operaties, 49
- rijruimte, 55
- rijvorm
 - kanoniek, 39
 - standaard, 39
- ripple carry adder, 137
- RLE, 583
- RMS, 339, 376, 461
- ROC, 395, 398
- ROM, 159, 166, 170
- root mean square*, zie RMS
- root-locus, 429
- rotatie, 68, 248, 255, 413
- rotor, 361
- round robin DNS*, 185
- round trip time*, zie RTT
- router, 202, 215
- routing, 202
- RR, 184
- RS485, 574
- RTS, 579
- RTT, 198
- ruimteladingsgebied, 284

- ruis, 331, 485
 ruisdichtheid, 485
run length encoding, zie RLE
 RVDC, 357
 RVDI, 361
RxD, 579
- S-latch, 141
 S-Video, 557
 samenstelling, 24
 samenvatting, 14
sampling property, 375
sampling-function, 374
 saturatie, 286, 475
 scalar, 67, 319
 scalarvermenigvuldiging, 47
scaling property, 375
 scart, 558
-
- schaaleigenschap, 375
 schakelcomponent, 308
 schakelmodulator, 336
 schalen, 376
 scheidbare vergelijkingen, 79
 scheiding van variabelen, 59, 259, 482
 schijnbaar vermogen, 303, 471
 schuifregister, 150
 schuiven, 376
 SECAM, 556
 seconde, 312
 Seebeck effect, 349
 segment, 179, 194
 segmentatie, 176
 seismische massa, 369
 sensor, 402
 sequentiële toegang, 165
 seriële poort, 579
 serieschakeling, 449
 serievorm, 422
server, 180
set-up tijd, 152
- sgn-functie, 374
shielded twisted pair, zie STP
shielding, 334
shift, 157
 shift register, 150
 Shockley-formule, 297
 SI, 312
sifting property, 375
 signaal, 372
 signed magnitude, 125
 signum-functie, 374
 simulatiediagram, 381
 simultane kansverdeling, 96
 sinc-functie, 374
single cycle computer, 159
skineffect, 503
 slot-n, 23
slow start, 199
 SMD, 492
 SMTP, 193
 snelheid, 244
 snelheid van elektromagnetische golven in vacuüm, 272
 Snellius, wetten van, 276
 Socapex-connector, 564
socket, 182
 sollicitatiebrief, 18
 somterm, 129
 SOP, 129
 sorteren, 15
source, 291
 sourcevolger, 478
space, 579
 spanning(s), 338, 447
 - buffer, 484
 - deler, 451
 - versterker, 370
 - volger, 484
 - wet, 451
 - wet-vergelijking, 452

- Speakon-connector, 567
- spectrum, audio, 555
- sper, 286
- spiegelen, 376
- spoel, 322, 450, 502
 - gekoppelde, 306
- SPP, 583
- square law model*, 292
- SR-flipflop, 143
- SR-latch, 142
- SRAM, 170
- SSH, 193
- stabiliteit, 378, 408, 434
- standaard, 318
- standaard rijvorm, 39
- standaardafwijking, 98, 327
- standaardnormale verdeling, 102
- standard parallel port*, zie SPP
- stapfunctie, 373, 375
- stapresponsie, 425
- startbit*, 573
- startbyte*, 573
- static, 235
- stationaire fout, 437
- statistiek, 94
- stator, 361
- steady-state response*, 463
- steekproefcorrelatiecoëfficiënt, 106
- steilheid *s*, 477
- stelling van Pythagoras, 86
- stelsel, lineair, 39
- steradiaal, 313
- stochastische variabele, 95
- Stokes, 77, 256
- stopbit*, 573
- store*, 158
- STP, 217, 590
- straal, 91
- strain gauge*, 355
- straling, 320
- stralingsdruk, 273
- stralingsthermometer, 350
- strikt positief of negatief getal, 36
- strooiveld, 356
- stroom, 342, 447
 - deler, 451
 - dichtheid, 267, 268
 - schema, 427
 - spiegel, 481
 - tang, 342
 - versterking, 286, 476
 - wet, 451
 - wet-vergelijking, 452
- struct, zie structure
- structure, 221
- structuur, 411
- structuurvergelijking, 452
- Student-verdeling, 103
- stuik, 332
- stuurkarakteristiek, 292
- subdomein, 183
- subklasse, 232
- subnetmask*, 201
- substelsel, 411
- sum of products*, zie SOP
- super, 234
- superklasse, 233
- superpositie, 453
- superpositiebeginsel, 253, 377
- surface mounted device*, zie SMD
- susceptantie, 449
- swapping*, 175
- switch*, 215, 590
- switch, 225
- symmetrie, 386
- Sync on Green*, 557, 587
- synchro*, 362
- synchrone detectie, 337
- synchrone timing, 164
- système international d'unités, zie SI

- systeem, 411
 -beschrijving, 421
 -grens, 411
 -versterking, 421
 systematische fout, 104, 326
- T-flipflop, 144
 t-verdeling, 103
 tabel, 16
 tak, 452
 talstelsels, 124
 tau-locus, 431
 Taylorreeks, 84
 TCP, 181, 194
 telefoonaansluiting, 576
 teller, 150
 Telnet, 193
 tera-, 3
- terugkoppellus, 427
 testlading, 253
 Thévenin-equivalent, 454
 theorema van Norton, 454
 theorema van Thévenin, 454
 theorema van Westcott, 438
 thermische ruis, 331
 thermistor, 348
 thermokoppel, 349, 544
 thyristor, 307
 TIA/EIA 568B, 590
 tijd-invariant, 377
time of flight, zie TOF
 TLB, 176
 TMDS, 561
 toegangstijd, 166
 toegevoegde matrix, 39
 toestand(s)
 -beschrijving, 382
 -diagram, 146
 -machine, 144
 -overgangsmatrix, 382
 -terugkoppeling, 442
 -variabele, 403
 toevallige meetfouten, 326
 toevalsexperiment, 94
 TOF, 366
 traagheidsmoment, zie massastraagheids-
 moment
 transconductantie, 289
 transducent, 402
 transfer, 158
 transformatie, lineaire, 54
 transformator, 305, 473
 ideale, 305
 niet-ideale, 306
 vervangingschema, 305
 transistor, 286, 291
 transistorschakelingen, 477, 478
 translatie, 413
 transmissie, 274
 transmissiecoëfficiënt, 277
 transmissiematrix, 410
 transponeren, 53
 transport, 411
 transportlaag, 179, 194
 trapvorm, 39
trashing, 167
 trema, 25
 tri-functie, 374
tri-state, 170
 triangulatie, 363
 trillingen, 334
 triode gebied, 292
 true, 237
true RMS, 339
 TTL, 184, 204, 530
 TTL-compatibel, 152
 tulp-connector, 562
 tunneling, 208
 tussen-n, 25
 tussen-s, 25

- tweede uniciteitstheorema, 258
- tweepoort, 472
- twisten, 334
- TxD*, 579
- type, 222
- typecast, 224
- typecast*, 222
- typedef, 221

- UART, 581
- UDP, 181, 194
- uitgangskarakteristiek, 292
- uitgangssignaal, 372
- uitkomstenruimte, 94
- uitslag-modus, 343
- uitsluiting, 46
- uitwendig product, 48
- uniciteitstheorema, 258
- uniform resource identifier*, zie URI
- uniforme verdeling, 101, 327
- unity step*, 373, 375
- unshielded twisted pair*, zie UTP
- URI, 187
- url encoding, 188
- USB, 589
- UTP, 217, 590

- VA, 471
- valentieband, 297
- valversnelling, 246
- VAR, 471
- variabele, 56, 219, 319
 - afhankelijke-, 60
 - onafhankelijke-, 60
- variantie, 98
- Veam, 565
- vector, 38, 319
 - functie, 58
 - product, 48
 - rekenregels, 47
 - steady-state-, 54
- veerconstante, 247
- vegen (matrix), 49
- Veitch diagram, 128
- veld
 - stroom, 296
 - conservatief, 257
 - elektrisch, 254
- Venn-diagram, 94
- verdelingsfunctie, 95
- vereniging, 46
- verklarende variabele, 106
- verkleinwoord, 21, 25
- vermogen(s), 302, 376, 386, 404, 447
 - elektronica, 307
 - overdracht, 302, 455
 - signaal, 376
- vermogenscontinu, 473
- verplaatsing, elektrische, 267
- verschilpaar, 479, 480
- versnelling, 244
- versnellingsopnemer, 369
- versterkingsmarge, 434
- verstrooiing, 294
- vertraagde potentialen, 279
- vervangingsschema, 305
- verwachte kwadratische fout, 104
- verwachtingswaarde, 97, 327
- verzadiging, 286, 292
- verzadigingseffect, 443
- verzameling, 36
- VESA, 587
- VFD, 542
- VGA, 587
- VHDL, 126
- vierdraadsmethode, 344
- virtual, 233
- vlakke golf, 272
- vlakke-bandspanning, 291
- vlakkeplaatcondensator, 262

- void, 223
volatile, 166
volgorde van bewerking, 40
volle brug, 344
volledige inductie, 32
volt-second-integraal, 309
Von Klitzing constante, 319
voorspellende variabele, 106
voortplantingssnelheid, 271
voorvoegsel, 22
voorwaarts, 286
voorwaartsspanning, 537
- waarneembaarheid, 442
watt, 471
WB, 161
WE, 170
WebDAV, 186
weerstand, 449, 491
werkwoordsvorm, 21
wervelstroom, 360
Westcott, theorema van, 438
wet van behoud van ellende, 438
wet van de grote getallen, 94
wet van de totale kans, 94
Wheatstone brug, 343
while, 226
Wien oscillator, 487
wijzerdomein, 462
window, 394
Windows-1252, 155
wisselspanning, 339, 461
wisselstroom, 461
-overdracht, 302, 303
woord, 165
wortel-n wet, 329
write-around, 169
write-through, 169
- XLR-connector, 563
XON-XOFF handshaking, 580
- Y-matrix, 472
YCrCb, 557
yocto-, 3
yotta-, 3
YPrPb, 557
- Z-matrix, 472
Z-transformatie, 398
zadelpunt, 65
zeef-eigenschap, 375
zepto-, 3
zetta-, 3
zichtbaar licht, 320
Ziegler-Nichols regel, 445
zonnecel, 294
zonnecel, 294
zuivere schatter, 104
zwaartepunt, 76
zwakke inversie, 292

reclame 1

—

—

reclame 2

—

—

